研究生教学用书

图论及其应用

Tulun Jiqi Yingyong

（第2版）

编著

中国科学技术大学出版社

图论及其应用

（第2版）

徐俊明　编著

中国科学技术大学出版社

2004・合肥

内 容 简 介

本书以有向图为着眼点，系统地阐述了图论的基本概念、理论和方法以及基本应用. 内容包括 Euler 图与 Hamilton 图、树与图空间、平图与平面图、网络流与连通度、匹配与独立集-染色理论、图与群，以及它们在矩阵论、组合数学、组合优化、运筹学、线性规划、科学管理、电子学以及通讯和计算机科学等多方面的应用. 本书选材颇具特点，内容处理很有新意，立论严谨，叙述条理清晰，语言流畅. 书中附有大量习题和有价值的参考文献.

本书既可用作高校数学系、计算机科学系、电子学系、管理科学系等专业高年级本科生和研究生的必修课或选修课教材；也可用作高校教师、图论工作者的参考书；同时也为数学爱好者、科学管理工作者和工程技术人员提供一本自学图论的读本.

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/徐俊明编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2004. 8
ISBN 7-312-01725-8

Ⅰ. 图…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 图论-高等学校-教材　Ⅳ. O157. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 083048 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销
开本：787×960/16　印张：17. 5　字数：330 千
1998 年 1 月第 1 版　2004 年 8 月第 2 版
2004 年 8 月第 3 次印刷　印数：4201 – 7200 册
ISBN 7-312-01725-8/O・293　定价：25. 00 元

第 2 版前言

我十分欣喜地获悉《图论及其应用》一书被国务院学位委员会审定批准为教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。这是各级领导、同行专家学者和广大读者对我的鼓励和鞭策。借此机会，我向他们表示真诚的谢意。

中国科学技术大学出版社极为重视本书的出版，组织了大量的人力和物力对本书进行重新排版和绘图。我借重新排版的机会，对原版进行了小规模的修订。第 2 版基本上保持了原版本的原貌，修正了一些勘误，改写了定理 4.2 和定理 4.3 的证明，使其更为简洁。采纳了部分读者的意见，对个别图论记号进行了改进。例如，群 Γ 关于 S 的 Cayley 图 $D_S(\Gamma)$ 必为 $C_\Gamma(S)$。由于版面的需要，第 2 版删去了原版中少量较容易或者过于难解的习题。第 2 版增加了部分最新的参考文献，供读者进一步阅读时参考。

徐俊明

2003 年 1 月 17 日于

中国科学技术大学・合肥

前　言

图论(Graph Theory)的产生和发展历经了二百多年的历史,大体上可以划分为三个阶段.

第一阶段是从1736年到19世纪中叶.这时的图论处于萌芽阶段,多数问题是围绕着游戏产生的,最有代表性的工作是著名的瑞士数学家L. Euler于1736年的Königsberg七桥问题.他的那篇论文被公认为图论历史上第一篇论文.

第二阶段从19世纪中叶到1936年.这个时期中图论问题大量出现,如四色问题(1852年)和Hamilton问题(1856年).同时出现了以图为工具去解决其他领域中一些问题的成果.最有代表性的工作是Kirchhoff(1847年)和Cayley(1857年)分别用树的概念去研究电网络方程组问题和有机化合物的分子结构问题."图(Graph)"这个词第一次出现是在1878年的英国《自然》杂志中.进入20世纪30年代,出现了一大批精彩的新理论和结果,如Menger定理(1927年),Kuratowski定理(1930年)和Ramsey定理(1930年)等等.这些理论和结果为图论的发展奠定了基础.1936年,匈牙利数学家D. König写出了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》.图论作为数学的一个新分支已基本形成.

1936年以后是第三阶段.由于生产管理、军事、交通运输、计算机和通讯网络等方面许多离散性问题的出现,大大促进了图论的发展.进入70年代以后,特别是大型电子计算机的出现,使大规模问题的求解成为可能.图的理论及其在物理、化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、网络理论、社会科学及经济管理等几乎所有学科领域中各方面应用的研究都得到"爆炸性发展".主要有以下三个原因:

1. 图论提供了一个自然的结构,由此而产生的数学模型几乎适合于所有科学(自然科学和社会科学)领域,只要这个领域研究的主题是"对象"与"对象"之间的关系.

2. 图论已形成自己的丰富词汇语言,它能简洁地表示出各个领域中"对象-关系"结构复杂而又难懂的概念.图论思想和方法越来越被许多科学领域所接受,并已发挥且将日益发挥它的重要作用.反过来,这些得益于图论的科学领域又向图论提出新的研究课题、新的概念和新的研究方法.

3. 图论提供了大量令人跃跃欲试的智力挑战性问题,小到初学者的简单习题,大到能使所有资深数学家感到棘手且悬而未决的难题.

由于图论的重要性，越来越多的大学已把它作为数学、计算机科学、电子学和科学管理等专业本科生和研究生的必修课和选修课. 编者已为中国科学技术大学数学系和全校高年级本科生和研究生多次开设此课程. 本书就是编者在《图论及其应用》讲义的基础上修改而成的.

本书所讨论的问题都是图论及其应用中最基本的课题. 我们对这些材料的处理方式是：着眼于有向图，而把无向图作为有向图的特例. 这样处理并不增加难度（几年来的教学实践证明了这一点），除避免定义和结果的重复叙述外，更直观而且似乎更接近图论的本质和发展的趋势.

图论内容之丰富和应用之广泛，是很难包括在一个学期使用的教材中的. 本书所涉及的材料，编者认为是必不可少的. 全书共分 7 章. 除介绍图的基本概念外，各章节所讨论的内容几乎都是图论研究中的专题. 我们对每个专题提供一些基本概念、经典结果和基本应用，并在一定程度上予以阐述. 各专题可以独立成章，但我们力争加强各专题之间的贯通联系，进一步揭示图论的数学本质，使之更具系统性和科学性。为了保留其独立性，我们用楷体给出部分主要结果的独立证明. 标有 * 号的章节和楷体字内容，初学者可以略去不读.

按照定义—定理—应用的叙述方式将每章分为两部分. 第一部分着重介绍概念和经典结果，并尽可能地对这些结果给出最新最简单的证明（有的结果给出多种证明）. 所有定义用黑体字标出，并给出相应的英文，为读者今后进一步阅读英文文献提供方便. 第二部分介绍以第一部分的基本理论为依据的应用，强调解决实际问题有效方法的重要性并给出若干著名的有效算法. 略去那些仅利用图论术语而与阐明理论无关的所谓“应用”. 我们在介绍图的理论、方法以及应用时，注重体现图论与组合学、代数、矩阵论、群论、组合优化、运筹学、线性规划、计算机科学、电子学和管理科学等的相互渗透. 每章末附有小结和参考文献，目的是为初学者提供进一步阅读的指南，同时也说明所用材料的原始和间接来源. 编者向这些论文和著作的作者表示感谢. 书末附有图论常用记号和名词索引，供备查之用.

节末的习题是正文的补充和扩展，有些乃是图论研究中的重要结论. 习题中引入的新定义，建议读者熟悉它，这对进一步学习有好处. 习题较多，读者应尽力多做一些，特别是那些用斜体标出的习题，因为后面的讨论要用到它们. 做图论习题不仅需要对概念和定理的深刻理解，而且还需要智慧和技巧，不做习题是很难学会和掌握图论的思想和方法的. 即使不能全做，阅读一下这些结论也是很有用处的. 较难的习题用黑体标出.

阅读本书只需要具备集合论和线性代数的基本知识. 对于研究生和高年级本科生来讲，这些知识都已具备.

根据编者以往的经验，作为数学系一学期的课程，每周 4 学时可以讲完本书的全部内容. 作为非数学系的选修课程，每周 3 学时可以讲完前六章第一部分（部分定理的证明及 2.4 节、3.3 节、6.3 和 6.4 节可以不讲）；部分应用内容（视其选修对象而定），也可以安排一些自习内容.

编者衷心感谢上海交通大学应用数学系李乔教授和中国科技大学数学系李炯生教授对编者的指导和帮助及对编写本书的始终不渝的鼓励和支持. 真诚感谢中国科学院系统科学研究所田丰教授和北方交通大学数学系刘彦佩教授对编者的关心和指导. 非常感谢中国科学技术大学出版社、教务处研究生院和数学系对本书出版的支持. 编者感谢中国科学技术大学历届选修此课程的同学们对学习这门课程表现出的极大热忱和对讲义提出的宝贵意见.

衷心希望同行专家、各位师友和读者批评指教.

徐俊明

1997 年 4 月 1 日于

中国科学技术大学，合肥

目 录

第2版前言 ………………………………………… (Ⅰ)
前 言 ………………………………………… (Ⅲ)
第1章 图的基本概念
1.1 图与图的图形表示 ………………………………… (1)
1.2 图的同构 ………………………………… (6)
1.3 图的顶点度 ………………………………… (12)
1.4 图的运算 ………………………………… (15)
1.5 路与连通 ………………………………… (20)
1.6 回与圈 ………………………………… (27)
1.7 Euler 图 ………………………………… (32)
1.8 Hamilton 图 ………………………………… (37)
1.9 图的矩阵表示 ………………………………… (43)
应用
1.10 本原方阵的本原指数 ………………………………… (48)
小结与参考文献 ………………………………… (57)
第2章 树与图空间
2.1 树与林 ………………………………… (60)
2.2 支撑树与支撑林 ………………………………… (63)
2.3 图的向量空间 ………………………………… (65)
2.4 支撑树数目* ………………………………… (73)
应用
2.5 最小连接问题 ………………………………… (79)
2.6 最短路问题 ………………………………… (84)
2.7 电网络方程 ………………………………… (91)
小结与参考文献 ………………………………… (95)
第3章 平图与平面图
3.1 平图与 Euler 公式 ………………………………… (98)
3.2 Kuratowski 定理 ………………………………… (105)
3.3 对偶图* ………………………………… (110)

应用
3.4 正多面体 …… (113)
3.5 印刷电路板的设计 …… (116)
小结与参考文献 …… (122)
第4章 网络流与连通度
4.1 网络流 …… (125)
4.2 Menger 定理 …… (129)
4.3 连通度 …… (138)
应用
4.4 运输方案的设计 …… (145)
4.5 最优运输方案的设计 …… (152)
4.6 中国投递员问题 …… (157)
4.7 方化矩形的构造 …… (163)
小结与参考文献 …… (168)
第5章 匹配与独立集
5.1 匹配 …… (171)
5.2 独立集 …… (184)
应用
5.3 人员安排问题 …… (189)
5.4 最优安排问题 …… (195)
5.5 货郎担问题 …… (203)
5.6 收款台的设置问题 …… (208)
小结与参考文献 …… (211)
第6章 染色理论
6.1 点染色 …… (213)
6.2 边染色 …… (220)
6.3 面染色* …… (226)
6.4 四色猜想* …… (228)
应用
6.5 排课表问题 …… (232)
6.6 贮藏问题 …… (235)
小结与参考文献 …… (238)
第7章 图与群*
7.1 图的群表示 …… (240)

7.2　可迁图 …… (245)
7.3　群的图表示 …… (249)
应用
7.4　可靠通讯网络的设计 …… (254)
小结与参考文献 …… (256)
图论常用记号 …… (258)
名词索引 …… (261)

第1章 图的基本概念

在自然界和人类社会的实际生活中，用图形来描述某些对象(或事物)之间具有某种特定关系常常感到特别方便. 例如用工艺流程图来描述某项工程中各工序之间的先后关系，用竞赛图来描述某循环比赛中各选手之间的胜负关系，用网络图来描述某通讯系统中各通讯站之间信息传递关系，用交通图来描述某地区内各城市之间的铁路连接关系，用原理电路图来描述某电器内各元件导线连接关系，等等. 图形中的点表示对象(如上例中的工序、选手、通讯站等)，两点之间的有向或无向连线表示两对象之间具有某种特定的关系(如上例中的先后关系、胜负关系、传递关系、连接关系等). 事实上，任何一个包含了某种二元关系的系统都可以用图形来模拟. 由于我们感兴趣的是两对象之间是否有某种特定关系，所以图形中两点间连接与否甚为重要，而连接线的曲直长短则无关紧要. 由此数学抽象产生了图的概念. 研究图的基本概念和性质、图的理论及其应用，构成了图论的主要内容.

本章介绍图的基本概念、术语、记号和若干初等结果，它是本书的基础；然后介绍图在矩阵论中的应用.

提请读者注意的是，大多数图论学者在他们的著作、论文和演讲中都习惯使用自己的一套术语和记号. 甚至"图"这个词的意义也是不统一的. 为了在有关图论的讨论中避免歧义，每个人都得预先说清楚他所使用的图论语言. 本书将采用大多数学者所采用的术语和记号，书末附有索引.

1.1 图与图的图形表示

所谓**图**(**graph**)是指有序三元组(V,E,ψ)，其中V非空称为**顶点集**(**vertex-set**)，E称为**边集**(**edge-set**)，而ψ是E到V中元素有序对或无序对簇$V\times V$的函数，称为**关联函数**(**incidence function**). V中元素称为**顶点**(**vertex**)(或**点**(**point**))，E中元素称为**边**(**edge**)，ψ刻画了边与顶点之间的关联关系. 若$V\times V$中元素全是有序对，则(V,E,ψ)称为**有向图**(**digraph**)，记为$D=(V(D),E(D),\psi_D)$. 若$V\times V$中元素全是无序对，则(V,E,ψ)称为**无向图**(**undirected graph** 或 **graph**)，记为$G=(V(G),E(G),\psi_G)$. 设$a\in E(D)$，则存在$x,y\in V(D)$和有序对$(x,y)\in V\times V$使$\psi_D(a)=(x,y)$. a称为**从x到y的有向边**(**directed edge from

x to y). x 称为 a 的**起点**(**origin**),y 称为 a 的**终点**(**terminus**),起点和终点统称为**端点**(**end-vertices**). 设 $e\in E(G)$,则存在 $x,y\in V(G)$ 和无序对 $\{x,y\}\in V\times V$ 使 $\psi_G(e)=\{x,y\}$. 由于无序对 $\{x,y\}$ 和 $\{y,x\}$ 表示同一个元素,所以通常简记 $\psi_G(e)=xy$ 或 yx. e 称为**连接** x **和** y **的边**(**edge connecting** x **and** y).

例 1.1.1 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$,其中:

$V(D)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,

$E(D)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}$,

而 ψ_D 定义为:

$\psi_D(a_1)=(x_1,x_2),\psi_D(a_2)=(x_3,x_2),\psi_D(a_3)=(x_3,x_3)$,

$\psi_D(a_4)=(x_4,x_3),\psi_D(a_5)=(x_4,x_2),\psi_D(a_6)=(x_4,x_2)$,

$\psi_D(a_7)=(x_5,x_2),\psi_D(a_8)=(x_2,x_5),\psi_D(a_9)=(x_3,x_5)$.

例 1.1.2 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$,其中:

$V(H)=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$,

$E(H)=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9\}$,

而 ψ_H 定义为:

$\psi_H(b_1)=(y_1,y_2),\psi_H(b_2)=(y_3,y_2),\psi_H(b_3)=(y_3,y_3)$,

$\psi_H(b_4)=(y_4,y_3),\psi_H(b_5)=(y_4,y_2),\psi_H(b_6)=(y_4,y_2)$,

$\psi_H(b_7)=(y_5,y_2),\psi_H(b_8)=(y_2,y_5),\psi_H(b_9)=(y_3,y_5)$.

例 1.1.3 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$,其中:

$V(G)=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6\}$,

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$,

而 ψ_G 定义为:

$\psi_G(e_1)=z_1z_2,\quad \psi_G(e_2)=z_1z_4,\quad \psi_G(e_3)=z_1z_6$,

$\psi_G(e_4)=z_2z_3,\quad \psi_G(e_5)=z_3z_4,\quad \psi_G(e_6)=z_3z_6$,

$\psi_G(e_7)=z_2z_5,\quad \psi_G(e_8)=z_4z_5,\quad \psi_G(e_9)=z_5z_6$.

我们采用“图”这个词,是因为我们所定义的图可以用图形来表示,而且这种图形表示比较直观而有助于我们理解图的许多概念和性质. 每个顶点用点(为清晰起见,点往往被画成小圆圈)来表示. 有向图中的每条边用一条从起点对应的点连到终点对应的点的有向曲线段来表示;无向图中的每条边用一条连接两端点对应的点之间的线段来表示. 这样的图形称为图的**图形表示**(**diagrammatic representation**).

例如,图 1.1 所示的两个图形都是例 1.1.1 中所定义的图 D. 例 1.1.2 中所定义的图 H 和例 1.1.3 中所定义的图 G 的图形表示分别如图 1.2(a)和(b)所示.

因为表示顶点的点和表示边的曲线段的相对位置是无关紧要的，所以图形表示并不是惟一的. 例如，图 1.1 中所示的图形就是例 1.1.1 中定义的图 D 的两种图形表示. 也正是利用了这一特点，图的图形表示可以画得非常精美. 因为图的图形表示已描述出它的顶点与边之间所具有的关联关系，所以，在大多数场合下，其图形表示不用标出边的名称. 例如，图 1.2(b)中所示的图形就是例 1.1.3 中无向图 G 的图形表示，虽然没有标出边的名称，但其边与顶点之间的关联关系已是一目了然。

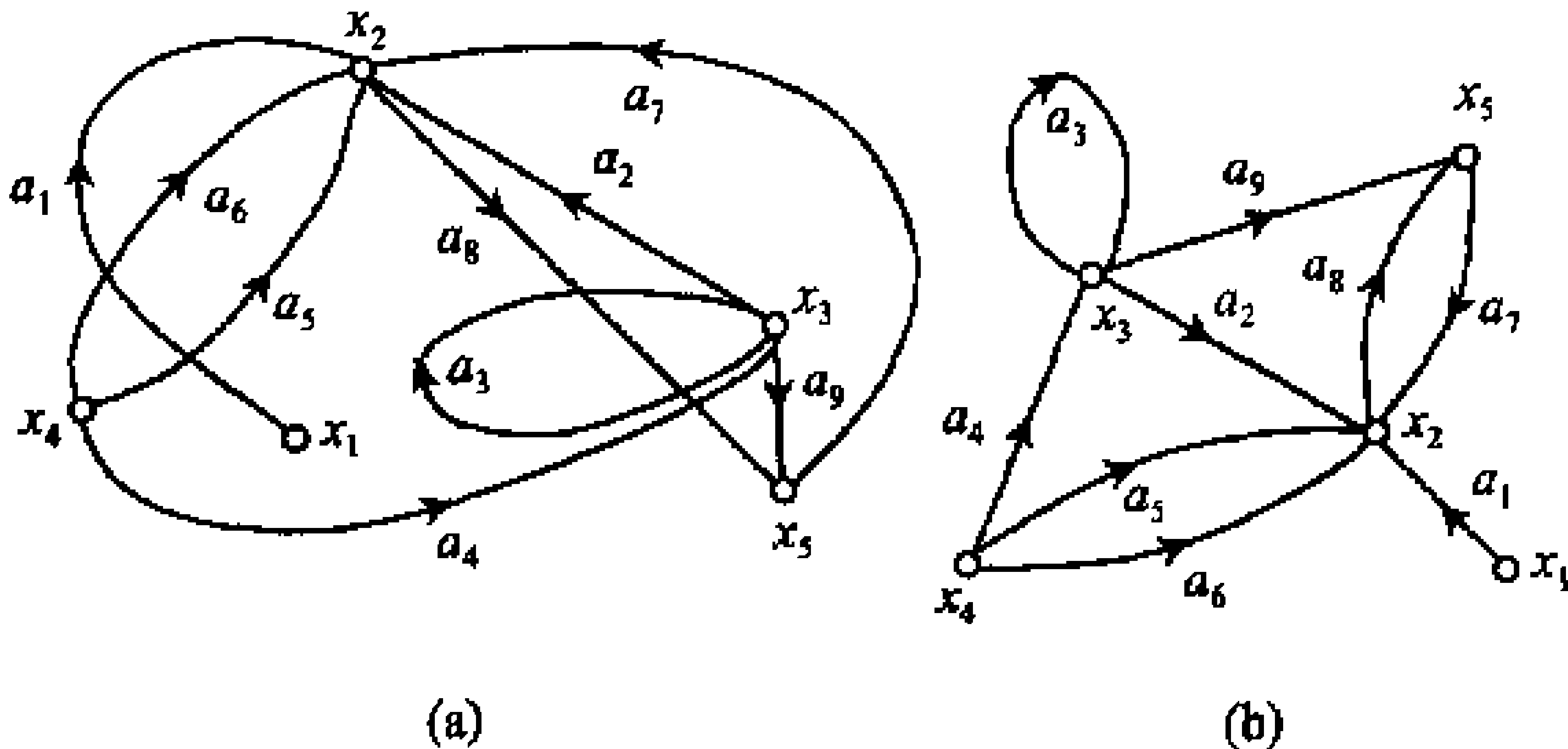


图 1.1 图 D 的两种图形表示

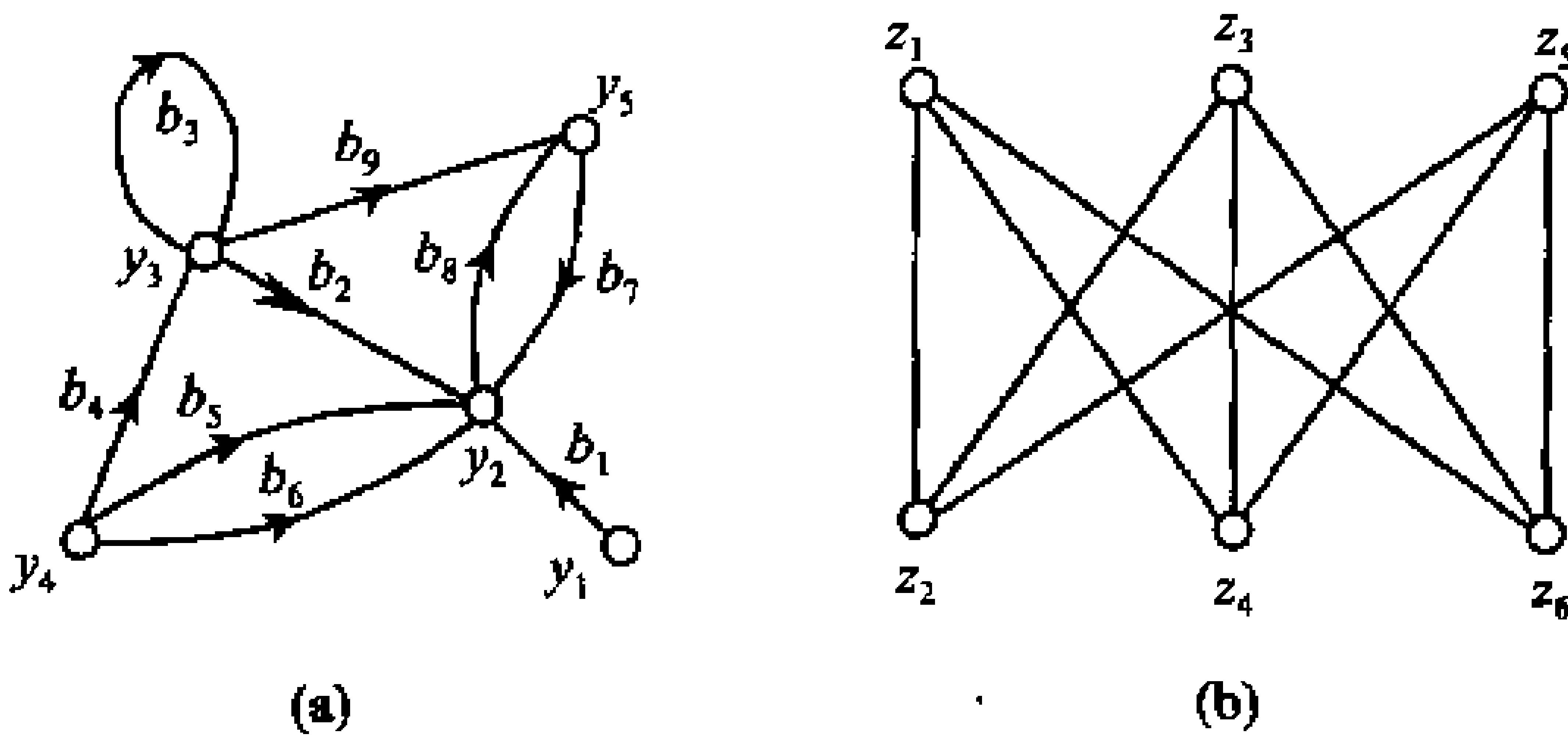


图 1.2 有向图 H 和无向图 G 的图形表示

必须指出，图是一个抽象的数学概念. 尽管我们能用图形来表示，使图的结构形象化，但是图的定义与这些图形毫不相干. 然而，我们常常给出图的图形表示，把它的点称为"顶点"，它的曲线段称为"边". 因此，当我们画出图的图形表示时，每条线段的内部自身不要相交，也不要穿过表示顶点的点.

图论中大多数定义和概念是根据图的图形表示提出来的. 例如，边与它的两端点称为**关联的**(**incident**)；与同一条边关联的两端点或者与同一个顶点关联的两条边称为**相邻的**(**adjacent**). 两端点相同的边称为**环**(**loop**). 例如，图 1.1 和图 1.2(a)所示的图中边 a_3 和 b_3 都是环. 有公共起点并有公共终点的两条边称

为平行边(**parallel edges**)或者称为**重边**(**multi-edges**). 两端点相同但方向互为相反的两条有向边称为**对称边**(**symmetric edges**). 例如,图 1.1 所示的图 D 中,两条边 a_5 和 a_6 是平行边,但两条边 a_7 和 a_8 不是平行边,而是对称边.

无环并且无平行边的图称为**简单图**(**simple graph**). 例如,上面定义的 3 个图,其中图 D 和图 H 都不是简单图,而图 G 是简单图. 在简单图(V,E,ψ)中,由于起点为 x 且终点为 y 的边至多有一条,因此,图中边可以直接用顶点对来表示,而关联函数 ψ 就可以直接表示在其边集中,故可简记为(V,E). 例如,在例 1.1.3 中定义的图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$中,其边集 $E(G)$可以写成

$$E(G)=\{z_1z_2,z_1z_4,z_1z_6,z_2z_3,z_3z_4,z_3z_6,z_2z_5,z_4z_5,z_5z_6\}.$$

于是该图 G 可以写成$G=(V(G),E(G))$.

由图的定义,我们立即可以看出,有向图与无向图的差别仅在于 $V\times V$ 中元素是 V 中元素的有序对还是无序对. 然而,无序对$\{x,y\}$可以视为两个有序对(x,y)和(y,x). 也就是说,对于无向图 G,将 G 中每条边 e 用两条与 e 有相同端点的对称边 a 和 a'来替代后得到一个有向图 D. 这样得到的有向图 D 称为 G 的**对称有向图**(**symmetric digraph**). 由此可见,无向图可以视为特殊的有向图. 图 1.3(a)和(b)中所示的图就是这样的两个图.

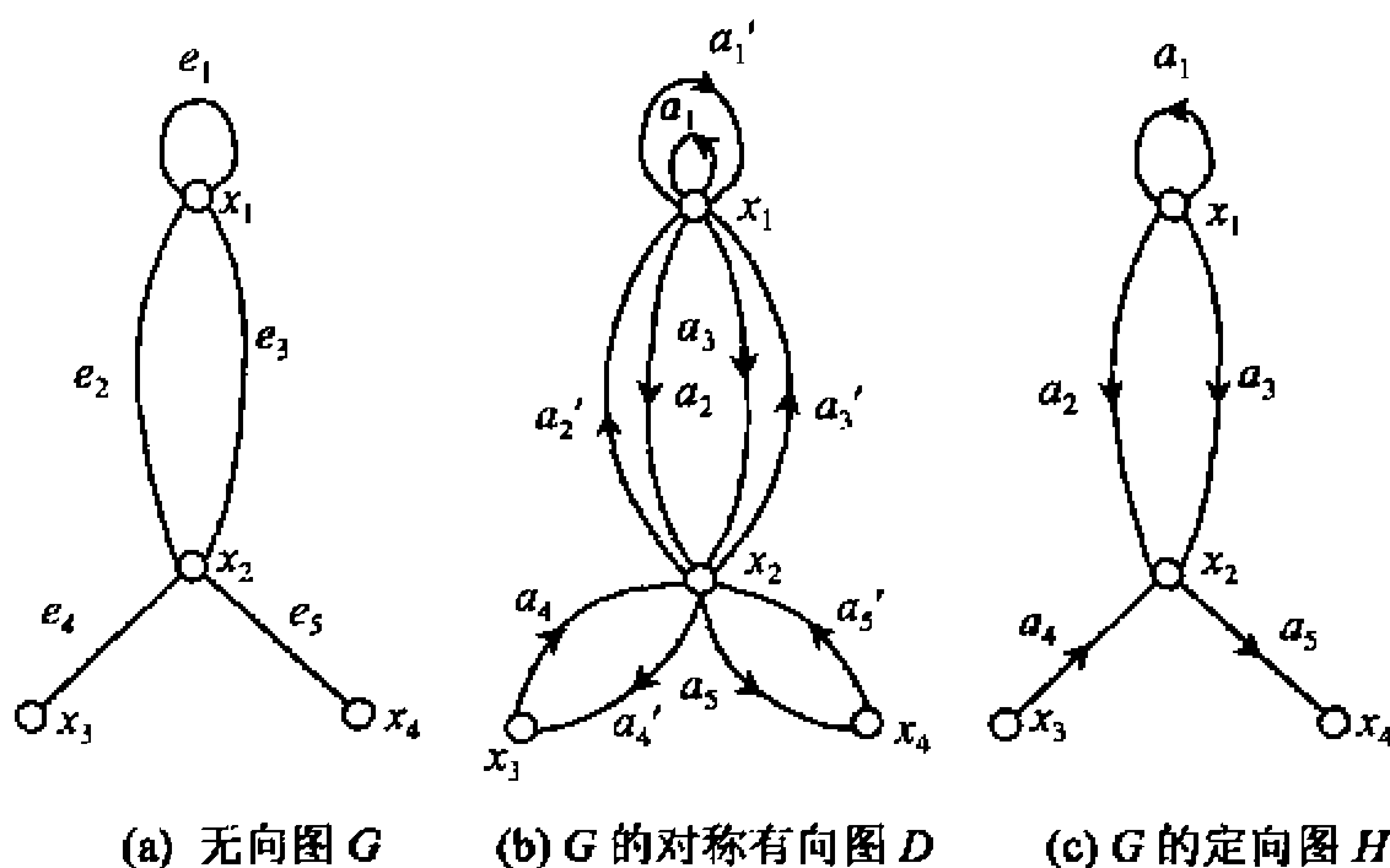


图 1.3

图论中研究的部分内容常与边的方向没有关系,故在讨论与边方向没有关系的有向图 D 时,人们通常去掉边上的方向. 这样得到的无向图 G 称为 D 的**基础图**(**underlying graph**). 反之,任给一个无向图 G,将 G 的边指定一个方向从而得到一个有向图 H,称这样的有向图 H 为G 的一个**定向图**(**oriented graph**). 图 1.3(a)和(c)所示的图就是这样的两个图.

设(V,E,ψ)是图,V 中元素的个数 ν 和 E 中元素的个数 ε,即 $\nu=|V|$ 和 $\varepsilon=|$

$|E|$ 分别称为该图的顶点数或阶（**order**）和边数（**size**）.

例如，对于例 1.1.1，例 1.1.2 和例 1.1.3 中定义的图 D,H 和 G 分别有 $\nu(D)=\nu(H)=5$，$\nu(G)=6$，$\varepsilon(D)=\varepsilon(H)=\varepsilon(G)=9$.

阶数为 1 的简单图称为**平凡图**（**trivial graph**），边数为零的图称为**空图**（**empty graph**）．ν 和 ε 都是有限的图称为**有限图**（**finite graph**）.

本书只涉及有限图．除特别声明外，字母 D 总表示有向图，而字母 G 总表示无向图，ν 和 ε 总表示图的阶和边数．所涉及的数都是非负整数．设 r 是一个正实数，$\lceil r\rceil$ 表示不小于 r 的最小整数；$\lfloor r\rfloor$ 表示不大于 r 的最大整数．一个 n 元素集的 $k(\leqslant n)$ 个元素不重复组合数记为 $\binom{n}{k}$，即

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

例 1.1.4　证明：在任意 6 个人的集会上，要么有 3 人曾相识，要么有 3 人不曾相识.

证明　我们用 A,B,C,D,E,F 代表这 6 个人，其中 2 人曾相识，则代表这 2 人的两顶点之间连 1 条红边；否则连 1 条蓝边．于是原来的问题就等价于证明在这样得到的图中必含同色三角形．考察某一个顶点，设为 F．与 F 关联的边中必有 3 条同色．不妨设它们是 3 条红边 FA、FB 和 FC．再看三角形 ABC．如果它有 1 条红边，设为 AB，则 FAB 是红边三角形；如果三角形 ABC 没有红边，则它本身就是蓝边三角形．□

习　题

1.1.1　分别画出下列 5 个顶点集为 V 并且边集为 E 的无平行边图 B,K,Q,D 和 G 的图形表示，其中：

(a) $V(B)=\{x_1x_2x_3: x_i\in\{0,1\}\}$，并且若 $x,y\in V(B)$，$x=x_1x_2x_3$，则 $(x,y)\in E(B)\Leftrightarrow y=x_2x_3\alpha$，其中 $\alpha\in\{0,1\}$；

(b) $V(K)=\{x_1x_2x_3: x_i\in\{0,1,2\},x_{i+1}\neq x_i\}$，并且若 $x,y\in V(K)$，$x=x_1x_2x_3$，则 $(x,y)\in E(K)\Leftrightarrow y=x_2x_3\alpha$，其中 $\alpha\in\{0,1,2\}$ 且 $\alpha\neq x_3$；

(c) $V(Q)=\{x_1x_2x_3: x_i\in\{0,1\}\}$，并且若 $x=x_1x_2x_3$，$y=y_1y_2y_3\in V(Q)$，则 $xy\in E(Q)\Leftrightarrow|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|x_3-y_3|=1$.

1.1.2　证明：

(a) 若 D 是简单有向图，则 $\varepsilon\leqslant\nu(\nu-1)$；

(b) 若 G 是简单无向图，则 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$.

1.1.3　用 $\mathscr{D}_\nu$ 和 $\mathscr{G}_\nu$ 分别表示以 $\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$ 为顶点集的 ν 阶简单有向图集和 ν 阶简单无向

图集. 证明:

(a) $|\mathscr{D}_\nu|=2^{\nu(\nu-1)}$;　　　(b) $|\mathscr{G}_\nu|=2^{\nu(\nu-1)/2}$.

1.1.4 证明: 无向图 G 有 $2^{\varepsilon(G)}$ 个定向图.

1.1.5 用 $\mathscr{D}(\nu,\varepsilon)$ 和 $\mathscr{G}(\nu,\varepsilon)$ 分别表示阶数为 ν 且边数为 ε 的简单有向图集和简单无向图集. 证明:

(a) $|\mathscr{D}(\nu,\varepsilon)|=\binom{\nu(\nu-1)}{\varepsilon}$;

(b) $|\mathscr{G}(\nu,\varepsilon)|=\binom{\nu(\nu-1)/2}{\varepsilon}$.

1.2 图的同构

设 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$ 和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$ 是两个图. 如果 $V(D)=V(H)$, $E(D)=E(H)$ 且 $\psi_D=\psi_H$, 则称 D 和 H 是**恒等的**(**identical**), 记为 $D=H$. 显然, 恒等的两个图可以用同一个图形来表示. 但不恒等的两个图也可能有相同的图形表示. 例如, 由例 1.1.1 所定义的图 D 和由例 1.1.2 所定义的图 H 是不恒等的, 但它们有完全相同的图形表示(如图 1.1(b)和图 1.2(a)所示), 差别仅在于它们的顶点和边的名称不同.

两个图 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$ 和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$ 称为**同构的**(**isomorphic**), 记为 $D\cong H$, 如果存在两个双射

$$\theta:\ V(D)\to V(H)$$

和

$$\varphi:\ E(D)\to E(H),$$

使得 $\forall a\in E(D)$,

$$\psi_D(a)=(x,y)\Leftrightarrow\psi_H(\varphi(a))=(\theta(x),\theta(y))\in E(H).$$

映射对 (θ,φ) 称为 D 和 H 之间的一个**同构映射**(**isomorphic mapping**).

要证明两个图是同构的, 就必须指出它们之间的一个同构映射. 例如, 例 1.1.1 中的图 D 和例 1.1.2 中的图 H 是同构的, 因为由

$$\theta(x_i)=y_i,\ i=1,2,\cdots,5$$

和

$$\varphi(a_j)=b_j,\ j=1,2,\cdots,9$$

所确定的映射 $\theta: V(D)\to V(H)$ 和 $\varphi: E(D)\to E(H)$ 是双射, 而且 (θ,φ) 是 D 和 H 之间的一个同构映射.

容易看到, 图的同构关系是一种等价关系. 这种等价关系将 ν 阶图分成若干等价类, 同构的两个图属于同一类. 同一类图有相同的结构, 差别仅在于顶点和边的名称不同. 由于人们感兴趣的是图的结构, 所以常常略去名称, 用一个其顶点和边都没有名称的图形表示作为同构图等价类中的代表元素. 有时我们也

给图的顶点和(或)边以标号,目的是为了便于称呼它们. 顶点已确定标号的图称为**标号图**(**labelled graph**).

下面介绍一些特殊的图类,在今后的讨论中经常遇到它们.

图 1.4 所示的图称为 Petersen 图. 以后,我们将看到这是一个结构简单而十分有趣的图. 它常常作为各种反例出现在任何一本图论教科书中.

任何不同两顶点之间都有边相连的简单无向图称为**完全图**(**complete graph**). 完全图的对称有向图称为**完全有向图**(**complete digraph**). 在同构意义下,ν 阶完全图和完全有向图都是唯一的,分别记为 K_ν 和 K_ν^*. 图 1.6(a) 和(b)所示的图分别是 K_5 和 K_3^*. K_3 称为**三角形**(**triangle**). 由定义,我们立即有

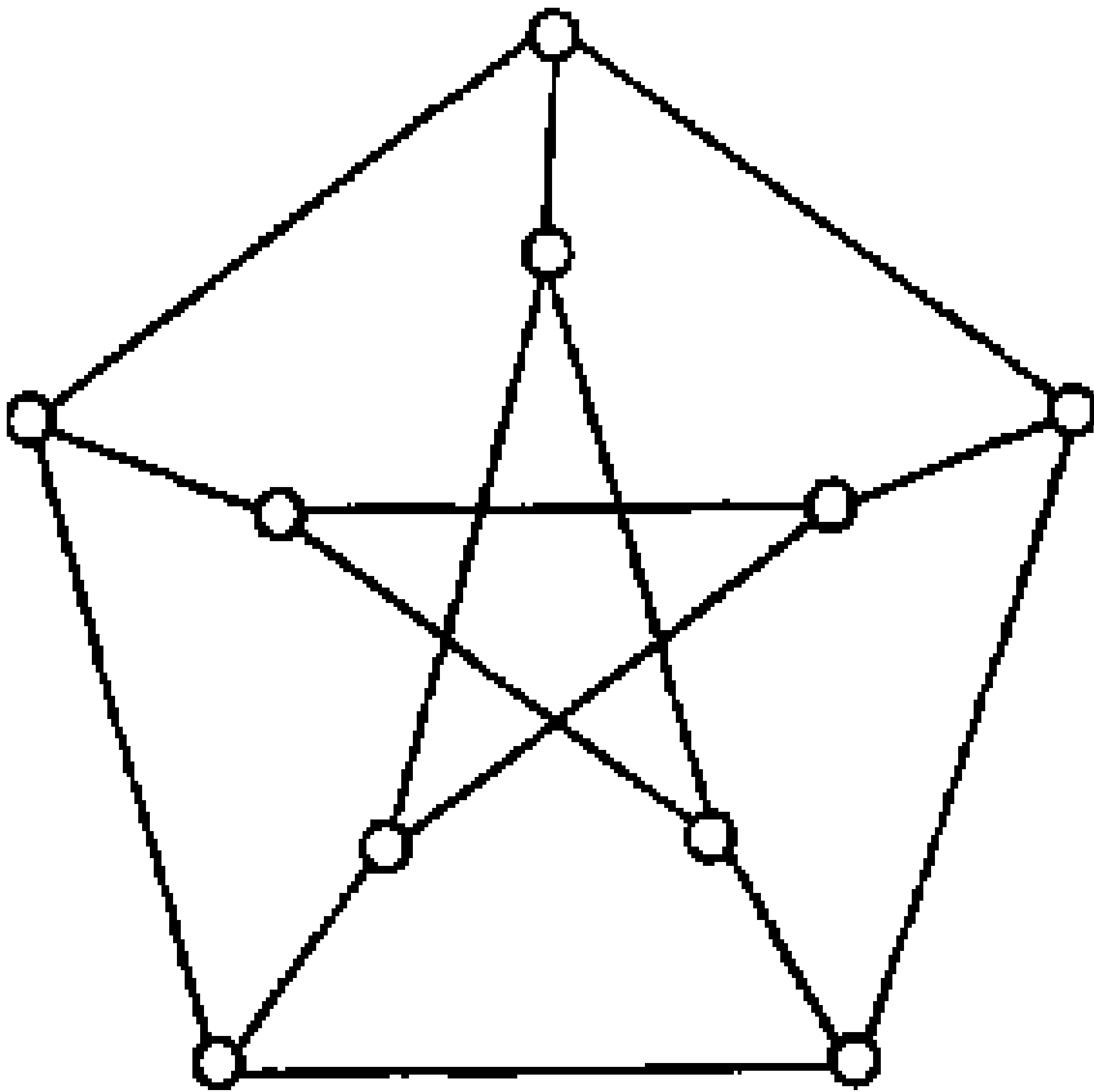


图 1.4 Petersen 图

$$\varepsilon(K_\nu)=\binom{\nu}{2}=\frac{1}{2}\nu(\nu-1),$$

$$\varepsilon(K_\nu^*)=2\binom{\nu}{2}=\nu(\nu-1).$$

完全图的定向图称为**竞赛图**(**tornament**). 之所以用这个名称,是因为这种图完全形象地描述了有 ν 个选手参加的某项循环比赛的结果. 选手 x 战胜了选手 y,则边 xy 定向从 x 到 y. 在同构意义下,1 阶竞赛图是平凡图;2 阶竞赛图仅有一个;3 阶竞赛图有两个;4 阶竞赛图有 4 个. 这些都表示在图 1.5 中.

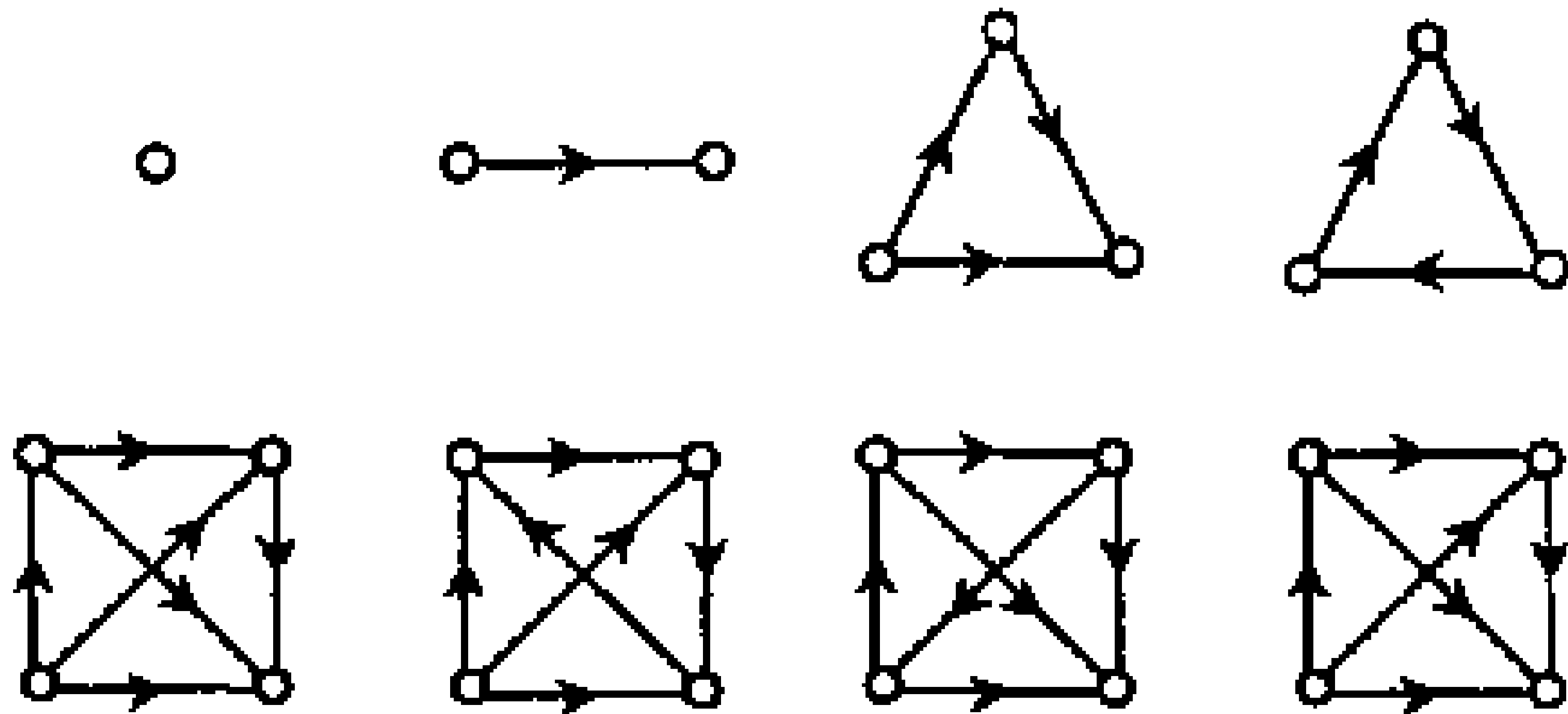
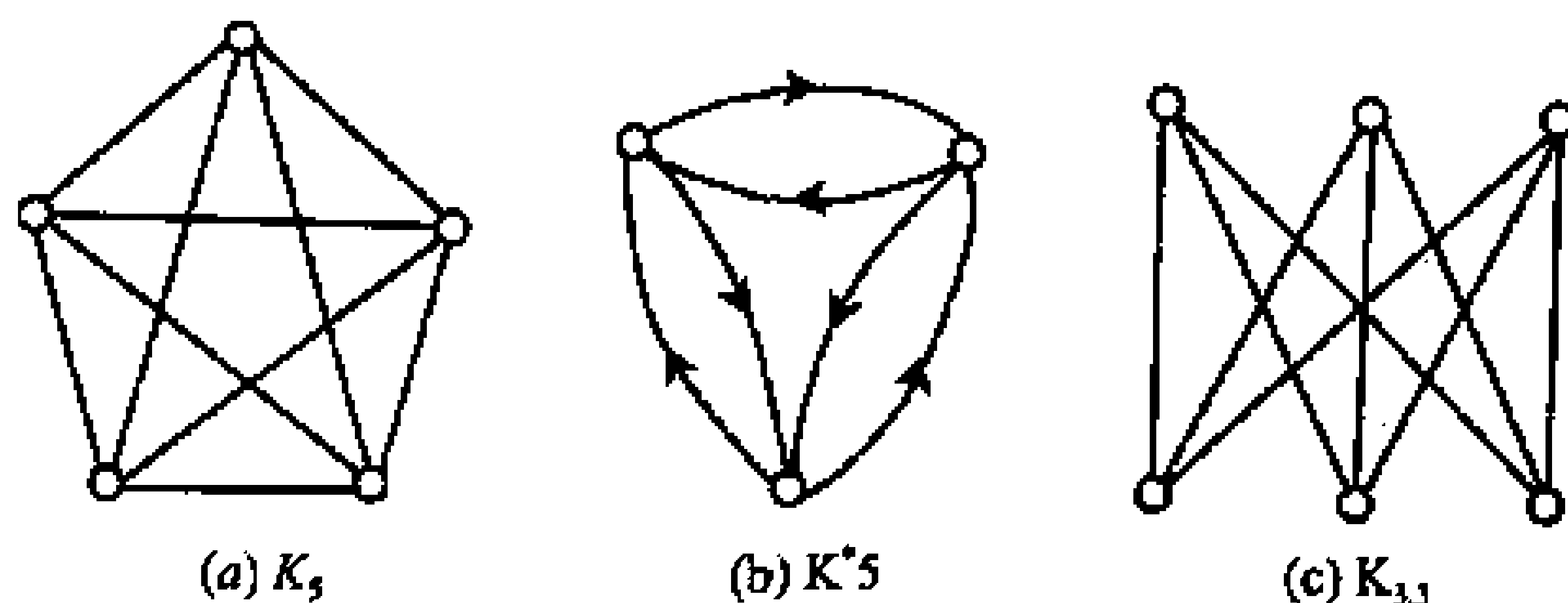


图 1.5 $\nu(=1,2,3,4)$阶不同构竞赛图

若无环图的顶点集可以划分为两个非空子集 X 和 Y 使得 X 中任何两顶点之间无边相连并且 Y 中任何两顶点之间也无边相连,则称该图为 **2 部分图**(**bipartite graph**),$\{X,Y\}$称为 **2 部划分**(**bipartation**). 例如,图 1.2(b)所示的图 G 是一个 2 部分图,其中 $X=\{z_1,z_3,z_5\}$,$Y=\{z_2,z_4,z_6\}$. 2 部划分为$\{X,Y\}$的 2 部分图有时记为$(X\cup Y,E,\psi)$. 简单 2 部分无向图$(X\cup Y,E)$称为**完全 2 部分图**(**complete bipartite graph**),如果 X 中每个顶点与 Y 中每个顶点之间均有边相连. 例如,图 1.2(b)中所示的图是一个完全 2 部分图. 如果$|X|=m$,$|Y|=n$,那

么在同构意义下，完全 2 部分图是唯一的，记为 $K_{m,n}$. 图 1.6(c)所示的图是 $K_{3,3}$. $K_{n,n}$有时记为 $K_n(2)$. 同样可以定义 k **部分图**和 $K_n(k)$. $K_{1,(\nu-1)}$ 称为**星**



(a) K_5　(b) K^*5　(c) $K_{3,3}$

图 1.6

(**star**). 由定义，我们不难证明(习题 1.2.3 和 1.2.4)：

$$\varepsilon(K_{m,n}) = \binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2} = mn,$$

$$\varepsilon(K_n(k)) = \frac{1}{2}k(k-1)n^2$$

2 部分图是一类结构简单而又非常重要的图. 事实上，任何一个有向图都对应一个 2 部分无向图. 设 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$是一个有向图，其中：

$V(D)=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$，构作一个 2 部划分为$\{X$，
$E(D)=\{a_1,a_2,\cdots,a_\varepsilon\}$.

$Y\}$的 2 部分无向图 $G=(X\cup Y,E(G),\psi_G)$如下，其中：

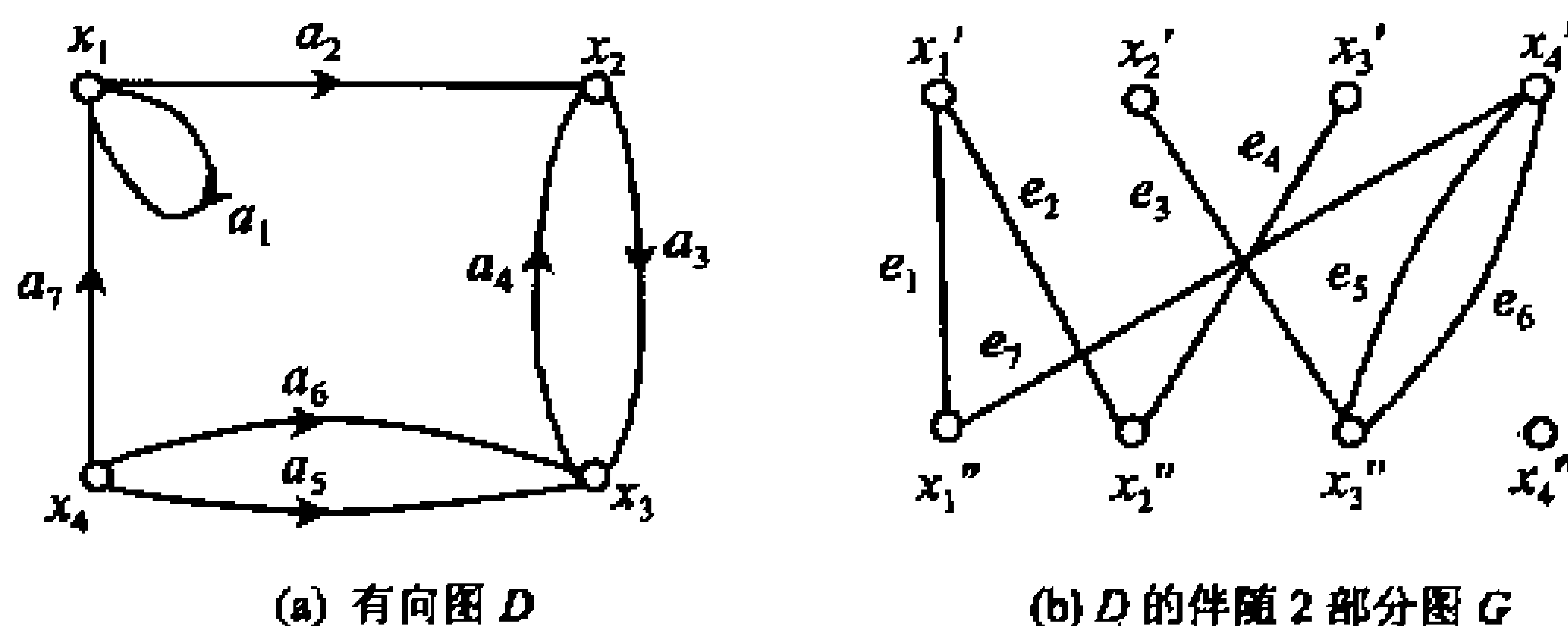
$X=\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_\nu\}$，　$Y=\{x''_1,x''_2,\cdots,x''_\nu\}$，

$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$，　$e_l\in E(G)$并且 $\psi_G(e_l)=x'_ix''_j$

$\Leftrightarrow$存在 $a_l\in E(D)$使 $\psi_D(a_l)=(x_i,x_j)$

$(l=1,2,\cdots,\varepsilon)$.

这样由 D 构造出来的 2 部分无向图 G 称为 D **的伴随 2 部分图**(**associated bipartite graph**). 例如图 1.7(b)中所示的图 G 就是对应于(a)中所示的有向图 D 的伴随 2 部分图. 从 G 的构造立即可知：



(a) 有向图 D　(b) D 的伴随 2 部分图 G

图 1.7

$$\nu(G)=2\nu(D)且\varepsilon(G)=\varepsilon(D).$$

例 1.2.1 我们来构造一类2部分简单图，称为 n 维立方体(n-cube)，记为 $Q_n=(V(Q_n),E(Q_n))$，定义如下：

$$V(Q_n)=\{x_1x_2\cdots x_n:\ x_i\in\{0,1\},\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

并且若 $x=x_1x_2\cdots x_n$，$y=y_1y_2\cdots y_n\in V(Q_n)$，则

$$xy\in E(Q_n)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1.$$

由 Q_n 的定义易知 Q_n 是简单图，而且 $V(Q_n)$ 中元素与分量取值为0或1的 n 维向量一一对应，而后者恰有 2^n 个. 所以 $\nu(Q_n)=2^n$. 图1.8所示的图分别是 Q_1,Q_2,Q_3 和 Q_4.

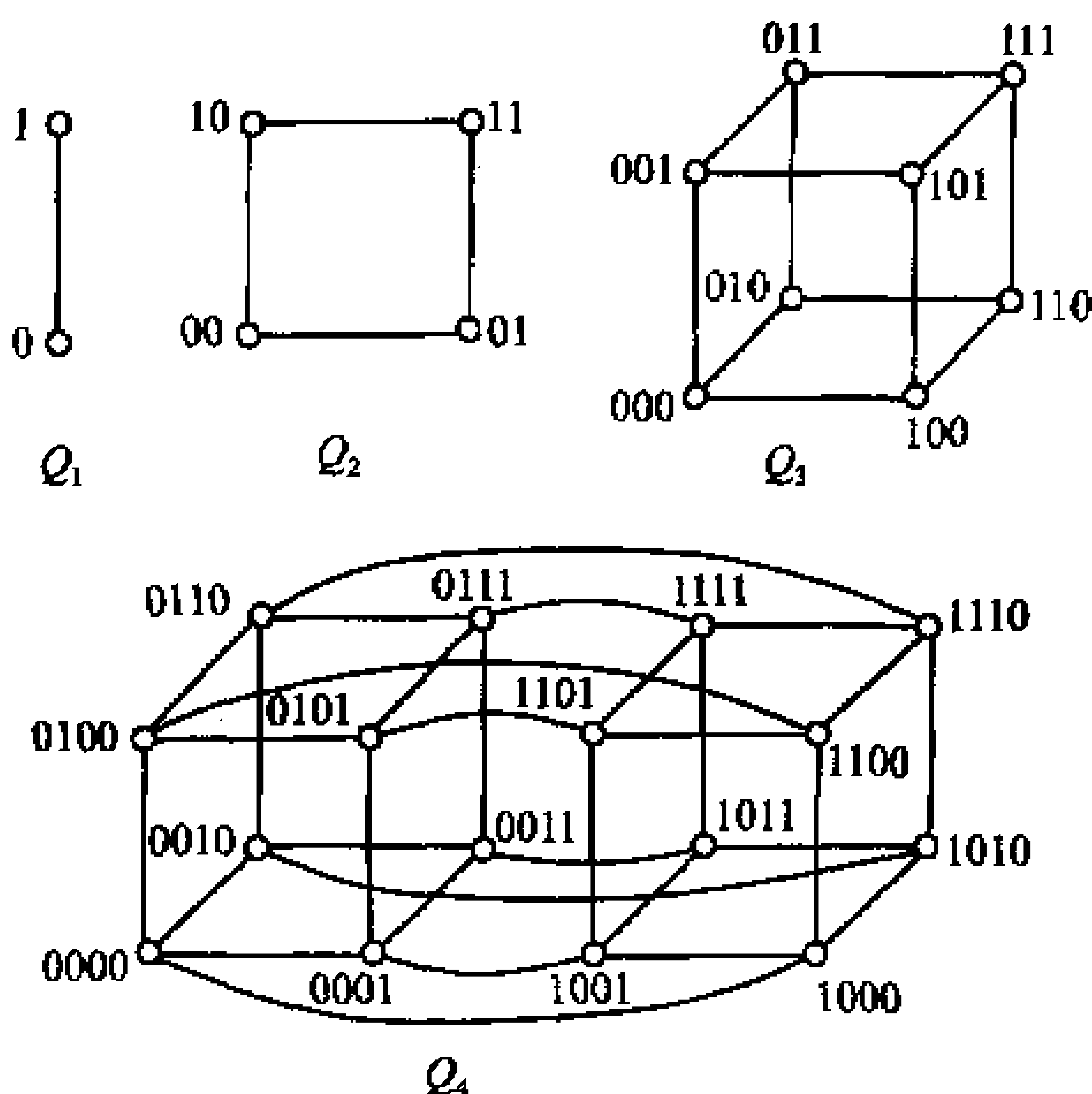


图 1.8 n 维立方体 $Q_n(n=1,2,3,4)$

为证明 Q_n 是2部分图，令 $X,Y\subset V(Q_n)$，其中：

$$X=\{x_1x_2\cdots x_n:\ x_1+x_2+\cdots+x_n\equiv 0(\bmod 2)\},$$

$$Y=\{y_1y_2\cdots y_n:\ y_1+y_2+\cdots+y_n\equiv 1(\bmod 2)\},$$

则由 Q_n 的定义可知 $\{X,Y\}$ 是 $V(Q_n)$ 的2部划分. 这是因为显然有 $X\cup Y=V(Q_n)$，$X\cap Y=\varnothing$. 而且，若存在 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $x'=x'_1x'_2\cdots x'_n\in X$ 使 $xx'\in E(Q_n)$，则应有 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-x'_i|=1$，即有

$$|(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x'_1+x'_2+\cdots+x'_n)|=1,$$

但这矛盾于 $x,x'\in X$. 所以 X 中任何两顶点之间无边相连.

同样可以证明 Y 中任何两顶点之间也无边相连. 于是 Q_n 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图.

任取 $x=x_1x_2\cdots x_n\in V(Q_n)$. 由于 Q_n 中与 x 相邻的顶点 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1$,即其分量取值 0 或 1 的两个 n 维向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 中分量有且仅有一个不同,其余 $(n-1)$ 个均相同,而且这样的 y 有 n 个,所以,Q_n 中与 x 关联的边有 n 条.

记 E_X 为 Q_n 中与 X 中顶点关联的边集,则

$$|E_X|=n|X|=\varepsilon(Q_n).$$

同样地,记 E_Y 为 Q_n 中与 Y 中顶点关联的边集,则

$$|E_Y|=n|Y|=\varepsilon(Q_n).$$

因而有

$$|X|=|Y|=\frac{1}{2}\nu(Q_n)=2^{n-1},$$

$$\varepsilon(Q_n)=n2^{n-1}.$$

□

例 1.2.2 用 $T_{k,\nu}$ 表示每个划分有 $m=\left\lfloor\frac{\nu}{k}\right\rfloor$ 或 $n=\left\lceil\frac{\nu}{k}\right\rceil$ 个顶点的完全 k 部分图. 证明:

(a) $\varepsilon(T_{k,\nu})=\binom{\nu-m}{2}+(k-1)\binom{m+1}{2}$;

(b) 对任何完全 k 部分图 G 均有 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{k,\nu})$,并且等号成立 $\Leftrightarrow G\cong T_{k,\nu}$.

证明

(a) 令 $\nu=km+r$, $0\leqslant r<k$, 则

$$r=\nu-km.$$

于是由 $T_{k,\nu}$ 的定义,我们有

$$\begin{aligned}
\varepsilon(T_{k,\nu})&=\binom{\nu}{2}-r\binom{m+1}{2}-(k-r)\binom{m}{2}\\
&=\frac{1}{2}[\nu(\nu-1)-rm(m+1)-(k-r)m(m-1)]\\
&=\frac{1}{2}[\nu(\nu-1)-2rm-km(m-1)]\\
&=\frac{1}{2}[\nu(\nu-1)-2m(\nu-km)-km(m-1)]\\
&=\frac{1}{2}(\nu-m)(\nu-m-1)+\frac{1}{2}(k-1)m(m+1)\\
&=\binom{\nu-m}{2}+(k-1)\binom{m+1}{2}.
\end{aligned}$$

(b)设 $G=K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ 是具有最大边数的完全 k 部分图,则

$$\varepsilon(G)=\binom{\nu}{2}-\sum_{l=1}^{k}\binom{n_l}{2}.$$

若 $G\not\cong T_{k,\nu}$,则存在 i 和 j,$i<j$ 使得 $n_i-n_j>1$. 考虑下列完全 k 部分图 G',其各部分的顶点数目分别为:

$$n_1,\cdots,n_{i-1},(n_i-1),n_{i+1},\cdots,n_{j-1},(n_j+1),n_{j+1},\cdots,n_k.$$

则

$$\begin{aligned}\varepsilon(G')&=\binom{\nu}{2}-\sum_{l=1\neq i,j}^{k}\binom{n_l}{2}-\binom{n_i-1}{2}-\binom{n_j+1}{2}\\&=\binom{\nu}{2}-\sum_{l=1}^{k}\binom{n_l}{2}+(n_i-n_j)-1\\&>\binom{\nu}{2}-\sum_{l=1}^{k}\binom{n_l}{2}=\varepsilon(G).\end{aligned}$$

矛盾于 G 的选取,所以 $G\cong T_{k,\nu}$. □

习 题

1.2.1 (a)证明:若 $D\cong H$,则 $\nu(D)=\nu(H)$ 且 $\varepsilon(D)=\varepsilon(H)$.

(b)举例说明(a)的逆命题不真.

1.2.2 证明:两个简单图 D 和 H 同构当且仅当存在双射 $\theta:V(D)\to V(H)$ 使得 $(x,y)\in E(D)\Leftrightarrow(\theta(x),\theta(y))\in E(H)$.

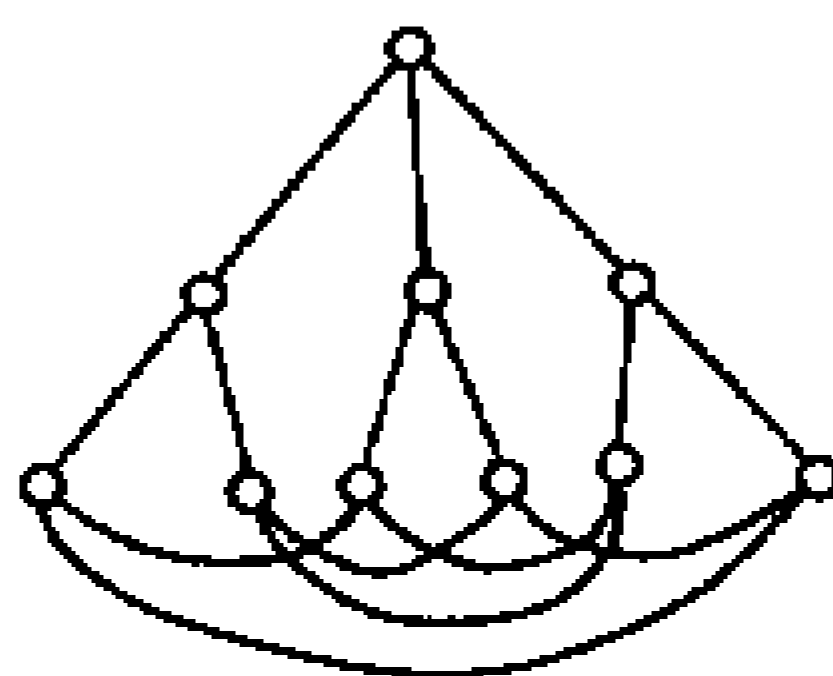
1.2.3 证明:

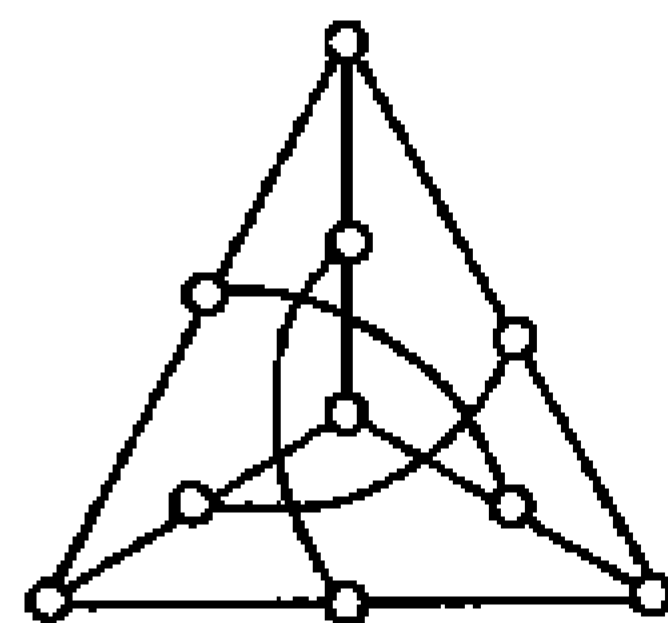
(a) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$;

(b)若 G 是简单 2 部分图,则 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}\nu^2$.

1.2.4 写出 k 部分图的定义,并且证明:$\varepsilon(K_n(k))=\frac{1}{2}k(k-1)n^2$.

1.2.5 证明:下列两个无向图都与 Petersen 图(见图 1.4)同构.





(习题 1.2.5)

1.2.6 简单图 D 的补图(complementary digraph)D^c 是指与 D 有相同的顶点集的简单图,并且 $(x,y)\in E(D^c)\Leftrightarrow(x,y)\notin E(D)$. 证明:

(a)任何竞赛图的补图是竞赛图;

(b)设 D 和 H 都是简单图,则 $D\cong H\Leftrightarrow D^c\cong H^c$.

1.2.7 简单图 D(或 G)称为自补的(self-complementary),如果 $D\cong D^c$(或 $G\cong G^c$). 证明:

(a)若 D 是自补图,则 $\varepsilon=\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$;

(b)若 G 是自补图,则 $\varepsilon=\frac{1}{4}\nu(\nu-1)$且 $\nu\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 4)$.

1.2.8 画出满足下列要求的图:

(a)两个 4 阶自补竞赛图; (b)一个 5 阶自补无向图.

1.3 图的顶点度

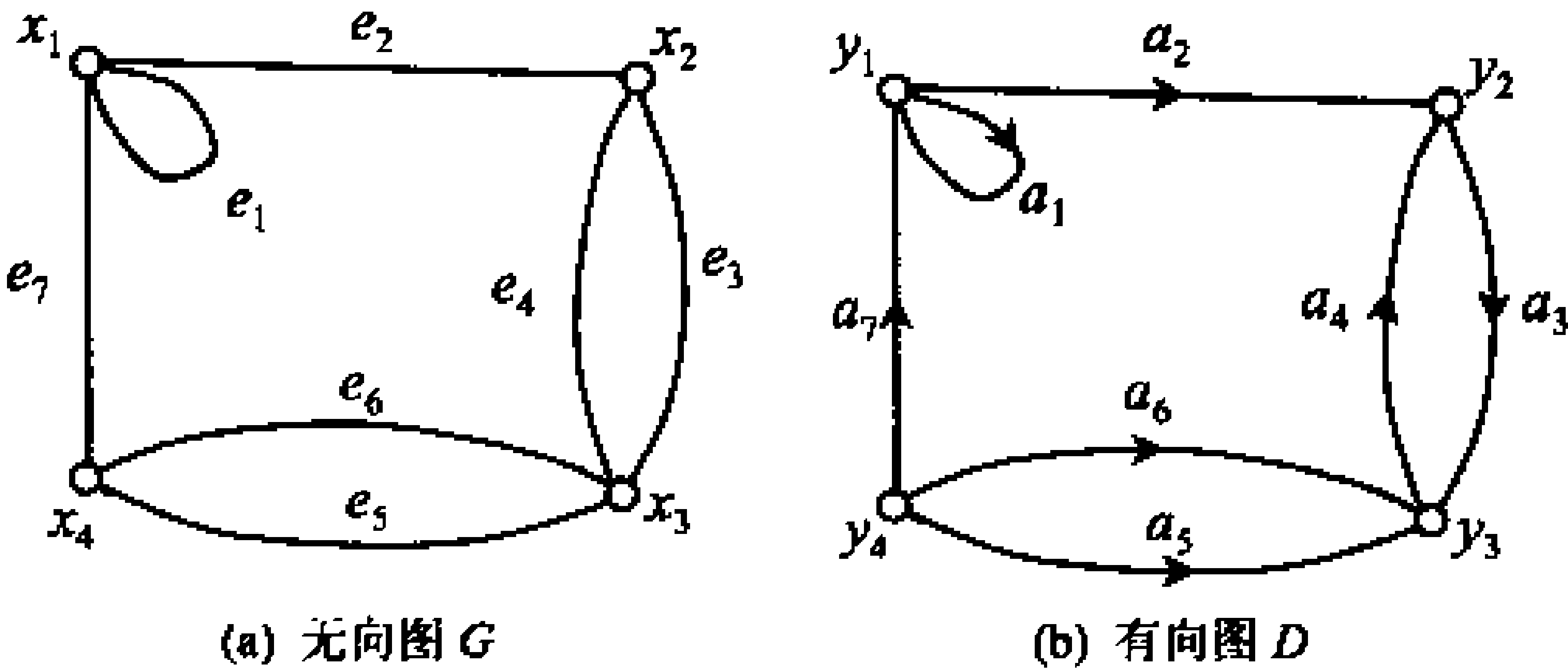
设 G 是无向图. $x\in V(G)$的**顶点度**(**vertex degree**)定义为 G 中与 x 关联边的数目(一条环要计算两次),记为 $d_G(x)$. 例如,图 1.9(a)所示的无向图 G 有

$d_G(x_1)=4$, $d_G(x_2)=3$, $d_G(x_3)=4$, $d_G(x_4)=3$.

顶点度为 d 的顶点称为 d **度点**(**d-degree vertex**). 零度点称为**孤立点**(**isolated vertex**). 用 $\Delta(G)$和 $\delta(G)$分别表示 G 的**最大**(**maximum**)和**最小**(**minimum**)**顶点度**. 即

$$\Delta(G)=\max\{d_G(x):\ x\in V(G)\},$$
$$\delta(G)=\min\{d_G(x):\ x\in V(G)\}.$$

例如,图 1.9(a)所示的图 G 有 $\Delta(G)=4$,$\delta(G)=3$.



(a) 无向图 G (b) 有向图 D

图 1.9

无向图 G 称为 k **正则的**(**k-regular**),如果对每个 $x\in V(G)$均有 $d_G(x)=k$. 例如,完全图 K_n 是$(n-1)$正则的;完全 2 部分图 $K_{n,n}$是 n 正则的.

设 D 是有向图. $y\in V(D)$的**顶点出度**(**vertex out-degree**)定义为 D 中以 y 为起点的有向边的数目,记为 $d_D^+(y)$. $y\in V(D)$的**顶点入度**(**vertex in-degree**)定义为 D 中以 y 为终点的有向边的数目,记为 $d_D^-(y)$. $y\in V(D)$的**顶点度**定义为 $d_D^+(y)+d_D^-(y)$,记为 $d_D(y)$. 例如,图 1.9(b)所示的有向图 D 有

$d_D^+(y_1)=2$, $d_D^+(y_2)=1$, $d_D^+(y_3)=1$, $d_D^+(y_4)=3$;

$d_D^-(y_1)=2$, $d_D^-(y_2)=2$, $d_D^-(y_3)=3$, $d_D^-(y_4)=0$;

$d_D(y_1)=4$, $d_D(y_2)=3$, $d_D(y_3)=4$, $d_D(y_4)=3$.

若 $d_D^+(y)=d_D^-(y)$，则称 y 为**平衡点**(balanced vertex)．每个顶点都为平衡点的有向图称为**平衡有向图**(balanced digraph)．完全有向图 K_n^* 是平衡图．用 $\Delta^+(D)$，$\Delta^-(D)$，$\delta^+(D)$，$\delta^-(D)$分别表示 D 的**最大和最小顶点出、入度**．即，

$$\Delta^+(D)=\max\{d_D^+(y):\ y\in V(D)\};$$
$$\Delta^-(D)=\max\{d_D^-(y):\ y\in V(D)\};$$
$$\delta^+(D)=\min\{d_D^+(y):\ y\in V(D)\};$$
$$\delta^-(D)=\min\{d_D^-(y):\ y\in V(D)\}.$$

这 4 个参数都等于 k 的图称为 **k 正则有向图**(k-regular digraph)．

设 G 是 2 部划分为$\{X,Y\}$的 2 部分无向图．容易看出 G 的边数 $\varepsilon(G)$ 与顶点度之间的下列关系：

$$\varepsilon(G)=\sum_{x\in X}d_G(x)=\sum_{y\in Y}d_G(y), \tag{1.1}$$
$$2\varepsilon(G)=\sum_{x\in V(G)}d_G(x).$$

对于一般的图 G 或 D，其边数与顶点度之间的关系又如何呢？考察图 1.9 所示的图，我们可以看到 G 和 D 的各顶点度之和是其边数的 2 倍，而且 D 的出度和入度之和都等于其边数．事实上，这个结论对一般的图也是成立的．

定理 1.1　对任何有向图 D 均有

$$\sum_{x\in V}d_D^+(x)=\sum_{x\in V}d_D^-(x)=\varepsilon(D).$$

证明　设 D 是有向图，$V=V(D)$．考虑 D 的伴随 2 部分图 G，它的 2 部划分为$\{X,Y\}$．于是 $\varepsilon(D)=\varepsilon(G)$．由于

$$d_G(x')=d_D^+(x),\quad d_G(x'')=d_D^-(x),\quad \forall\, x\in V(D),$$

所以由(1.1)式，有

$$\varepsilon(G)=\sum_{x'\in X}d_G(x')=\sum_{x\in V}d_D^+(x),$$
$$\varepsilon(G)=\sum_{x''\in Y}d_G(x'')=\sum_{x\in V}d_D^-(x),$$

即有
$$\varepsilon(D)=\varepsilon(G)=\sum_{x\in V}d_D^+(x)=\sum_{x\in V}d_D^-(x).$$
□

推论 1.1.1 (Euler，1736)　**对任何无向图 G 均有**

$$\sum_{x\in V}d_G(x)=2\varepsilon(G).$$

证明　设 D 是G 的对称有向图，则 $\varepsilon(D)=2\varepsilon(G)$．由于对每个 $x\in V$，均有 $d_G(x)=d_D^+(x)=d_D^-(x)$，所以由定理 1.1，

$$\sum_{x\in V}d_G(x)=\sum_{x\in V}d_D^+(x)=\sum_{x\in V}d_D^-(x)=\varepsilon(D)=2\varepsilon(G)$$
□

推论 1.1.2　任何无向图 G 都有偶数个奇度点．

证明 设 V_o 和 V_e 分别为 G 中奇度点集和偶度点集. 由推论 1.1.1 知

$$\sum_{x\in V_o} d_G(x) + \sum_{x\in V_e} d_G(x) = 2\varepsilon(G).$$

上式的右端和左端中的第二项均为偶数,因此左端的第一项也为偶数. 由于当 $x \in V_o$ 时,$d_G(x)$为奇数,所以$|V_o|$为偶数. □

下面几个记号和术语也常用到,我们必须熟悉它们.

设 D 是有向图,S 和 T 是 $V(D)$中两个不交的非空真子集,用 $E_D(S,T)$表示 D 中起点在 S 而终点在 T 的边集,并且令 $E_D[S,T]=E_D(S,T)\cup E_D(T,S)$. 当所考虑的图只有一个时,就分别简记$E_D(S,T)$和 $E_D[S,T]$为(S,T)和$[S,T]$. 若 $T=\bar{S}=V\setminus S$, 则简记$E_D(S,\bar{S})$为 $E_D^+(S)$;$E_D(\bar{S},S)$为 $E_D^-(S)$;$E_D[S,\bar{S}]$为 $E_D[S]$. 记 $d_D^+(S)=|E_D^+(S)|$, $d_D^-(S)=|E_D^-(S)|$.

例如,在图 1.9 所示的图 D 中,令 $S=\{y_1,y_2\}$,则 $E_D^+(S)=(S,\bar{S})=\{a_3\}$, 而 $E_D^-(S)=(\bar{S},S)=\{a_4,a_7\}$,$E_D[S]=(S,\bar{S})\cup(\bar{S},S)=\{a_3,a_4,a_7\}$,$d_D^+(S)=1$, $d_D^-(S)=2$.

用 $N_D^+(S)$表示 $E_D^+(S)$中边的终点集;用 $N_D^-(S)$表示 $E_D^-(S)$中边的起点集. 例如,在上面的例子中,$N_D^+(S)=\{y_3\}$,$N_D^-(S)=\{y_3,y_4\}$. $N_D^+(S)$和 $N_D^-(S)$分别称为 S 的**外邻集**(**out-neighbour set**)和**内邻集**(**in-neighbour set**). $N_D^+(S)$和 $N_D^-(S)$中顶点分别称为 S 的**外邻点**(**out-neighbour vertex**)和**内邻点**(**in-neighbour vertex**). 若 $S=\{x\}$,则分别简记 $N_D^+(\{x\})$和 $N_D^-(\{x\})$为 $N_D^+(x)$和 $N_D^-(x)$. 显然,若顶点 x 处无环,则 $d_D^+(x)=|E_D^+(x)|$且 $d_D^-(x)=|E_D^-(x)|$. 若 D 是简单图,则有 $d_D^+(x)=|N_D^+(x)|$且 $d_D^-(x)=|N_D^-(x)|$.

同样可以理解无向图的类似记号 $E_G[S]$,$[S,T]$和 $N_G(S)$,并称 $N_G(S)$为 S 的**邻集**(**neighbour set**). $N_G(S)$中顶点称为 S 的**邻点**(**neighbour vertex**).

例 1.3.1 设G是简单无向图且不含三角形. 证明: $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}\nu^2$.

证明 若 G 是空图,则 $\varepsilon=0$,结论成立. 下设 G 是非空图. 任取 $xy\in E(G)$. 由于 G 是简单图且不含三角形,所以

$$(d_G(x)-1)+(d_G(y)-1)\leqslant\nu-2,$$

即

$$d_G(x)+d_G(y)\leqslant\nu.$$

上式两边对 G 中所有的边求和得

$$\sum_{x\in V} d_G^2(x) \leqslant \nu\varepsilon.$$

由 Cauchy 不等式和推论 1.1.1 有

$$\nu\varepsilon \geqslant \sum_{x\in V} d_G^2(x) \geqslant \frac{1}{\nu}\Big(\sum_{x\in V} d_G(x)\Big)^2 = \frac{4}{\nu}\varepsilon^2.$$

即得 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}\nu^2$. □

例 1.3.2　设 G 是简单无向图且 $G\cong G^c$，$\nu\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$．证明：$G$ 中含奇数个 $\frac{1}{2}(\nu-1)$ 度点.

证明　令 V_o 和 V_e 分别为 G 中奇度点集和偶度点集．由推论 1.1.2 知 $|V_o|$ 为偶数．由于 $\nu\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$，所以 ν 必为奇数．因而 $|V_e|$ 为奇数且 $\frac{1}{2}(\nu-1)$ 为偶数.

设 $x\in V_e$．若 $d_G(x)\neq\frac{1}{2}(\nu-1)$，则由于 $G\cong G^c$，所以必存在 $y\in V(G)$ 使得 $d_G(y)=d_{G^c}(x)=(\nu-1)-d_G(x)$ 为偶数，即 $y\in V_e$，$y\neq x$，且 $d_G(y)\neq\frac{1}{2}(\nu-1)$．这说明 V_e 中其顶点度不为 $\frac{1}{2}(\nu-1)$ 的顶点是成对出现．于是 G 中度为 $\frac{1}{2}(\nu-1)$ 的顶点数目为奇数. □

习　题

1.3.1　证明：对任何无向图均有 $\delta\leqslant2\varepsilon/\nu\leqslant\Delta$.

1.3.2　证明：任何 $\nu(\geqslant2)$ 阶简单无向图总存在其顶点度相等的两顶点.

1.3.3　某一个会议有 $\frac{1}{2}k(k+1)+1$ 个人参加，其中每两个不认识的人恰有两个共同的熟人，而每两个相识的人都不具有共同的熟人．证明：每一个与会者恰有 k 个熟人.

1.3.4　设 D 为竞赛图．证明：

$$\sum_{x\in V}d_D^+(x)^2=\sum_{x\in V}d_D^-(x)^2=\sum_{x\in V}(\nu-d_D^-(x))^2-\nu^2.$$

1.3.5　证明：

(a) 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 $k(\geqslant1)$ 正则 2 部分图，则 $|X|=|Y|$；

(b) 任何 k 正则竞赛图均有 $\nu=2k+1$.

1.3.6　设 X,X' 都是 $V(D)$ 的非空真子集．证明：

(a) $d^-(X\cap X')+d^+(X\cup X')\leqslant d^+(X)+d^+(X')$；

(b) $d^-(X\cap X')+d^-(X\cup X')\leqslant d^-(X)+d^-(X')$.

1.3.7　证明：九位数学家在一次国际会议上相遇，他们之中的任意三个人中，至少有二人会说同一种语言．如果每位数学家最多只能说三种语言，则至少有三位数学家能用同一种语言交谈.

1.4　图的运算

设 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$ 和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$ 是两个图．若 $V(H)\subseteq$

$V(D)$，$E(H)\subseteq E(D)$，且 ψ_H 是 ψ_D 在 $E(H)$ 上的限制，即 $\psi_H=\psi_D|E(H)$，则称 H 为 D 的**子图**(**subgraph**)，记为 $H\subseteq D$. 称 D 是 H 的**母图**(**supergraph**). 若 $H\subseteq D$ 并且 $V(H)=V(D)$，则称 H 为 D 的**支撑子图**(**spanning subgraph**). 若 $H\subseteq D$ 且 $H\neq D$，则称 H 为 D 的**真子图**(**proper subgraph**)，记为 $H\subset D$.

设 V' 是 $V(D)$ 的非空真子集，以 V' 为顶点集并以 D 中两端点均在 V' 中的边为边集的子图称为 D 的**由 V' 导出的子图**，简称**导出子图**(**induced subgraph**)，记为 $D[V']$. 导出子图 $D[V\setminus V']$ 记为 $D-V'$. 若 $V'=\{x\}$，则简记 $D-\{x\}$ 为 $D-x$.

设 E' 是 $E(D)$ 的非空子集. 以 E' 为边集并以 D 中由 E' 中边的端点为顶点集的子图称为 D 的**由 E' 导出的子图**，记为 $D[E']$. $D-E'$ 表示从 D 中删去 E'（但不删去端点）后得到的子图.

图 1.10 画出了这些不同类型的子图.

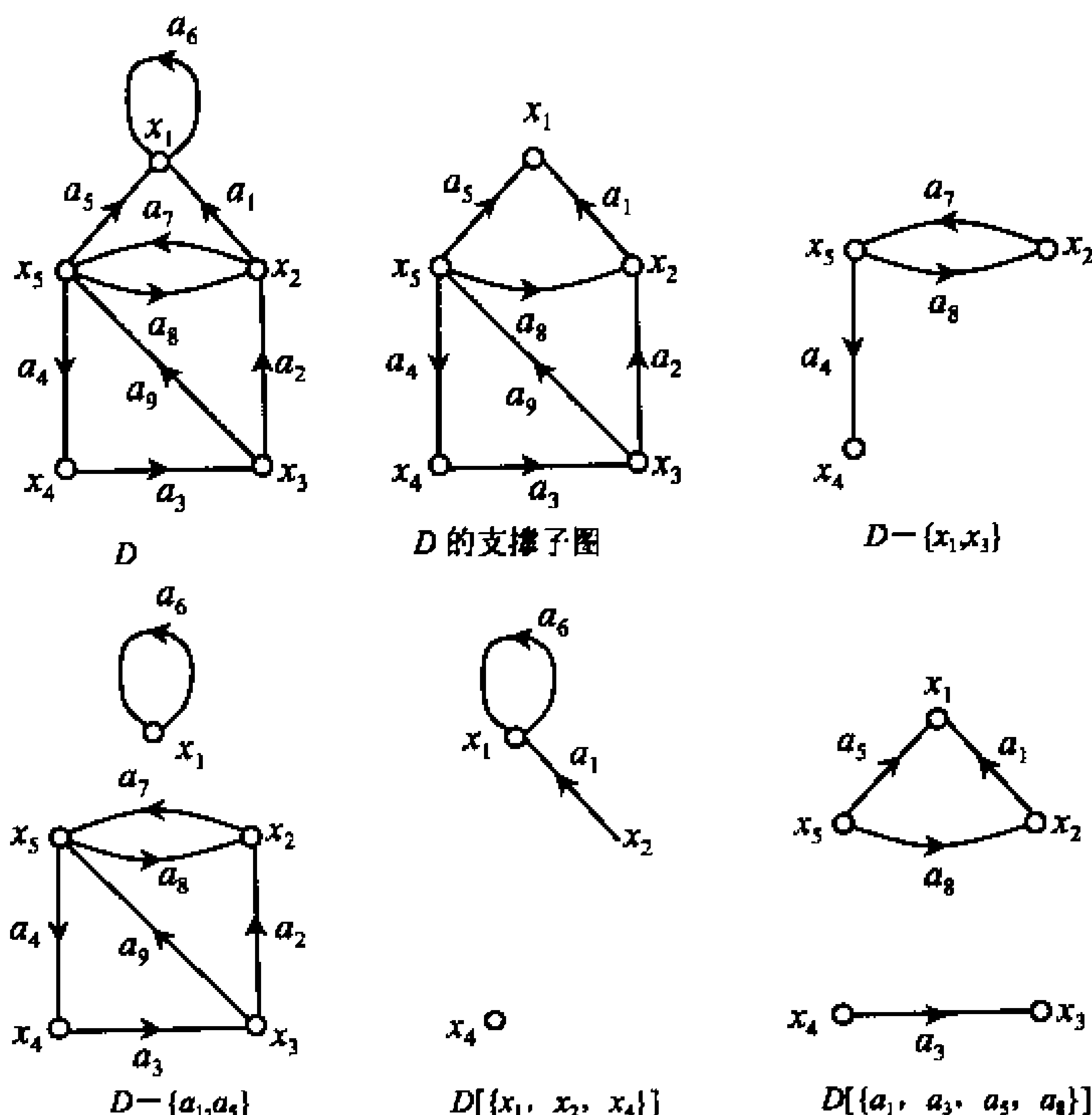


图 1.10 图 D 和它的子图

设 $D_1\subseteq D$，$D_2\subseteq D$. 若 $V(D_1)\cap V(D_2)=\varnothing$，则称 D_1 和 D_2 是**点不交的**(**vertex-disjoint**)；若 $E(D_1)\cap E(D_2)=\varnothing$，则称 D_1 和 D_2 是**边不交的**(**edge-disjoint**). D_1 和 D_2 的**并**(**union**) $D_1\cup D_2$ 是子图 H，其中 $V(H)=V(D_1)\cup V(D_2)$ 且 $E(H)=E(D_1)\cup E(D_2)$. 若 D_1 和 D_2 点不交，则记 $D_1\cup D_2=D_1+D_2$. 若对每个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均有 $D_i\cong H$，则记 $D_1+D_2+\cdots+D_n=nH$. 若 D_1 和 D_2 边不交，则记

$D_1\cup D_2=D_1\oplus D_2$. 若 $V(D_1)\cap V(D_2)\neq\varnothing$,则类似可以定义 D_1 和 D_2 的交(intersection)$D_1\cap D_2$. 这些例子在图 1.11 中. 非空图 D 的线图(line digraph)$L(D)$ 是以 $E(D)$ 为顶点集的图,并且若 $a_i,a_j\in E(D)$,则 $(a_i,a_j)\in E(L(D))\Leftrightarrow$在 D 中,a_i 的终点是 a_j 的起点.

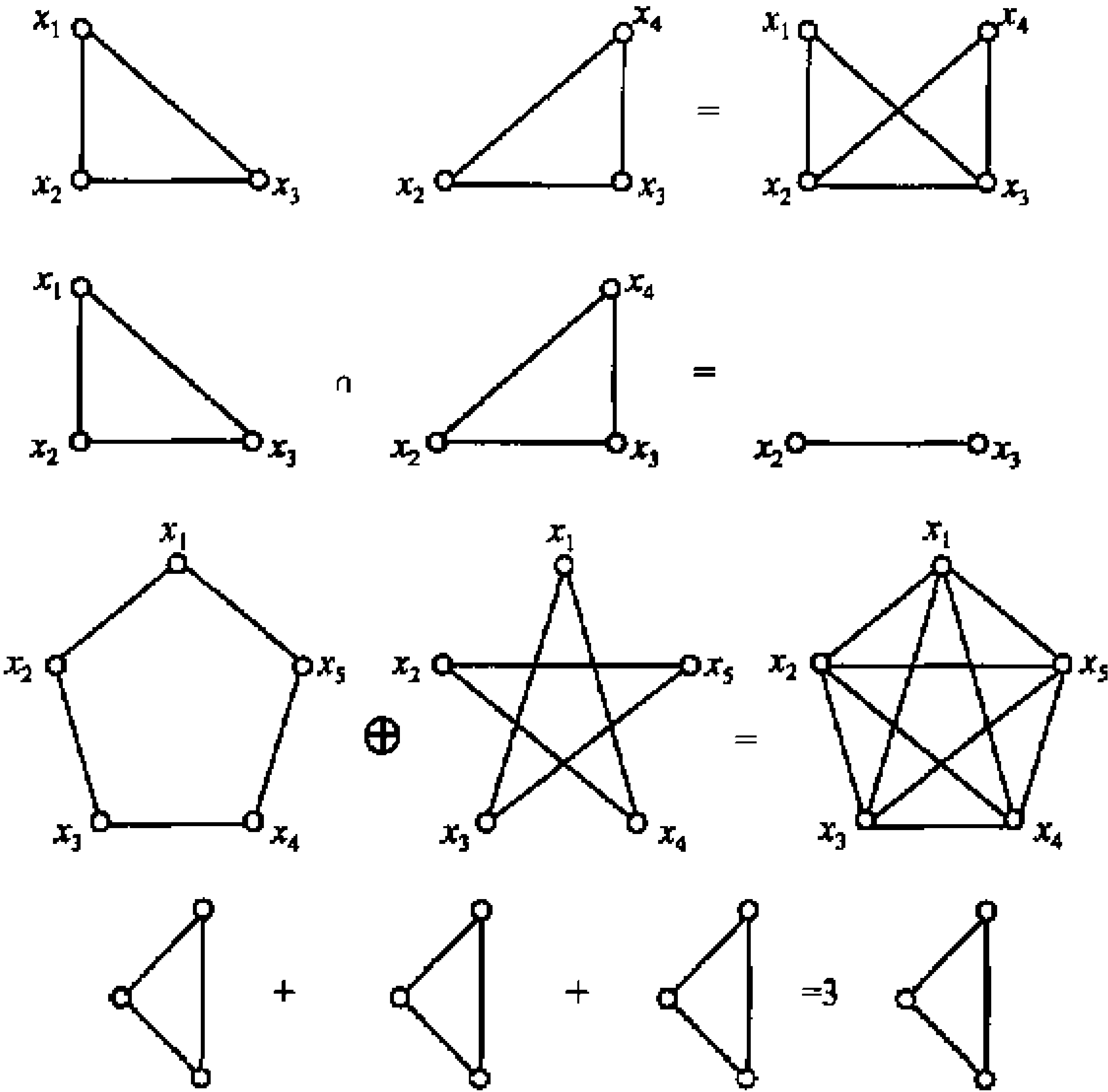


图 1.11 图的并与交运算

图 1.12 列举了这样的例子.

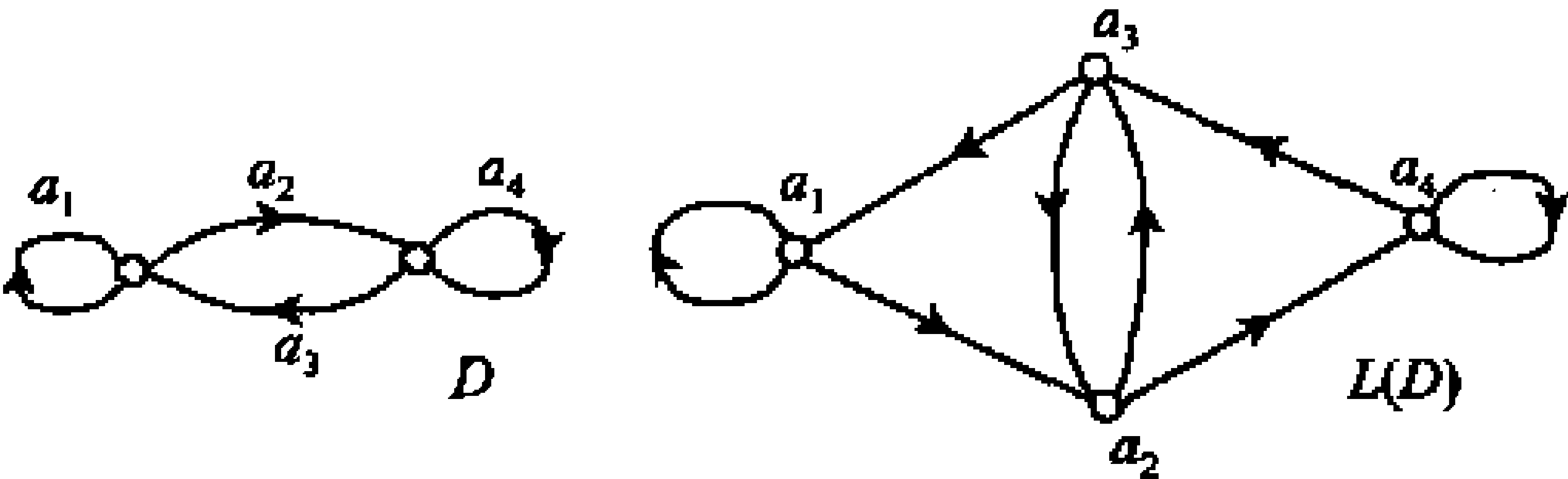


图 1.12 有向图 D 和它的线图 $L(D)$

例 1.4.1 设 D 是平衡有向图,S 是 $V(D)$的非空真子集,$\bar{S}=V(D)\setminus S$. 若用$(S,\bar{S})$表示 D 中其起点在 S 而终点在 $\bar{S}$ 的边集,则有 $|(S,\bar{S})|=|(\bar{S},S)|$.

证明 令 $H=D[S]$. 由定理 1.1 知

$$\sum_{x\in S}d_H^+(x)=\sum_{x\in S}d_H^-(x). \tag{1.2}$$

由于 D 是平衡有向图，即对任何 $x\in V(D)$ 均有 $d_D^+(x)=d_D^-(x)$，所以由定理 1.1 和(1.2)式，有

$$\begin{aligned}|(S,\bar{S})| &= \sum_{x\in S}d_D^+(x)-\sum_{x\in S}d_H^+(x)\\ &= \sum_{x\in S}d_D^-(x)-\sum_{x\in S}d_H^-(x)=|(\bar{S},S)|.\end{aligned}$$ □

例 1.4.2 设 G 是无环图，则 G 中存在 2 部分支撑子图 H 使对每个顶点 x 均有 $d_G(x)\leqslant 2d_H(x)$，因而有 $\varepsilon(G)\leqslant 2\varepsilon(H)$.

证明 令 H 是 G 中其边数最大的 2 部分支撑子图，H 的 2 部划分为 $\{X,Y\}$. 任取 $x\in V(G)$，不妨设 $x\in X$. 令

$$d=d_G(x)-d_H(x).$$

若 $d>d_H(x)$，则 $d_G(x)>2d_H(x)$. 令 $X'=X\{x\}$，$Y'=Y\cup\{x\}$，则可以得到以 $\{X',Y'\}$ 为 2 部划分的 2 部分子图 H'，且

$$\varepsilon(H')=\varepsilon(H)+d_G(x)-2d_H(x)>\varepsilon(H),$$

矛盾于 H 的最大性. 于是 $d\leqslant d_H(x)$. 所以，有

$$d_G(x)=d+d_H(x)\leqslant 2d_H(x).$$

上式两边对 V 中每个元素求和，再由推论 1.1.1 得 $\varepsilon(G)\leqslant 2\varepsilon(H)$. □

习 题

1.4.1 用图形分别表示出图 1.10 所示图 D 的下列子图：

$D-\{x_2,x_4\}$，　$D-\{a_2,a_4,a_5\}$，　$D[\{x_2,x_3,x_5\}]$.

1.4.2 用图形分别表示出图 1.10 所示支撑子图与子图 $D-\{a_1,a_2,a_7\}$ 的并和交.

1.4.3 非空无向图 G 的**线图**(**line graph**) $L(G)$ 是以 $E(G)$ 为顶点集的图，并且若 $e_i,e_j\in E(G)$，则 $e_ie_j\in E(L(G))\Leftrightarrow e_i$ 和 e_j 在 G 中相邻.

(a)画出图 1.9 中所示有向图 D 和无向图 G 的线图 $L(D)$ 和 $L(G)$.

(b)证明：任何图的线图中无平行边.

1.4.4 设 G 是 2 部分无向图，$\Delta=\Delta(G)$. 证明：

(a)存在 Δ 正则 2 部分图 H 使 $G\subseteq H$；

(b)若 G 是简单图，则存在 Δ 正则 2 部分简单图 F 使 $G\subseteq F$.

1.4.5 证明：设 G 是无环图，则 G 中存在 k 部分支撑子图 H 使对每个顶点 x 均有 $\left(1-\frac{1}{k}\right)d_G(x)\leqslant d_H(x)$，因而有 $\left(1-\frac{1}{k}\right)\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(H)$.

1.4.6 (a)证明：设 G 是简单无向图，$2\leqslant n<\nu-1$. 若 G 中任何 n 个顶点子集导出子图都有相同的边数，则 G 或为完全图或为空图.

(b)举例说明(a)中结论对有向图是不成立的.

1.4.7 设 D 是非空(有向或无向)图，$a\in E(D)$ 不是环，并设 a 的两端点为 x 和 y. 在 $D-a$

中将 x 和 y 重合为一个新顶点后所得到的图称为边 a **收缩图**(**contracted graph**)，记为 $D \cdot a$. 证明：

(a) $\nu(D \cdot a)=\nu(D)-1$；　(b) $\varepsilon(D \cdot a)=\varepsilon(D)-1$.

1.4.8 设 G_1 和 G_2 是两个点不交的无向图. G_1 和 G_2 的 **联**(**join**)$G_1 \vee G_2$ 是在 $G_1 \cup G_2$ 中把 G_1 的每个顶点与 G_2 的每个顶点之间用一条边连接起来所得到的无向图. 证明：

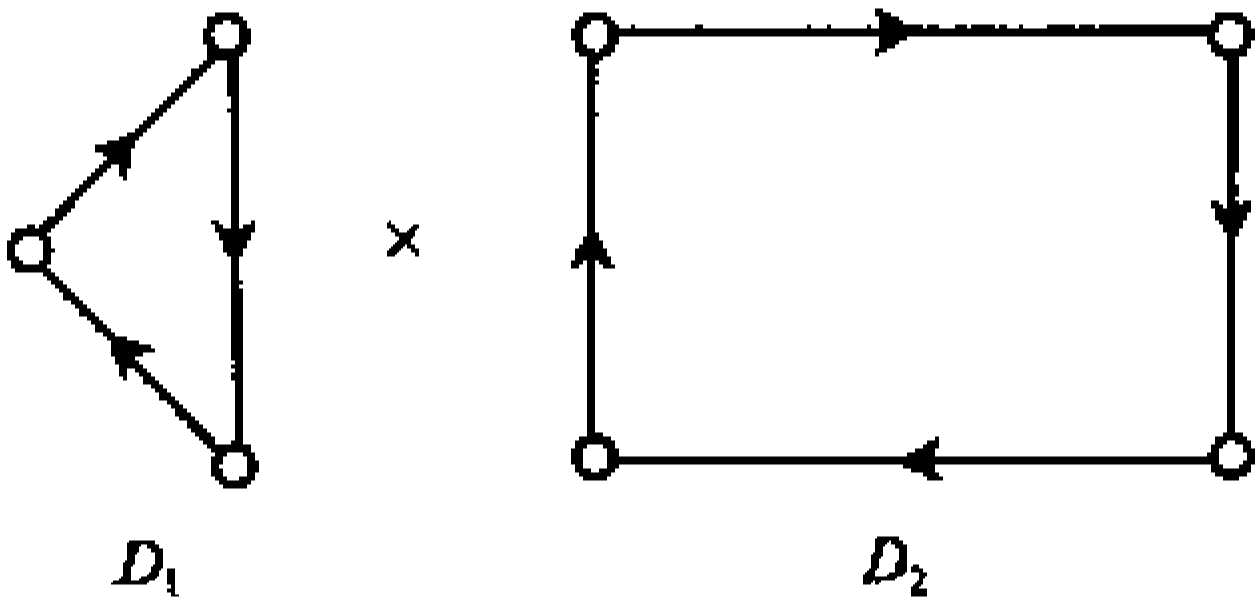
(a) $K_{m,n} \cong K_m^c \vee K_n^c$.

(b) $\nu(G_1 \vee G_2)=\nu(G_1)+\nu(G_2)$.

(c) $\varepsilon(G_1 \vee G_2)=\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+\nu(G_1)\nu(G_2)$.

1.4.9 设 D_1 和 D_2 是两个点不交的简单图. D_1 和 D_2 的**笛卡尔乘积**(**cartesian product**)$D_1 \times D_2$ 是一个简单图，其中 $V(D_1 \times D_2)=V(D_1)\times V(D_2)$，并且对 $x_1, y_1 \in V(D_1)$，$x_2, y_2 \in V(D_2)$，$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in E(D_1 \times D_2) \Leftrightarrow$ 或者 $x_1=y_1$ 且 $(x_2,y_2)\in E(D_2)$，或者 $x_2=y_2$ 且 $(x_1,y_1)\in E(D_1)$.

(a)画出下列两个图的笛卡尔乘积 $D_1 \times D_2$.



(习题 1.4.9)

(b)证明：

(i) $\nu(D_1 \times D_2)=\nu(D_1)\nu(D_2)$；

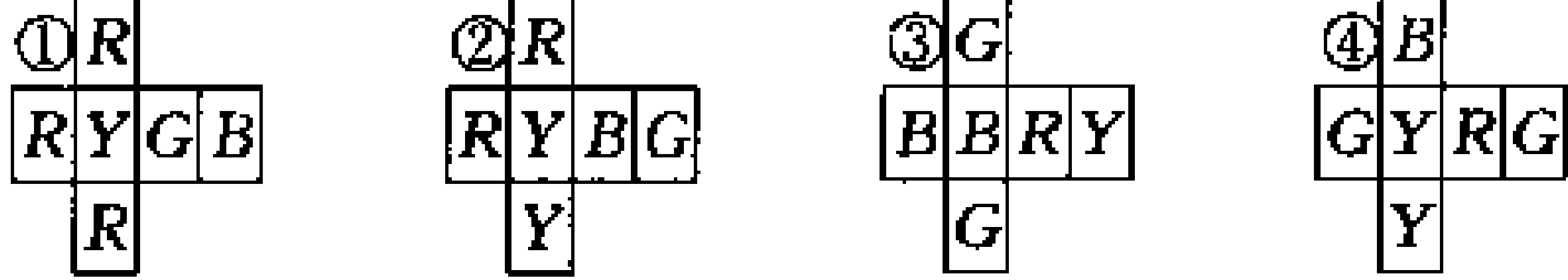
(ii) 设 $u=(x,y)\in V(D_1 \times D_2)$，$x \in V(D_1)$，$y \in V(D_2)$，则

$d^+_{D_1 \times D_2}(u)=d^+_{D_1}(x)+d^+_{D_2}(y)$，$d^-_{D_1 \times D_2}(u)=d^-_{D_1}(x)+d^-_{D_2}(y)$；

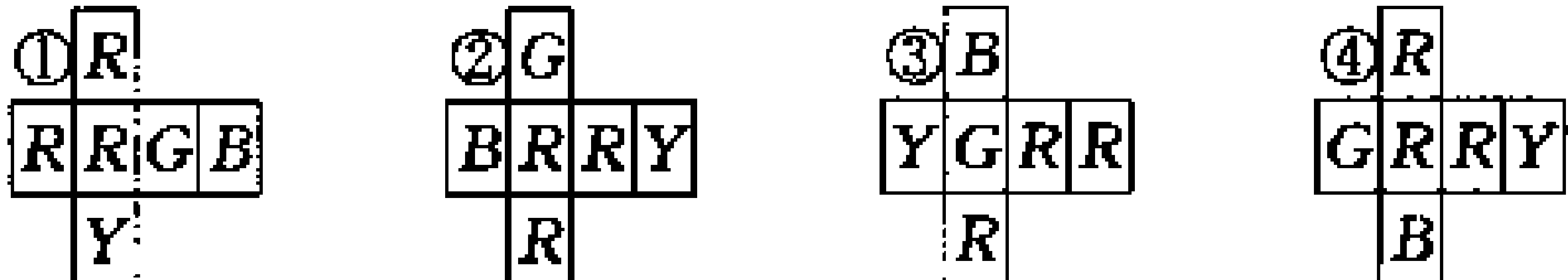
(iii) $\varepsilon(D_1 \times D_2)=\nu(D_1)\varepsilon(D_2)+\nu(D_2)\varepsilon(D_1)$.

(c)写出两个点不交的简单无向图 G_1 和 G_2 笛卡尔乘积 $G_1 \times G_2$ 的定义，并且证明：若 $n \geq 2$，则 $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$.

1.4.10 现有四个同样大小正方体，它们的六个面分别涂上红(R)、蓝(B)、绿(G)和黄(Y)四种颜色，如下图所示：



试将这四个正方体一个接一个地叠起来组成一个底为正方形的棱柱，使得每个侧面的四个正方形颜色各不相同. 若将每个正方体的六个面分别涂上下述四种颜色：



则能叠成每个侧面的四个正方形颜色各不相同的棱柱吗？

1.4.11 F. R. Ramsey(1930)证明了下述著名的 **Ramsey 定理**：对于任意正整数 k 和 l，存在正整数 r 使得任何 r 阶简单无向图 G，要么 G 含子图 K_k，要么 G 含子图 K_l. 使得定理成立的最小正整数 $r(k,l)$ 称为 **Ramsey 数**. 证明：

(a) $r(k,l)=r(l,k)$, $r(1,k)=1$, $r(2,k)=k$, $r(3,3)=6$;

(b) $r(k,l)\leqslant r(k,l-1)+r(k-1,l)$，其中 $k\geqslant 3, l\geqslant 3$，而且当 $r(k,l-1)$ 和 $r(k-1,l)$ 都为偶数时，严格不等式成立；

(c) $r(3,4)=9$, $r(3,5)=14$, $r(4,4)=18$.

（目前已求出 $r(3,6)=18$, $r(3,7)=23$, $r(3,8)=28$, $r(3,9)=36$，其余的 $r(k,l)$ 值均尚未解决，见李乔(1991)）

1.4.12 证明：设 G 是顶点集 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$ 且不含子图 K_{k+1} 的简单无向图，则存在顶点集为 V 的完全 k 部分图 H 使得对每个 $i(1\leqslant i\leqslant \nu)$ 均有 $d_G(x_i)\leqslant d_H(x_i)$ 并且等号成立 $\Leftrightarrow G\cong H$.　(P. Erdös, 1970)

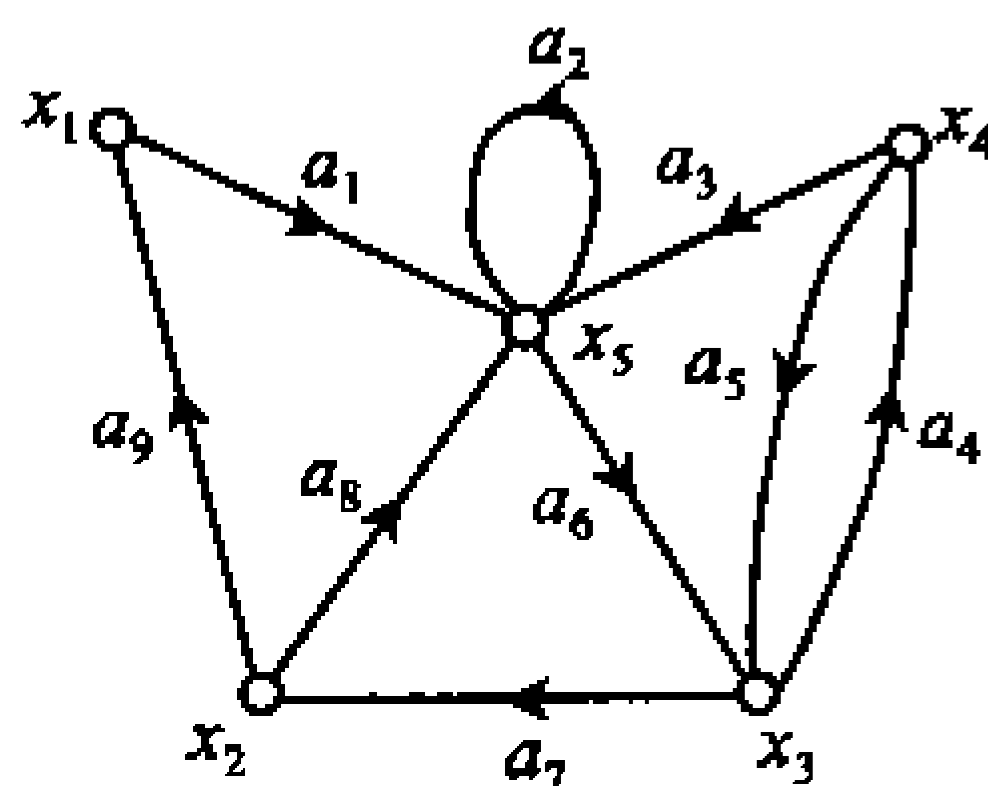
1.4.13 证明：(**Turán 极值定理**)　设 G 是 ν 阶并且不含 K_{k+1} 的简单无向图，则 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{k,\nu})$，并且等号成立 $\Leftrightarrow G\cong T_{k,\nu}$.　(P. Turán, 1941)

1.5 路与连通

图 D(或 G)中连接顶点 x 和 y 且**长度**(**length**)为 k 的**链**(**chain** 或 **walk**)W，记为 xy **链**，是指顶点 x_i 和边 a_j 交错出现的序列

$$W = x_{i_0}(=x)a_{i_1}x_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}x_{i_k}(=y),$$

其中与边 a_{i_j} 相邻的两顶点 $x_{i_{j-1}}$ 和 x_{i_j} 正好是 a_{i_j} 的两个端点(可能有 $x_{i_{j-1}}=x_{i_j}$). x 和 y 称为 W 的**端点**(**end-vertices**)，其余的顶点称为**内部点**(**internal vertices**). W 中边的数目 k 称为 W 的**长度**. 例如，在图 1.13 所示的图 D 中



$W=x_1a_1x_5a_2x_5a_3x_4a_3x_5a_8x_2a_7x_3$
$T=x_1a_1x_5a_2x_5a_8x_2a_7x_3$
$P=x_1a_1x_5a_8x_2a_7x_3$
$W'=x_1a_1x_5a_2x_5a_6x_3a_4x_4a_3x_5a_8x_3$
$T'=x_1a_1x_5a_2x_5a_6x_3$
$P'=x_1a_1x_5a_6x_3$

图 1.13

顶点和边交错出现的序列

$$W = x_1a_1x_5a_2x_5a_3x_4a_3x_5a_8x_2a_7x_3$$

是 D 中一条长度为 6 的 x_1x_3 链. 边互不相同的链称为**迹**(**trail**). 上例中的链 W 不是迹，因为边 a_3 出现两次，而

$$T = x_1a_1x_5a_2x_5a_8x_2a_7x_3$$

是 D 中一条长度为 4 的 x_1x_3 迹. 点不相同的迹称为**路**(**path**). 上例中的 W 和 T 都不是路,因为 x_5 在其中出现两次,而

$$P = x_1a_1x_5a_8x_2a_7x_3$$

是 D 中一条长度为 3 的 x_1x_3 路. 两端点相同的链(迹)称为**闭**(**closed**)**链**(**迹**).

设 W 是有向图 D 中 xy 链(迹、路),指定 W 的方向从 x 到 y. 若 W 中所有边的方向与此方向一致,则称 W 为 D 中从 x 到 y 的**有向链**(**迹**、**路**),记为(x,y)链(迹、路). 例如,在图 1.13 所示的有向图 D 中,

$$W' = x_1a_1x_5a_2x_5a_6x_3a_4x_4a_3x_5a_6x_3$$

是一条长度 6 的(x_1,x_3)链; $T' = x_1a_1x_5a_2x_5a_6x_3$ 是一条长度为 3 的(x_1,x_3)迹; $P' = x_1a_1x_5a_6x_3$ 是一条长度为 2 的(x_1,x_3)路.

从上面的例子,链 W(或 W')包含迹 T(或 T'),而迹 T(或(T')包含路 P(或 P'). 这些对一般情形也是对的(习题 1.5.1).

W 的子序列 $x_{i_j}a_{i_{j+1}}x_{i_{j+1}}\cdots a_{i_l}x_{i_l}$ 称为 W 的(x_{i_j},x_{i_l})**段**(**section**),记为 $W(x_{i_j},x_{i_l})$.

对于简单图,长度为 k 的链 W 由它的顶点序列 $x_{i_0}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ 所唯一确定,故可以简记 $W=(x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$.

图中具有最大长度的路称为**最长路**(**longest path**). 包含图中每个顶点的路称为 **Hamilton 路**. 长度为$(n-1)$的路通常记为 P_n.

例 1.5.1 设 G 是简单无向图,则 G 中必含有一条长度至少为 $\delta(=\delta(G))$ 的路.

证明 令 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_k)$是 G 中一条最长路,则

$$N_G(x_0) \subseteq \{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$$

(否则矛盾于 P 的最长性). 由于 $d_G(x_0)\geqslant\delta(G)=\delta$,所以

$$k \geqslant |N_G(x_0)| = d_G(x_0) \geqslant \delta.$$ □

定理 1.2(Rédei,1934) **每个竞赛图都含 Hamilton 有向路.**

证明 设 D 是 ν 阶竞赛图,并设 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 D 中最长有向路. 若 $\nu\leqslant2$,则结论显然成立. 下设 $\nu\geqslant3$,并设 P 不是 *Hamilton* 路,则 $n<\nu$. 于是,存在 $x\in V(D)\setminus V(P)$使$(x,x_n)\in E(D)$,而且$(x_1,x)\in E(D)$. 因而必存在 $i(1<i\leqslant n)$使$(x_{i-1},x),(x,x_i)\in E(D)$(参见图1.14). 于是$(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$是 D 中一条比 P 长 1 的有向路,矛盾于 P 的最长性. 所以,P 是 D 中 *Hamilton* 有向路. □

设 $x,y\in V$. 若 D(或 G)中存在连接 x 和 y 的路,则称 x 和 y 是**连通的**(**connected**). 容易验证,V 中元素之间的连通关系是 V 上的等价关系. 这种等价关系将 V 分成等价类 $V_1,\cdots,V_\omega$. x 和 y 属于同一类 $V_i\Leftrightarrow x$ 和 y 是连通的. 子图 D

$[V_i]$(或 $G[V_i]$)($1\leqslant i\leqslant\omega$)称为 D(或 G)的**连通分支**(**connected component**),ω 称为 D(或 G)的**连通分支数**(**number of components**),记为 $\omega=\omega(D)$(或 $\omega(G)$). 若 $\omega(D)=1$(或 $\omega(G)=1$),则称 D(或 G)为**连通图**(**connected digraph orgraph**). 反之称为**非连通图**(**disconnected graph**).

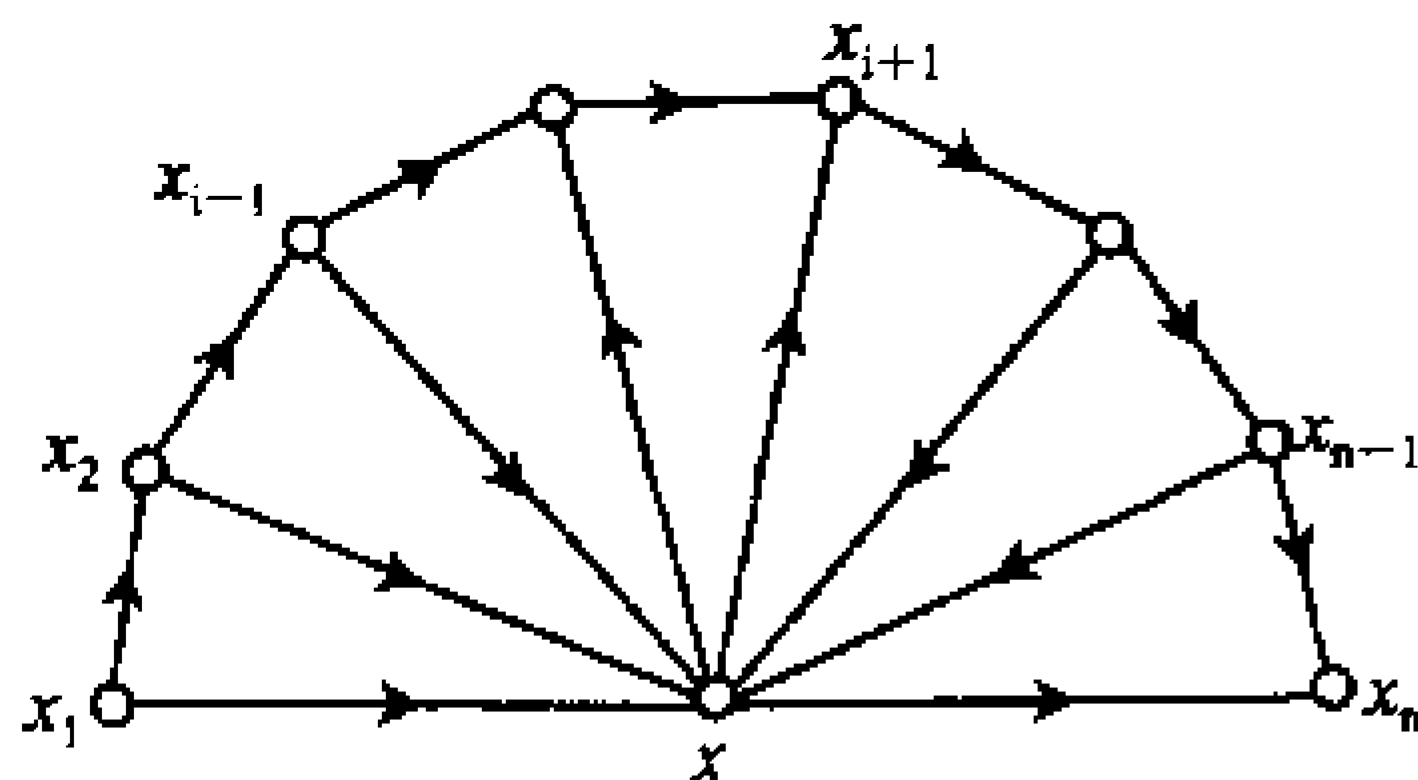
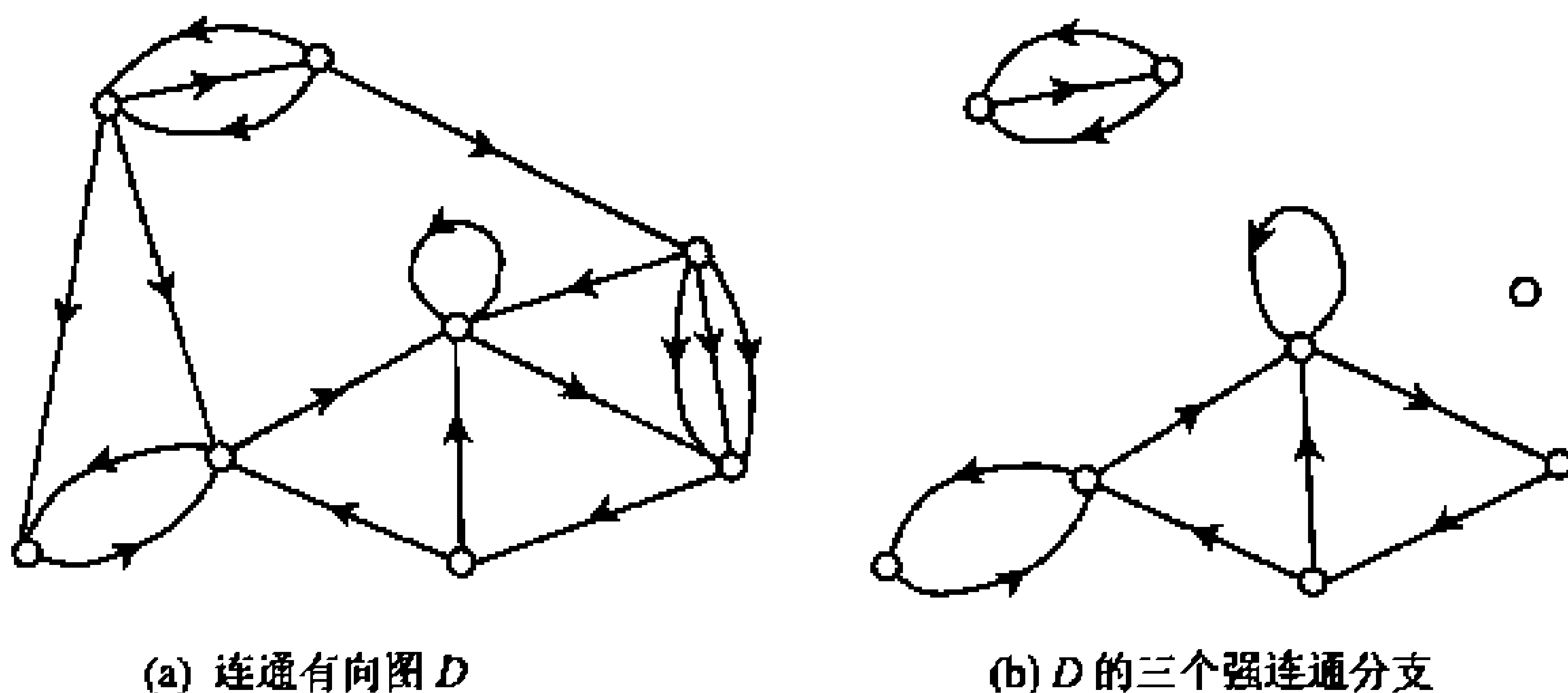


图 1.14

例如,图 1.15 所示的两个图,其中(a)中图是连通的,而(b)中图是非连通的,因为它有 3 个连通分支.



(a) 连通有向图 D　　(b) D 的三个强连通分支

图 1.15

我们容易证明(习题 1.5.4):D(或 G)是连通的⇔对 V 的任何非空真子集 S 均有 $[S,\bar{S}]\neq\varnothing$.

例 1.5.2 设 G 是 ν 阶简单无向图,$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$ 并且 $d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(x_\nu)$. 若对任何自然数 $k(1\leqslant k\leqslant\nu-d_G(x_\nu)-1)$ 均有 $d_G(x_k)\geqslant k$,则 G 是连通的.

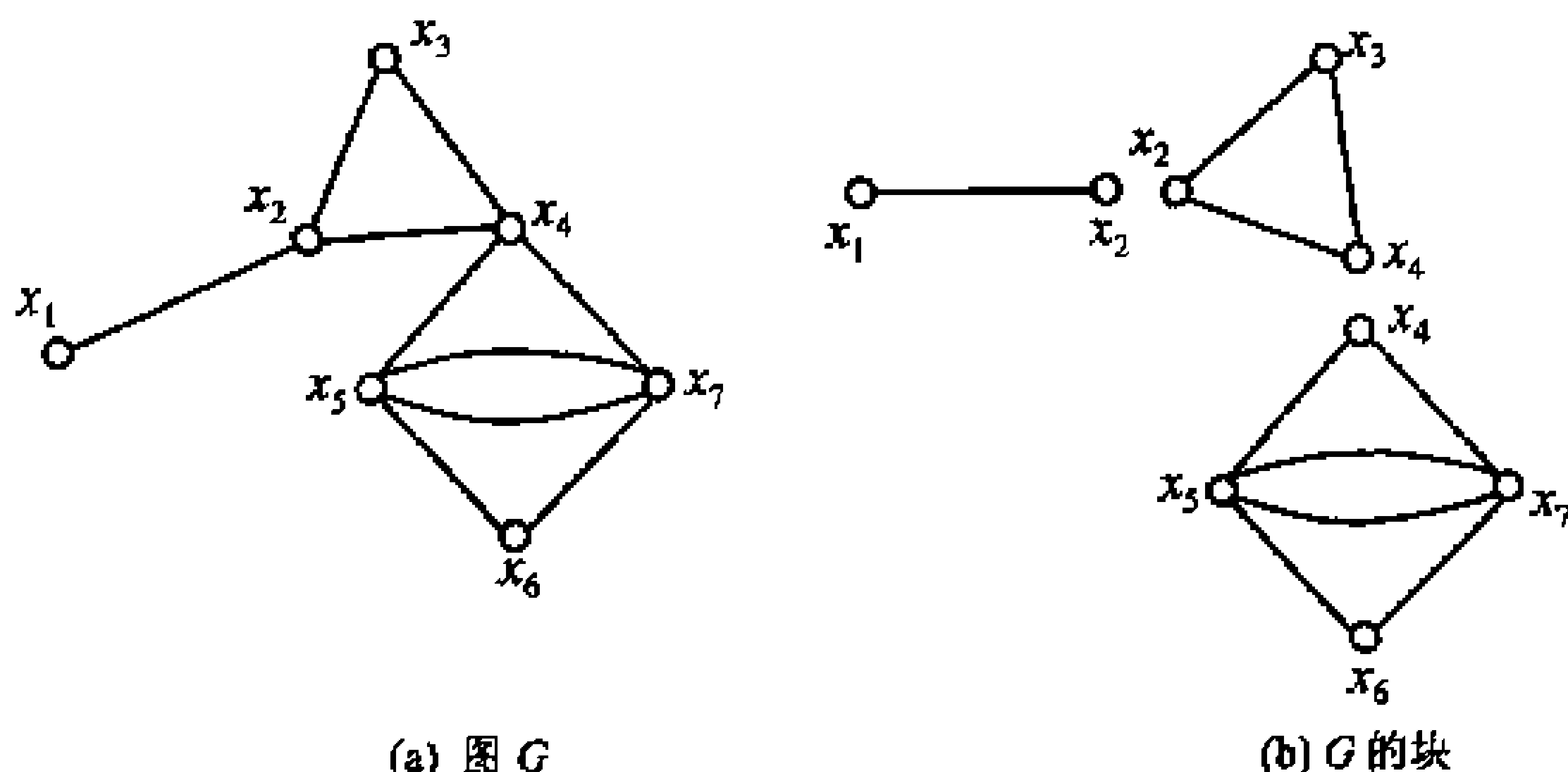
证明 (反证法) 若 G 是非连通的,则存在非空真子集 $S\subset V(G)$ 使得 $[S,\bar{S}]=\varnothing$. 不妨设 $x_\nu\in\bar{S}$,并且令 $k=|S|$. 由于 G 是简单图,所以 $|\bar{S}|\geqslant d_G(x_\nu)+1$ 并且

$$k=|S|=\nu-|\bar{S}|\leqslant\nu-d_G(x_\nu)-1,$$

即对每个 $x\in S$ 均有 $d_G(x)\leqslant|S|-1=k-1$. 由假定 $x_k\in\bar{S}$,所以 S 中最多只含 $(k-1)$ 个顶点. 矛盾于 $|S|=k$,故 G 是连通的. □

设 D 无环,$x\in V(D)$,$a\in E(D)$. 若 $\omega(D-x)>\omega(D)$,则称 x 为**割点**(**cut vertex**);若 $\omega(D-a)>\omega(D)$,则称 a 为**割边**(**cut edge**). 例如,在图 1.16(a)所示

的图 G 中，x_2 和 x_4 都是割点；x_1x_2 是割边. 不含割点的连通图称为**块(block)**. D 中不含割点的极大连通子图称为**图 D 的块**. 每一个图都可以表示成它的块之并. 如图 1.16 所示，(a)是图 G，而(b)是 G 的所有的块.



(a) 图 G　　(b) G 的块

图 1.16

注意到连通、割点、割边和块的概念都与图中边的方向无关. 所以在研究它们的性质时，只须考虑无向图.

例 1.5.3　非平凡连通图至少有两个非割点.

证明　设 $P=x_0e_1x_1e_2x_2\cdots x_{k-1}e_kx_k$ 是图 G 中一条最长路. 由于 G 是非平凡连通图，所以 $k\geqslant 1$. 我们断定 P 的两端点 x_0 和 x_k 都是非割点. 若不然，设 x_0 是割点. 由于 $\omega(G-x_0)>\omega(G)$，所以 $G-x_0$ 至少有两

个连通分支. 设 G_0 和 G_1 是 $G-x_0$ 的两个连通分支. 不妨设 x_1 所在的分支为 G_1，并取 $y\in N_G(x_0)\cap V(G_0)$. 因而 G 中存在以 x_0 和 y 为端点的边 e. 由于 G_0 不含 P，所以

$$Q=yex_0e_1x_1\cdots x_{k-1}e_kx_k$$

是 G 中一条比 P 更长的路，矛盾于 P 的选取. 所以 x_0 是 G 的非割点. 同理可证 x_k 也是 G 的非割点. □

下面介绍与图中边的方向有关的强连通概念.

设 D 是有向图，并设 $x,y\in V(D)$. 若 D 中既存在从 x 到 y 的有向路又存在从 y 到 x 的有向路，则称 x 和 y 是**强连通的(strongly connected)**. 同样，V 中元素之间的强连通关系是 V 上的等价关系. 由这种关系得到 V 的等价类 V_i 在 D 中导出子图 $D[V_i]$ 称为 D 的**强连通分支**. D 的**强连通分支数**记为 $\vec{\omega}(D)$. 若 $\vec{\omega}(D)=1$，则称 D 为**强连通图**. 反之，称 D 为**非强连通图**.

显然，若 D 是强连通的，则 D 必是连通的. 反之不成立. 但对无向图 G，这两个连通性却是一样的. 图 1.15(a)所示的有向图是连通的，但是非强连通的，因为它有如图 1.15(b)所示的三个强连通分支.

由强连通定义，易证(习题 1.5.4)：有向图 D 是强连通的⇔对 $V(D)$ 的任何

非空真子集 S 均有 $(S,\bar{S})\neq\varnothing$ 且 $(\bar{S},S)\neq\varnothing$.

例 1.5.4 设 D 是简单图且 $\varepsilon>(\nu-1)^2$，则 D 是强连通的.

证明 （反证法） 若 D 是非强连通的，则存在非空真子集 $S\subset V(D)$ 使 $(S,\bar{S})=\varnothing$. 令 $k=|S|$，则

$$\varepsilon\leqslant 2\binom{k}{2}+2\binom{\nu-k}{2}+k(\nu-k)$$
$$=(\nu-1)^2-(k-1)(\nu-k-1)\leqslant(\nu-1)^2,$$

这与假设矛盾. 所以 D 是强连通的. □

例 1.5.5 有向图 D 称为**单向连通的**(**unilateralconnected**)，如果对 D 中任意两顶点 x 和 y，D 中或者存在一条从 x 到 y 的有向路，或者存在一条从 y 到 x 的有向路. 证明：D 是单向连通的$\Leftrightarrow D$ 中有一条包含所有顶点的有向链.

证明 （$\Leftarrow$） 显然.

（$\Rightarrow$） 构作一个简单有向图 $D'=(V',E')$，其中 $V'=V(D)$，$(x,y)\in E'\Leftrightarrow D$ 中有一条从 x 到 y 的有向路 P_{xy}. 由于 D 是单向连通的，所以 D' 中含有一个支撑竞赛图. 由定理 1.2 知 D' 中存在一条经过 D' 中每个顶点的有向路 P'. 将 P' 中每条边 (x,y) 换成 D 中 (x,y) 路 P_{xy} 后得到的有向链就是 D 中一条经过所有顶点的有向链. □

设 $x,y\in V(D)$. D 中所有从 x 到 y 的有向路的最短长度称为从 x 到 y 的**距离**(**distance**)，记为 $d_D(x,y)$. 长度等于矩离的路称为**最短路**(**shortest path**). 若 D 中不存在从 x 到 y 的有向路，则约定 $d_D(x,y)=\infty$. 一般说来，$d_D(x,y)\neq d_D(y,x)$.

$$d(D)=\max\{d_D(x,y):\quad\forall\, x,y\in V(D)\}$$

称为 D 的**直径**(**diameter**). 显然，$d(D)=1\Leftrightarrow D\supseteq K_\nu^*$.

对于无向图 G，我们可以同样地定义它的直径 $d(G)$，并且也有 $d(G)=1\Leftrightarrow G\supseteq K_\nu$.

例 1.5.6 设 G 是连通无向图并且存在不相邻两顶点，则 G 中存在两顶点 x 和 y 使 $d_G(x,y)=2$.

证明 设 G 中不相邻两顶点为 x 和 z. 由于 G 是连通的，所以 G 中存在连接 x 和 z 的路 P. 令 $P=xe_1x_1e_2x_2\cdots e_{k-1}x_{k-1}e_kz$ 是 G 中一条最短 xz 路，则 $k\geqslant 2$. 令 $y=x_2$，则 $xe_1x_1e_2y$ 是 G 中 xy 路，因而 $d_G(x,y)\leqslant 2$. 若 $d_G(x,y)=1$，即存在 $e\in E(G)$ 使 $\psi_G(e)=xy$，则 $P'=xeye_3x_3\cdots e_{k-1}x_{k-1}e_kz$ 是 G 中比 P 更短的 xz 路，矛盾于 P 的选取，所以 $d_G(x,y)=2$. □

例 1.5.7 在 8×8 棋盘的 64 个方格中分别填入 1 至 64 个数字. 证明：无论怎么填入这些数，总能找到两个具有公共边的两方格，里面所填数字之差不少

于 5.

证明　假设在 64 个方格中已填好 64 个数字. 以这 64 个数字为顶点集 V 构作简单无向图 $G=(V,E)$, $ij\in E\Leftrightarrow i$ 和 j 所在的两方格有公共边. 易知, G 的直径 $d(G)\leqslant 7+7=14$. 若相邻两顶点数字之差 $\leqslant 4$, 则 G 中任何两顶点数字之差 $\leqslant 4\times 14=56$. 但存在两顶点数字分别为 1 和 64, 且 $64-1=63>56$, 矛盾. □

习　题

1.5.1　证明:

(a) (x,y) 链(或 xy 链)中必含 (x,y) 迹(或 xy 迹);

(b) (x,y) 迹(或 xy 迹)中必含 (x,y) 路(或 xy 路);

(c) 有向闭链 W 必可以表示成若干条边不交有向闭迹之并, 而且 W 的长度为这些闭迹长度之和;

(d) (有向)闭迹必可以表示成若干条边不交(有向)闭路之并.

1.5.2　证明: 有些图 D 是强连通当且仅当对任何 $x,y\in V(D)$, D 中存在经过所有顶点从 x 到 y 的有向链.

1.5.3　证明: 设 D 是简单有向图, 且 $k=\max\{\delta^+,\delta^-\}$, 则 D 中含有长度至少为 k 的有向路.

1.5.4　证明:

(a) 有向图 D(或无向图 G)是连通的 $\Leftrightarrow$ 对 $V(D)$(或 $V(G)$)的任何非空真子集 S 均有 $[S,\bar{S}]\neq\varnothing$;

(b) 有向图 D 是强连通的 $\Leftrightarrow$ 对 $V(D)$ 的任何非空真子集 S 均有 $(S,\bar{S})\neq\varnothing$, 并且 $(\bar{S},S)\neq\varnothing$;

(c) 平衡有向图是强连通的 $\Leftrightarrow$ 它是连通的;

(d) 有向图 D 中含有从 x_0 到任何其他顶点的有向路 $\Leftrightarrow$ 对 $V(D)$ 中含 x_0 的任何真子集 S 均有 $(S,\bar{S})\neq\varnothing$.

1.5.5　证明: 设 $\nu>2$, 则 G 是连通的 $\Leftrightarrow$ 存在 $x,y\in V(G)$ 使 $G-x$ 和 $G-y$ 均是连通的.

1.5.6　设 G 是简单图, 并且 $\omega=\omega(G)$, 证明:

(a) $\varepsilon(G)\leqslant\frac{1}{2}(\nu-\omega)(\nu-\omega+1)$;

(b) 若 $\varepsilon(G)>\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)$, 则 G 是连通的.

1.5.7　设 D 是简单有向图, 并且 $\omega=\vec{\omega}(D)$, 证明:

(a) $\varepsilon(D)\leqslant(\nu-\omega)(\nu-\omega+1)+\frac{1}{2}(\omega-1)(2\nu-\omega)$;

(b) 若 $\varepsilon(D)>(\nu-1)^2$, 则 D 是强连通的.

1.5.8　设 D 是 $\nu(>1)$ 阶简单有向图. 证明:

(a) 若每对使得 $(x,y)\notin E(D)$ 的 $x,y\in V(D)$ 均有 $d_D^+(x)+d_D^-(y)\geqslant\nu-1$, 则 D 是强连通的;

(b)若 $\delta\geqslant k$ 且 $\varepsilon>\nu(\nu-1)-(k+1)(\nu-k-1)$，则 D 是强连通的.

1.5.9 证明：

(a)若 G 中无奇度点，则 G 中无割边；

(b)若 G 为 $k(\geqslant 2)$ 正则 2 部分图，则 G 中无割边；

(c)若记 $b(G)$ 为 G 中块的数目，$b(x)$ 为含顶点 x 的块的数目. 则

$$b(G)=\omega(G)+\sum_{x\in V(G)}(b(x)-1).$$

1.5.10 (a)证明：

(i)设 D 是 ν 阶强连通有向图，$d=d(D)$，$\Delta=\max\{\Delta^+(D),\Delta^-(D)\}$，则

$$\nu(D)\leqslant\begin{cases}d+1, & \text{当 }\Delta=1\text{ 时},\\ \dfrac{\Delta^{d+1}-1}{\Delta-1}, & \text{当 }\Delta\geqslant 2\text{ 时},\end{cases}$$

因当 $\Delta\geqslant 2$ 时而有 $d(D)\geqslant\lceil\log_\Delta[\nu(\Delta-1)+1]\rceil-1$；

(ii)设 G 是 ν 阶连通无向图，$d=d(G)$，$\Delta=\Delta(G)$，则

$$\nu(G)\leqslant\begin{cases}2d+1, & \text{当 }\Delta=2\text{ 时},\\ \dfrac{\Delta(\Delta-1)^d-2}{\Delta-2}, & \text{当 }\Delta\geqslant 3\text{ 时}.\end{cases}$$

因而当 $\Delta\geqslant 3$ 时有 $d(G)\geqslant\left\lceil\log_{(\Delta-1)}\dfrac{\nu(\Delta-2)+2}{\Delta}\right\rceil$.

(b)画出满足下列条件的 ν 阶 d 直径 Δ 正则的有向图和无向图：

(i) $\nu=d+1$ 的 1 正则和 $\nu=\Delta+1$ 且 $d=1$ 的 Δ 正则有向图；

(ii) $\nu=2d+1$ 的 2 正则，$\nu=\Delta+1$ 且 $d=1$ 的 Δ 正则和 $\nu=10$ 且 $d=2$ 的 3 正则无向图.

1.5.11 证明：连通图 G 中任何两条最长路必有公共交点.

1.5.12 设 x,y,z 是强连通有向图 D 中 3 个不同顶点. 证明：

$$d_D(x,z)\leqslant d_D(x,y)+d_D(y,z)$$

1.5.13 设 D 是非平凡非空的强连通有向图，$L(D)$ 是 D 的线图，证明：$L(D)$ 是强连通的，且 $d(L(D))\leqslant d(D)+1$.

1.5.14 设 T 是竞赛图，$x\in V(T)$. 若对任何 $y\in V(T)$，均有 $d_T(x,y)\leqslant 2$，则称 x 是 T 的王. 证明：

(a) T 中每个最大出度顶点都是王；

(b)不存在恰有两个王的竞赛图；

(c)若 $\nu\neq 2,4$，则存在 ν 阶竞赛图 T 使其每个顶点都是王.

1.5.15 设 G 是简单图. 证明：

(a)若 G 是非连通的，则 G^c 是连通的，而且 $d(G^c)\leqslant 2$；

(b) G 和 G^c 都是连通的 $\Leftrightarrow$ G 和 G^c 都不含支撑子图 $K_{m,n}$；

(c)若 $d(G)>3$，则 $d(G^c)<3$；

(d)若 $d(G)=2$ 且 $\Delta(G)=\nu-2$，则 $\varepsilon\geqslant 2\nu-4$.

1.6　回　与　圈

闭(有向)迹称为(有向)回(**circuit**). 点不同的闭(有向)回称为(有向)**圈**(**cycle**). 长度为 k、奇数、偶数的回(圈)分别称为 k、**奇**(**odd**)、**偶**(**even**)**回**(**圈**). 我们常用 C_k 表示长度为 k 的圈. 图中最大(或最小)长度的圈称为**最长**(**或最短**)**圈**(**longest or shortest cycle**).

例 1.6.1　设 G 是无向图. 若 $\delta=\delta(G)\geqslant 2$,则 G 含圈. 若 G 是简单图,则 G 中含长度至少为 $\delta+1$ 的圈.

证明　若 G 中含环或者平行边,则结论成立. 下设 G 为简单无向图,并设 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 为 G 中一条最长路,$x_k\neq x_0$. 则

$$N_G(x_0)\subseteq\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}.$$

由于
$$|N_G(x_0)|=d_G(x_0)\geqslant\delta(G)=\delta\geqslant 2.$$
所以存在 $x_i\in N_G(x_0)$,$\delta\leqslant i\leqslant k$. 于是 $(x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_0)$ 为 G 中长度至少为 $\delta+1$ 的圈. □

定理 1.3(Moon,1966)　**设 D 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶强连通竞赛图,u 是 D 中任意顶点. 则对任何整数 $k(3\leqslant k\leqslant\nu)$,$D$ 中存在长度为 k 且含 u 的有向圈.**

证明　对 $k\geqslant 3$ 用归纳法. 当 $k=3$ 时,令 $S=N_D^+(u)$,$T=N_D^-(u)$. 由于 D 是强连通的,所以 $S\neq\varnothing$,$T\neq\varnothing$. 又由于 D 是竞赛图,所以,$T\cup\{u\}=\overline{S}$. 因此(习题 1.5.4(b)),$(S,T)=(S,\overline{S})\neq\varnothing$. 于是存在 $x\in S$,$y\in T$ 使 $(x,y)\in E(D)$,且 (u,x,y,u) 是长度为 3 的有向圈且含 u(参见图 1.17(a)). 结论成立.

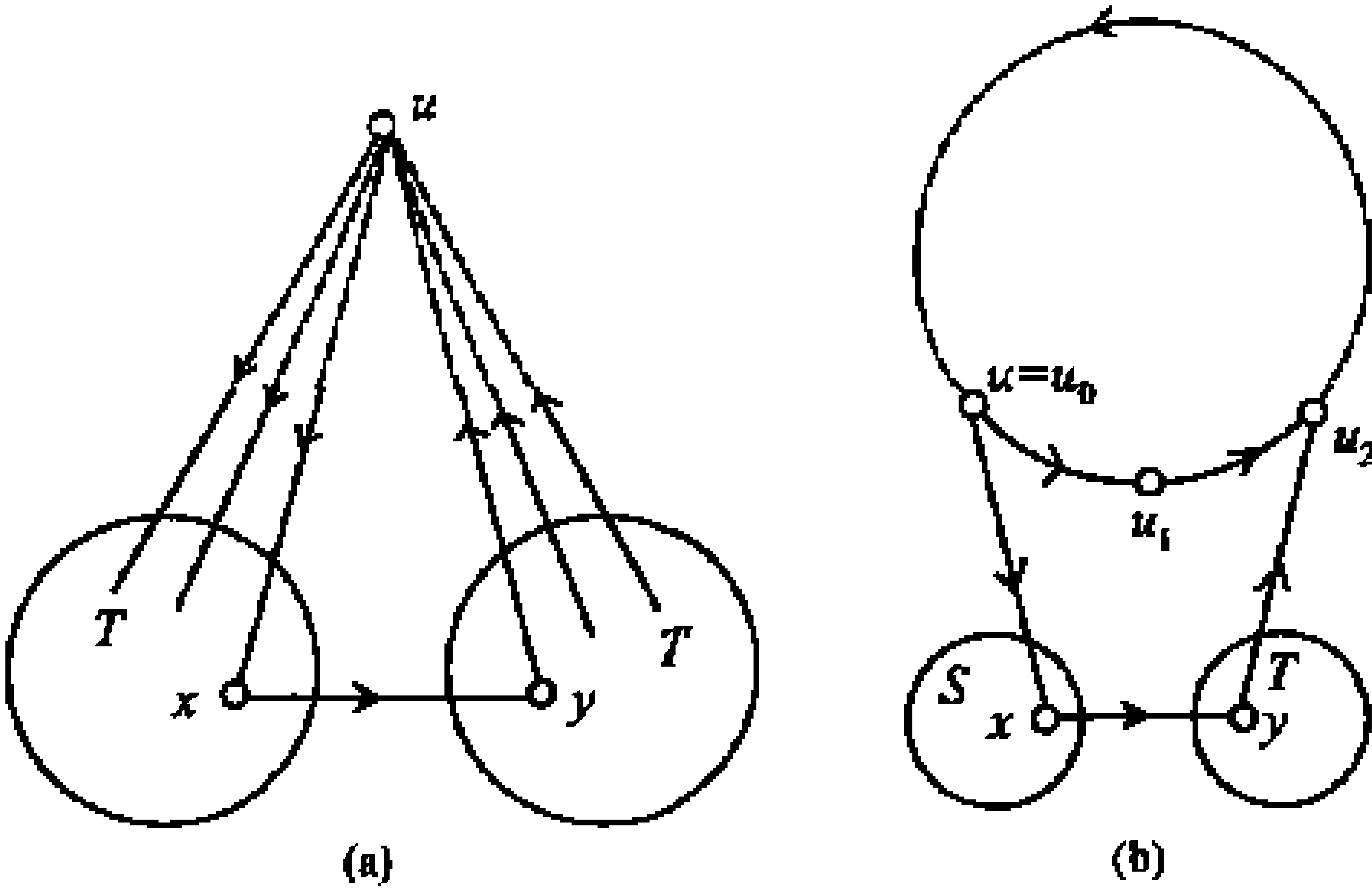


图 1.17

假设 u 含在一条长度为 $n(3\leqslant n<\nu)$ 的有向圈中,要证明 u 也含在一条长度为 $(n+1)$ 的有向圈中.

设 $C=(u_0,u_1,\cdots,u_n)$ 是 D 中一条长度为 n 的有向圈，其中 $u_0=u_n=u$. 若存在 $x\in V\setminus V(C)$ 使 $N_D^+(x)\cap V(C)\neq\varnothing$ 且 $N_D^-(x)\cap V(C)\neq\varnothing$，则因为 D 是竞赛图，所以 C 中存在相邻两顶点 u_i 和 u_{i+1} 使 $(u_i,x),(x,u_{i+1})\in E(D)$. 于是 u 含在长度为 $(n+1)$ 的有向圈 $(u_0,u_1,\cdots,u_i,x,u_{i+1},\cdots,u_n)$ 中.

下设对任何 $x\in V\setminus V(C)$，或者 $N_D^+(x)\cap V(C)=\varnothing$，或者 $N_D^-(x)\cap V(C)=\varnothing$. 令

$$S=\{x\in V\setminus V(C):N_D^+(x)\cap V(C)=\varnothing\},$$
$$T=\{y\in V\setminus V(C):N_D^-(y)\cap V(C)=\varnothing\}.$$

显然 $S\neq\varnothing,T\neq\varnothing$ 且 $(S,T)\neq\varnothing$. 设 $x\in S,y\in T$ 使得 $(x,y)\in E(D)$（见图 1.17(b)）. 于是 u 含在长度为 $(n+1)$ 有向圈 $(u_0,x,y,u_2,\cdots,u_n)$ 中. □

推论 1.3 **设 x 和 y 是 $\nu(\geqslant 5)$ 阶强连通竞赛图 D 中任意两顶点（不必互异），则 D 中存在长度为 $(d+3)$ 的从 x 到 y 的有向链，其中 $d=d(D)$.**

证明 设 P 是 D 中最短 (x,y) 路. 由于 $0\leqslant d_D(x,y)\leqslant d\leqslant\nu-1$，所以

$$3\leqslant d-d_D(x,y)+3\leqslant\nu+2.$$

若 $d-d_D(x,y)-3\leqslant\nu$，则由定理 1.3 知 y 含在 D 中长度为 $m=d-d_D(x,y)+3$ 的有向圈 C_m 中. 于是 $P\oplus C_m$ 形成 D 中一条 (x,y) 链，其长度为

$$d_D(x,y)+(d-d_D(x,y)+3)=d+3.$$

若 $d-d_D(x,y)+3=\nu+1$，则由定理 1.3 和 $\nu\geqslant 5$ 知 y 含在 D 中长度为 3 的有向圈 C_3 和长度为 $(\nu-2)$ 的有向圈 $C_{\nu-2}$ 中. 于是 $P\oplus C_{\nu-2}\oplus C_3$ 形成 D 中一条 (x,y) 链，其长度为

$$d_D(x,y)+(\nu-2)+3=d_D(x,y)+d-d_D(x,y)+3=d+3.$$

若 $d-d_D(x,y)+3=\nu+2$，则由定理 1.3 知 y 含在 D 中长度为 3 的有向圈 C_3 和长度为 $(\nu-1)$ 的有向圈 $C_{\nu-1}$ 中. 于是 $P\oplus C_{\nu-1}\oplus C_3$ 形成 D 中一条 (x,y) 链，其长度为

$$d_D(x,y)+(\nu-1)+3=d_D(x,y)+d-d_D(x,y)+3=d+3.$$ □

定理 1.4 **强连通有向图 D 是 2 部分图 $\Leftrightarrow D$ 中不含奇有向回.**

证明 $(\Rightarrow)$ 设 D 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分有向图，并设 $C=x_0a_1x_1\cdots x_{k-1}a_kx_0$ 是 D 中长度为 k 的有向回. 不失一般性，设 $x_0\in X$. 因为 D 是 2 部分图，所以 $x_1\in Y,x_2\in X,x_3\in Y,\cdots$. 一般地，$x_{2i}\in X,x_{2i+1}\in Y$. 由于 $x_0\in X$，所以 $x_{k-1}\in Y$. 于是存在 i 使 $k-1=2i+1$，即 $k=2i+2$. 因此，C 是偶有向回.

$(\Leftarrow)$ 由于 D 中不含奇有向回，所以 D 中无环. 不妨设 $\nu\geqslant 2$. 任取 $u\in V(D)$. 令

$$X=\{x\in V(D):d_D(u,x)\text{ 是偶数}\}$$
$$Y=\{y\in V(D):d_D(u,y)\text{ 是奇数}\}$$

显然，$u\in X$. 由于 D 是强连通的，并且 $\nu\geqslant 2$，所以 $Y\neq\varnothing$. 因而 $\{X,Y\}$ 是 $V(D)$ 的一个划分.

下证 $E(D[Y])=\varnothing$. 若 $|Y|=1$，则不证自明. 下设 $|Y|\geqslant 2$. 设 $y,z\in Y$，$y\neq z$. 令 P_1 和 Q_1 分别是最短 (u,y) 路和 (u,z) 路，P_2 和 Q_2 分别是最短 (y,u) 路和 (z,u) 路（D 的强连通性保证了这 4 条有向路的存在）. 由 Y 的定义知 P_1 和 Q_1 的长度都是奇数. 由于 D 中不含奇有向回，且 $P_1\cup P_2$ 和 $Q_1\cup Q_2$ 都含 D 中有向回，所以 P_2 和 Q_2 的长度也都是奇数. 因此，若存在 $a\in E(D)$ 使 $\psi_D(a)=(z,y)$，则 $P_2\cup Q_1\cup\{a\}$ 是 D 中一条奇有向回，矛盾于假定（参见图 1.18）. 同样证明不存在 $b\in E(D)$ 使 $\psi_D(b)=(y,z)$. 所以 Y 中任何两顶点不相邻.

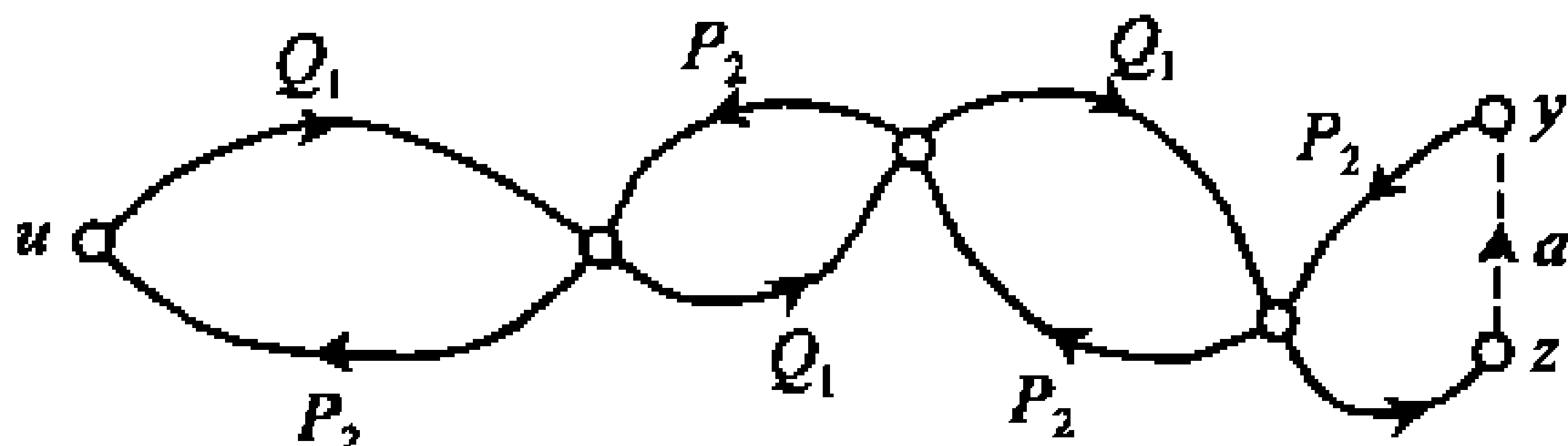


图 1.18

同样可证 X 中任何两顶点也不相邻，因此 D 是 2 部分图. □

注 在定理 1.4 的证明中，其必要性成立并没有用到 D 的强连通性. 但对于充分性，强连通性是不可少的。例如，图 1.5 所示的两个 3 阶竞赛图中，前一个不是强连通的，而且不含有向回，但它显然不是 2 部分图.

推论 1.4.1 **强连通有向图 D 是 2 部分图 $\Leftrightarrow D$ 中不含奇有向圈.**

证明 (⇒) 由定理 1.4 知 D 中不含奇有向回. 由于奇有向圈也是一条奇有向回，所以 D 中不含奇有向圈.

(⇐) 设 D 中不含奇有向圈，首先证明 D 中不含奇有向回. 若不然，设 C 是 D 中一条奇有向回. 由于 D 中不含奇有向圈，所以 C 不是一条有向圈，于是（习题 1.5.1）C 可以表示成 $k(\geqslant 2)$ 条边不交有向圈 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 之并 $C=C_1\oplus C_2\oplus\cdots\oplus C_k$. 由于 C 的长度

$$\varepsilon(C)=\varepsilon(C_1)+\varepsilon(C_2)+\cdots+\varepsilon(C_k)$$

为奇数，所以 $\varepsilon(C_1),\varepsilon(C_2),\cdots,\varepsilon(C_k)$ 中必有一个为奇数. 矛盾于 D 中不含奇有向圈的假设.

由于 D 中不含奇有向回且 D 是强连通的，所以由定理 1.4 知 D 是 2 部分图. □

推论 1.4.2（König，1936） **无向图 G 是 2 部分图 $\Leftrightarrow G$ 中不含奇圈.**

证明 由于无向图 G 是 2 部分图 $\Leftrightarrow G$ 的每个连通分支都是 2 部分图，所以不妨设 G 是连通的. 考虑 G 的对称有向图 D. G 是连通的 2 部分图 $\Leftrightarrow D$ 是强连通的 2 部分图. G 中不含奇圈 $\Leftrightarrow D$ 中不含奇有向圈. 由推论 1.4.1 即知该推论

成立. □

推论 1.4.3　有向图 D 是 2 部分图$\Leftrightarrow D$ 中不含奇圈.

证明　考虑 D 的基础图 G. D 是 2 部分图$\Leftrightarrow G$ 是 2 部分图,而且 D 中不含奇圈$\Leftrightarrow G$ 中不含奇圈. 由推论 1.4.2 即知该推论成立. □

下面举几个例子.

例 1.6.2　设 G 是非 2 部分简单无向图且 $\varepsilon>\frac{1}{4}(\nu-1)^2+1$,则 G 中必含三角形.

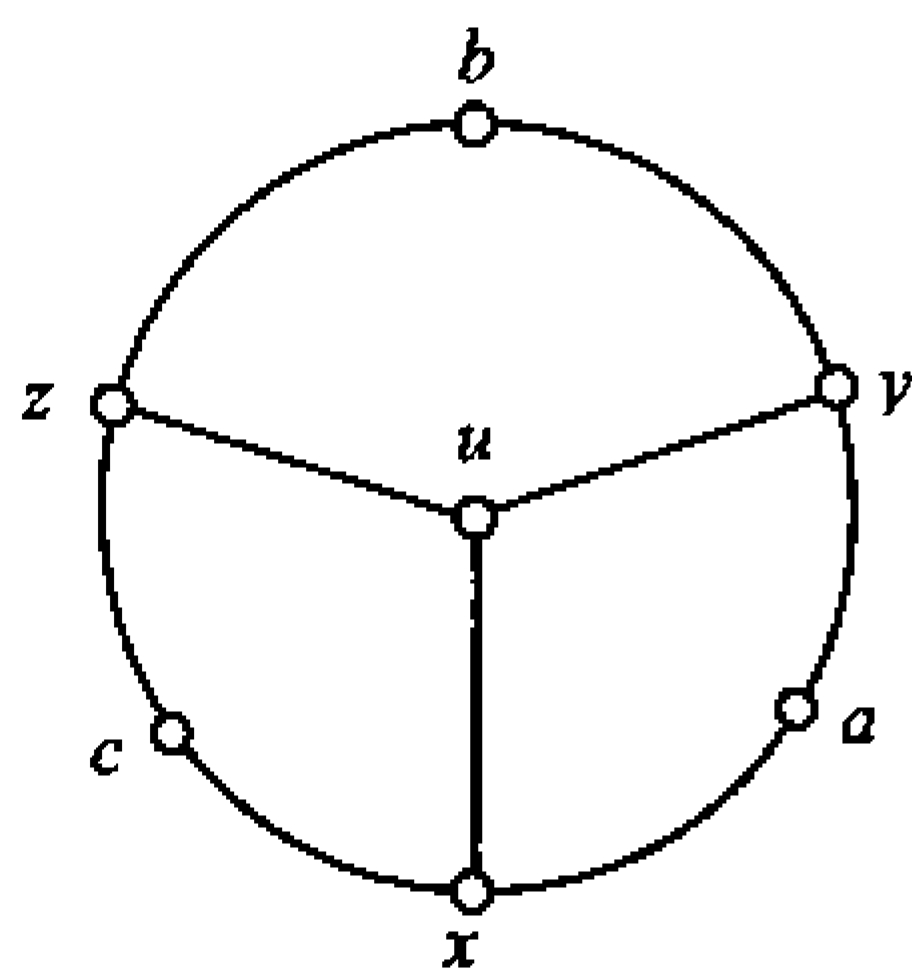


图 1.19

证明　(反证法)　设 G 是不含三角形的非 2 部分图,则由推论 1.4.2 知 G 含有奇圈. 取 G 中长度最短的奇圈 C. 令 $S=V(C)$,则 $n=|S|\geqslant5$. 先证

$$|(S,\overline{S})|\leqslant 2(\nu-n).$$

若不然,存在 $u\in\overline{S}$ 使得 $|N_G(u)\cap S|\geqslant3$. 令 $x,y,z\in N_G(u)\cap S$. 由于 G 不含三角形,所以 $S\{x,y,z\}$ 中存在三顶点 a,b,c,见图 1.19 所示. 圈 $C_1=(u,x,\cdots,a,\cdots,y,u)$,$C_2=(u,y,\cdots,b,\cdots,z,u)$ 和 $C_3=(u,z,\cdots,c,\cdots,x,u)$ 的长度都小于 n 且至少有一个是奇圈,矛盾于 C 的选取.

由 C 的选取知,$G[S]=C$,即 $\varepsilon(G[S])=n$. 由于 G 中不含三角形,所以 $G[\overline{S}]$ 中不含三角形. 于是由例 1.3.1,有

$$\begin{aligned}\varepsilon(G)&=\varepsilon(G[S])+|(S,\overline{S})|+\varepsilon(G[\overline{S}])\\&\leqslant n+2(\nu-n)+\frac{1}{4}(\nu-n)^2\\&\leqslant\frac{1}{4}(\nu-1)^2+1,\end{aligned}$$

矛盾于假定. 故 G 必含三角形. □

例 1.6.3　若无向图 G 中不含奇度点,则 G 存在一个平衡定向图.

证明　对边数 ε 用归纳法,当 $\varepsilon=0$ 时,G 是空图,结论自然成立. 假定对所有 ν 阶且不含奇度点的无向图,只要其边数 $\varepsilon\leqslant n$,就存在一个平衡定向图. 设 G 是 ν 阶、不含奇度点且边数 $\varepsilon=n+1$ 的无向图. 令

$$S=\{x\in V(G):d_G(x)=0\},$$

并令 $G_1=G-S$,则 $\delta(G_1)\geqslant2$ 且不含奇度点. 由例 1.6.1 知 G_1 含圈,设为 C. 指定 C 的正向并按此方向将 C 的边定向得有向圈,设为 C'. 令 $G_2=G-E(C)$,则 $\nu(G_2)=\nu(G)=\nu$,

$$\varepsilon(G_2)=\varepsilon(G)-\varepsilon(C')<\varepsilon(G)=n+1,$$

且 G_2 中无奇度点. 由归纳假设知 G_2 存在一个平衡定向图 D'，于是 $D=D'\oplus C'$ 即为 G 的一个平衡定向图. □

例 1.6.4　含奇回的强连通有向图必含奇有向回(因而含奇有向圈).

证明　利用推论 1.4.3 可以给出证明，留给读者，下面给出直接证明. 设

$$C=x_1a_1x_2a_2\cdots x_ia_ix_{i+1}\cdots x_{2k+1}a_{2k+1}x_1$$

是 D 中一条奇回，其中 $x_i\in V(D)$，$a_j\in E(D)$. 用 P_i 表示 D 中最短的从 x_i 到 x_{i+1} 的有向路($i=1,2,\cdots,2k$)；P_{2k+1} 表示 D 中最短的从 x_{2k+1} 到 x_1 的有向路. 由于 D 是强连通的，所以这些 $P_i(i=1,2,\cdots,2k+1)$ 都是存在的. 若存在一条其长度为偶数的 P_i，则由 P_i 的最短性知 $\psi_D(a_i)=(x_{i+1},x_i)$. 于是 P_i+a_i 为 D 中一条奇有向圈.

下设每条 P_i 的长度均为奇数. 将这 $2k+1$ 条有向路 P_i 连接起来构成一条长度为奇数的有向闭链，设为 W. 由于 W 可以表示成 $l(\geqslant 1)$ 个边不交有向回之并，且 W 的长度是这些有向回长度之和(习题 1.5.1)，所以，其中必有一条奇有向回. □

习　题

1.6.1　证明：

(a) 若 $\varepsilon\geqslant\nu$，则 G 含圈；

(b) 连通的 2 正则无向图必是一条圈；

(c) 强连通的 1 正则有向图必是一条有向圈；

(d) 若 G 是简单图，且 $\delta\geqslant 3$，则至少 G 含两条偶圈，而且 G 中各圈长度最大公因子为 1 或 2；

(e) 设 G 是连通简单图，且 $\nu>2\delta$，则 G 中含长度 $\geqslant 2\delta$ 的路.

1.6.2　设 D 是简单有向图，$k=\max\{\delta^+,\delta^-\}>0$. 证明：$D$ 中含有长度 $\geqslant(k+1)$ 的有向圈.

1.6.3　(a) 证明：设 D 是简单有向图，且 $\varepsilon>\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$，则 D 含有向圈.

(b) 构作一个不含有向圈的简单有向图 D 使 $\varepsilon=\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$.

1.6.4　设 D 是竞赛图. 证明：

(a) 若 $k=\max\{\delta^+,\delta^-\}>0$，则 D 含长 $\geqslant 2k+1$ 的有向圈；

(b) 若 D 强连通且 $\nu(D)\geqslant 4$，则存在 $S\subseteq V(D)$ 使 $|S|\geqslant 2$ 且对任何 $x\in S$，$D-x$ 仍为强连通的.

1.6.5　设 G 是非 2 部分简单图，$k\geqslant 2$ 并且 $\delta>\left\lfloor\frac{2\nu}{2k+1}\right\rfloor$. 证明：$G$ 中含有长度 $\leqslant(2k-1)$ 的奇圈.

1.6.6 设有向图 D 不含有向圈. 证明：

(a) $\delta^-=0$；

(b)存在 $V(D)$ 的有序顶点序列 $x_1,x_2,\cdots,x_\nu$ 使得对每个 $i(2\leqslant i\leqslant\nu)$，$D$ 中每条以 x_i 为终点的边的起点都在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$ 中.

1.6.7 有向图 D 的**逆图**(**converse**) $\overleftarrow{D}$ 是指把 D 中每条边的方向都颠倒过来后所得到的有向图.

(a)证明：(i) $d^+_{\overleftarrow{D}}(x)=d^-_D(x)$，(ii) $d_{\overleftarrow{D}}(x,y)=d_D(y,x)$.

(b)利用习题 1.6.6(a)证明：若 D 不含有向圈，则 $\delta^+=0$.

1.6.8 证明：

(a)设 D 是强连通图，则 $D\cong L(D)\Leftrightarrow D$ 是一条有向圈；

(b)设 G 是连通图，则 $G\cong L(G)\Leftrightarrow G$ 是一条圈.

1.6.9 G(或 D)中最短圈(或有向圈)的长度称为 G(或 D)的**围长**(**girth**)，记为 $g(G)$(或 $g(D)$). 证明：

(a)围长为 4 的 k 正则无向图至少有 $2k$ 阶，且(在同构意义下) $2k$ 阶这样的图恰有一个.

(b)围长为 5 的 k 正则无向图至少有 k^2+1 阶.

(c)围长为 5 且直径为 2 的 k 正则无向图恰为 k^2+1 阶. 当 $k=2,3$ 时找出这种图来(J. A. Hoffman 和 R. R. Singleton(1960)已证明：这种图仅当 $k=2,3,7$(可能还有 57)时存在)；

(d)设 G 是围长为 g 的 k 正则无向图，则

$$\nu(G)\geqslant\begin{cases}1+k+k(k-1)+\cdots+k(k-1)^{\frac{g-3}{2}}, & \text{当 } g \text{ 为奇数；}\\ 2[1-(k-1)+\cdots+(k-1)^{\frac{g-2}{2}}], & \text{当 } g \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

1.6.10 设 $D=(V,E)$ 是无对称边的简单有向图，$\forall x,y,z\in V(D)$. 若由 $(x,y),(y,z)\in E(D)\Rightarrow(x,z)\in E(D)$，则称 D 为**传递图**(**transmissible digraph**). 证明：

(a)竞赛图 T 是传递图 $\Leftrightarrow T$ 不含有向圈；

(b)设 T 是传递竞赛图，则对 $\forall x,y\in V(T)$，均有 $d^+_T(x)\neq d^-_T(y)$ 并且 $d^-_T(x)\neq d^-_T(y)$；

(c)恰存在一个 ν 阶传递竞赛图；

(d)恰存在一个 ν 阶不含有向圈的竞赛图；

(e)竞赛图 T 的凝聚图 $\hat{T}$ 是传递图；

(f)任何 2^{n-1} 阶竞赛图必含 n 阶传递竞赛子图.

1.7 Euler 图

经过 D 中每个顶点和每条边的迹(或有向迹)称为 **Euler 迹**(**或有向迹**). 闭的 Euler 迹(或有向迹)称为 **Euler 回**(**或有向回**). 含 Euler 回的图和含 Euler 有向回的有向图统称为 **Euler 图**.

我们之所以叫这些名称，是为了纪念图论创始人、著名的瑞士数学家 L. Euler(1707～1783). 1736 年，他发表了图论历史上第一篇论文，讨论 Königsberg 七桥问题. Pergel 河横穿 Königsberg 城，在陆地与河心两个小岛之间架有七座桥(见图 1.20(a)所示). 一个有趣的问题是：一个居民从家里出发能否经过每座桥一次且仅一次，然后回到家？

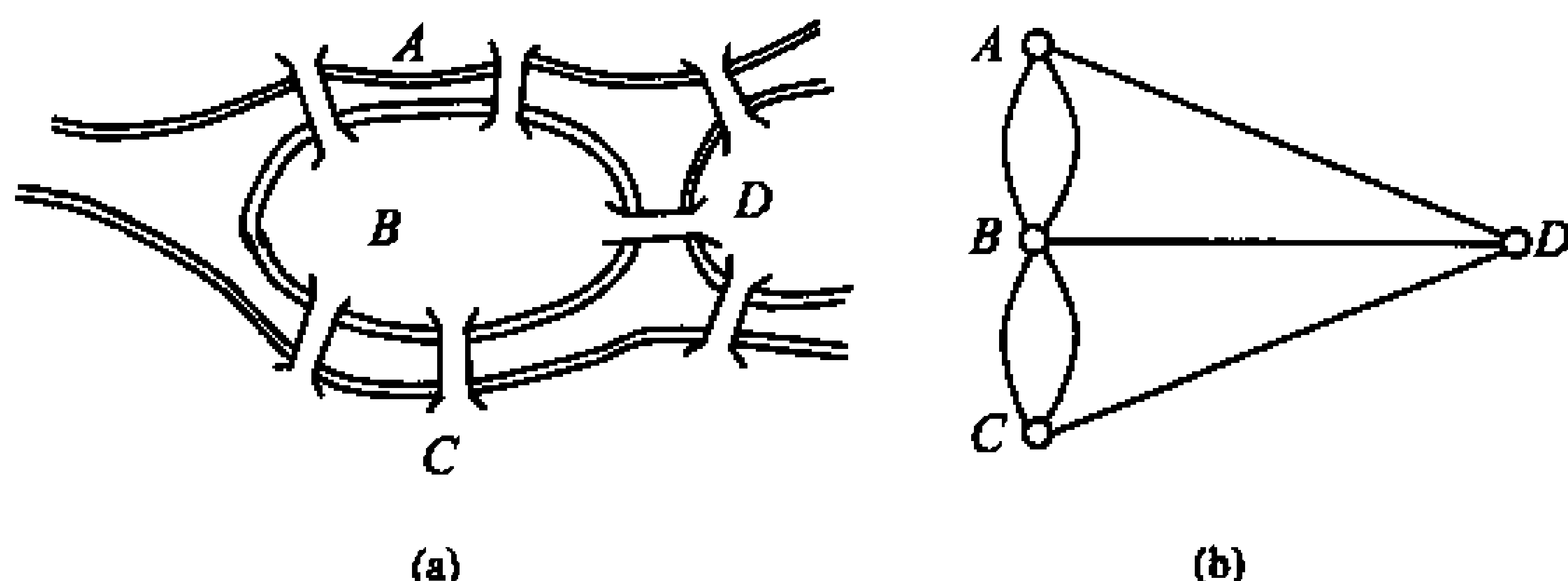


图 1.20

Euler 把这个问题抽象成如图 1.20(b)所示的图 G，其中 G 的顶点 A，B，C 和 D 分别表示 4 块陆地，两块陆地之间的桥用对应点之间的边表示. 于是 Königsberg 七桥问题就归结为 G 是否是 Euler 图. Euler 通过研究，对上述问题做了否定的回答(见推论 1.5.2). 我们把它归结为下列定理的推论.

定理 1.5　D **是 Euler 图**$\Leftrightarrow D$ **是连通的平衡图.**

证明　($\Rightarrow$)设 D 是 Euler 图，则由定义知 D 是连通的. 设 C 是 D 中一条 Euler 有向回. 由于 C 包含连通图 D 中每条边和每个顶点，所以对任意 $x\in V(C)$，沿 C 的正向行进时，作为 C 的顶点 x 每出现一次，就有一条边进入 x，同时也有一条边离开 x. 于是 $d_D^+(x)=d_D^-(x)$，即 D 是平衡图.

($\Leftarrow$)反证法. 取边数尽可能少的非平凡连通且不含 Euler 有向回的平衡图 D. 由于 $\delta^+=\delta^-\neq 0$，所以(习题 1.6.2)D 中含有有向圈. 设 C 是 D 中最长有向回. 由于 D 不含 Euler 有向回，所以 $D-E(C)$ 中存在连通分支 D' 使 $\varepsilon(D')>0$. 由于 D 和 C 都是平衡图，所以 D' 也是平衡图且 $\varepsilon(D')<\varepsilon(D)$. 于是，由 D 的选取知 D' 含有向 Euler 回 C'. 因为 D 是连通的，所以 $V(C)\cap V(C')\neq\varnothing$. 于是 $C\cup C'$ 是 D 中有向回. 但是 $\varepsilon(C\cup C')>\varepsilon(C)$. 矛盾于 C 的选取. 所以 D 是 Euler 图. □

推论 1.5.1　**设** D **是非平凡连通图，则** D **含从** x **到** y **的 Euler 有向迹**$\Leftrightarrow d_D^+(x)-d_D^-(x)=1=d_D^-(y)-d_D^+(y)$，**而且对任何** $u\in V(D)\{x,y\}$ **均有** $d_D^+(u)=d_D^-(u)$.

证明　($\Rightarrow$)设 T 是 D 中一条从 x 到 y 的 Euler 有向迹. 令在 D 中添加一条以 y 为起点且以 x 为终点的有向边 a 后得到的有向图为 D'. 则 D' 中含 Euler 有向回 $T+a$. 由定理 1.5 知 D' 是平衡图. 于是

$$d_D^+(u) = d_{D'}^+(u) = d_{D'}^-(u) = d_D^-(u), \forall u \in V(D)\{x,y\};$$
$$d_D^+(x) = d_{D'}^+(x) = d_{D'}^-(x) = d_D^-(x)+1;$$
$$d_D^-(y) = d_{D'}^-(y) = d_{D'}^+(y) = d_D^+(y)+1.$$

(⇐)令在 D 中添加一条以 y 为起点并以 x 为终点的有向边 a 后得到的有向图为 D'. 由假设知 D'是平衡图. 所以,由定理 1.5 知 D'中含 Euler 有向回. 设 C 是 D'中一条 Euler 有向回,于是 $C-a$ 即为 D 中一条从 x 到 y 的 Euler 有向迹. □

下列结果中条件的必要性是 Euler 在 1736 年解决 Königsberg 七桥问题时发现的,而条件的充分性直到 130 多年后才由 Hierholzer(1873)发现.

推论 1.5.2　图 G 是 Euler 图⇔G 是连通的且不含奇度点.

证明　(⇒)设 C 是 G 中一条 Euler 回,沿着 C 给 G 中每条边定向. 这样得到 G 的一个定向图 D 仍是 Euler 图. 由定理 1.5 知 D 是连通平衡图. 因此 G 是连通的,而且对任何 $x\in V(G)$均有

$$d_G(x)=d_D^+(x)+d_D^-(x)=2d_D^+(x).$$

故 G 不含奇度点.

(⇐)设 G 连通且不含奇度点. 由例 1.6.3 知 G 有一个连通的平衡定向图 D. 由定理 1.5 知 D 含 Euler 有向回 C. 除掉 C 中每条边的方向即得 G 中一条 Euler 回. 因而 G 是 Euler 图. □

例 1.7.1　由推论 1.5.2 知,七桥问题无解.

推论 1.5.3　非平凡图 G 有 Euler 迹⇔G 连通且最多有两个奇度点.

证明　(⇒)设 G 含 Euler 迹 T 并设 T 的两端点为 x 和 y. 若 $x=y$,则 T 是 G 的 Euler 回. 由推论 1.5.2 知 G 不含奇度点. 若 $x\neq y$,则在 T 中顶点 x 和 y 之间添加一条边 e. 于是 $T+e$ 是 $G+e$ 中的 Euler 回. 由推论 1.5.2 知 $G+e$ 不含奇度点. 因此 G 中除 x 和 y 外都是偶度点.

(⇐)设 G 是非平凡连通图且最多有两个奇度点. 若 G 不含奇度点,则由推论 1.5.2 知 G 含 Euler 回,因而 G 含 Euler 迹. 若 G 含奇度点,由推论 1.1.2 知 G 只含两个奇度点 x 和 y. 在 G 中顶点 x 和 y 之间添加一条边 e,于是 $G+e$ 不含奇度点且连通. 因而由推论 1.5.2 知 $G+e$ 含 Euler 回 C. 于是 $C-e$ 为 G 中 Euler 迹. □

作为例子,我们构造一个 Euler 图.

例 1.7.2　下列定义的有向图称为 **de Bruijn 图**,记为 $B(d,n)$,$n\geqslant 1$,$d\geqslant 2$:

$$V(B(d,n))=\{x_1x_2\cdots x_n:\ x_i\in\{0,1,\cdots,(d-1)\},i=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $x,y\in V(B(d,n))$. 若 $x=x_1x_2\cdots x_n$,则有向边

$$(x,y)\in E(B(d,n))\Leftrightarrow y=x_2x_3\cdots x_n\alpha,$$

其中 $\alpha \in \{0,1,\cdots,(d-1)\}$，并记有向边 (x,y) 为 $x_1x_2\cdots x_n\alpha$.

图 1.21 所示的是 $B(2,1)$，$B(2,2)$ 和 $B(2,3)$.

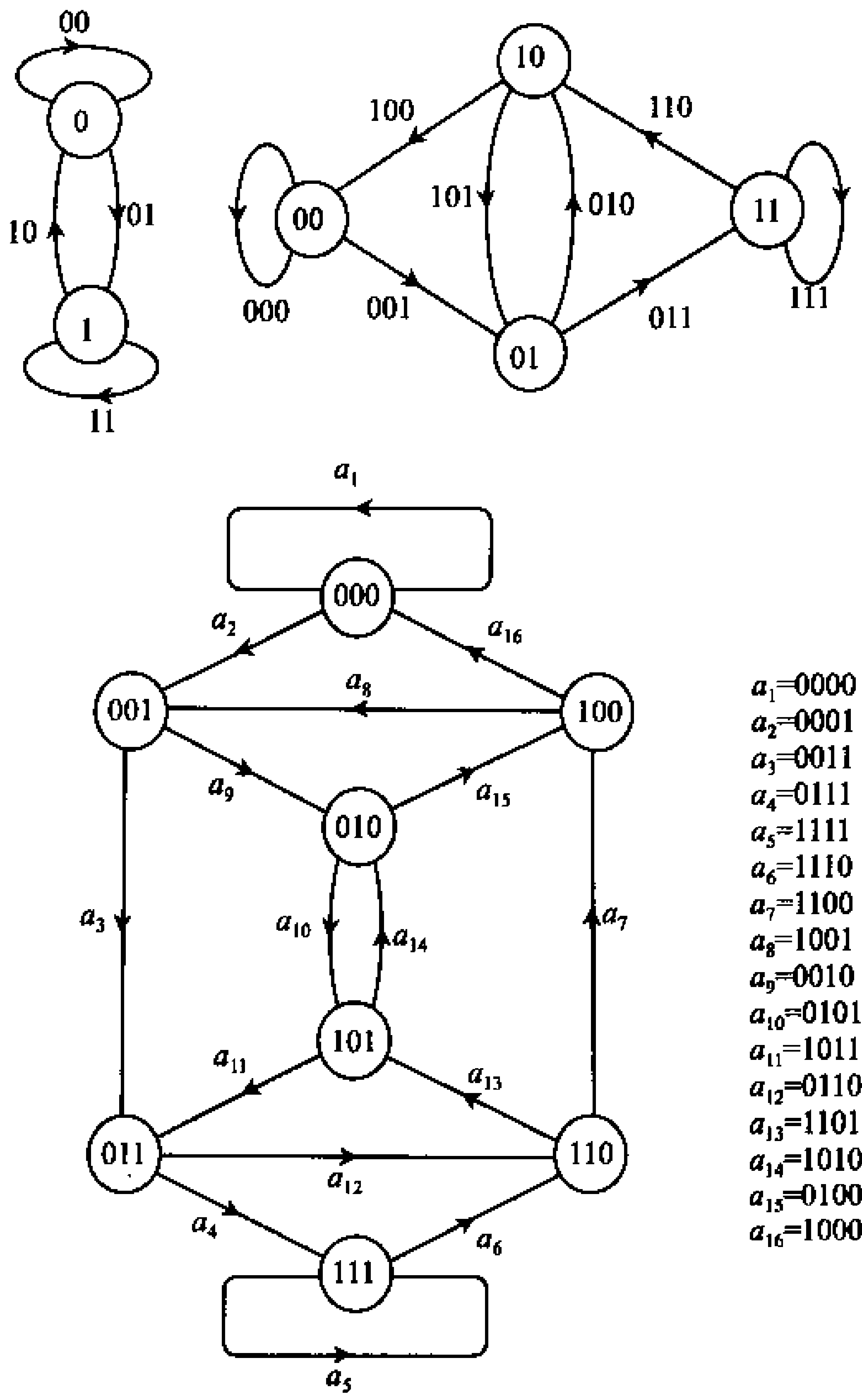


图 1.21　de Bruijn 图 $B(2,1)$，$B(2,2)$ 和 $B(2,3)$

由定义立即知 $B(d,n)$ 中无平行边，而且 $V(B(d,n))$ 中元素与分量取值为 $0,1,\cdots,(d-1)$ 的 n 维向量一一对应，而后者恰有 d^n 个. 所以，$\nu(B(d,n))=d^n$.

任取 $x=x_1x_2\cdots x_n \in V(B(d,n))$，$B(d,n)$ 中以 x 为起点的边集为

$$E_B^+(x)=\{x_1x_2x_3\cdots x_n\alpha :\ \alpha \in \{0,1,\cdots,(d-1)\}\};$$

以 x 为终点的边集为

$$E_B^-(x)=\{\beta x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n :\ \beta \in \{0,1,\cdots,(d-1)\}\}.$$

所以 $$d_B^+(x)=|E_B^+(x)|=d=|E_B^-(x)|=d_B^-(x).$$
由 $x\in V(B(d,n))$ 的任意性知 $B(d,n)$ 是 d 正则有向图. 由定理 1.1 有

$$\varepsilon(B(d,n))=dd^n=d^{n+1}.$$

设 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 是 $B(d,n)$ 中不同两顶点,则

$$(x_1x_2\cdots x_n,\ x_2x_3\cdots x_ny_1,\ x_3x_4\cdots x_ny_1y_2,\cdots,$$
$$x_{n-1}x_ny_1\cdots y_{n-3}y_{n-2},\ x_ny_1y_2\cdots y_{n-1}y_{n-1},\ y_1y_2\cdots y_n)$$

是 $B(d,n)$ 中一条从 x 到 y 的有向链. 故 $B(d,n)$ 是连通的. 所以由定理 1.5 知 $B(d,n)$ 是 Euler 图. 取 $B(d,n)$ 中一条 Euler 有向回 $C=(a_1,a_2,\cdots,a_{d^{n+1}})$,其中 a_i 是 $B(d,n)$ 的边. 取每条边标号的第一个数字按该边在 C 中的顺序排成的序列:

$$M(d,n)=(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\cdots x_{i_{d^{n+1}}})$$

称为 **de Bruijn 序列**. 以 $M(d,n)$ 为循环节的循环序列中任何 $(n+1)$ 个相继数字都是 $B(d,n)$ 中一条边上的标号. 例如,图 1.21 所示的 $B(2,3)$ 中 Euler 有向回 $C=(a_1,a_2,\cdots,a_{16})$,取每条边标号第一个数字构成的 de Bruijn 序列为

$$M(2,3)=(0000111100101101).$$

以 $M(2,3)$ 为循环节的循环序列为

$$\cdots 00001111001011010000111100101101\cdots.$$

de Bruijn 序列在编码及计算机磁鼓设计中非常有用.

例如,一个正在旋转的计算机磁鼓的位置是通过磁鼓表面上 n 个电触点所产生的二元信号来识别的. 这个表面被分成 2^n 段,每段由绝缘体或者由导体材料组成. 绝缘段给出信号 0(没有电流),导通段给出信号 1(有电流). 例如,当 $n=4$ 时,磁鼓表面($2^4=$)16 段给出的数字序列就是 de Bruijn 序列 $M(2,3)$. 当磁鼓旋转时,这 16 位数字就构成无限循环序列. 鼓轮的 16 个不同位置能够由 4 个电触点把它们区别开来. □

习 题

1.7.1 证明:图 G(或图 D)是 Euler 图$\Leftrightarrow G$(或 D)是连通的而且能分解成若干条边不交圈(或有向圈)之并.

1.7.2 设 D 是连通图且 $\sum\limits_{x\in V}|d_D^+(x)-d_D^-(x)|=2l$, 其中 $l\geqslant 1$. 证明: $E(D)$ 有划分 $E(D)=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_l$ 使 $D[E_i]$ 是一条有向迹($i=1,2,\cdots,l$).

1.7.3 设 D 是连通图,$x,y\in V(D)$,$d_D^+(x)-d_D^-(x)=l=d_D^-(y)-d_D^+(y)$,且对任何 $u\in V\setminus\{x,y\}$ 均为平衡点. 证明: D 中至少含有 l 条边不交从 x 到 y 的有向路.

1.7.4 证明: G 有定向图 D 使对 $\forall x\in V$ 有 $|d_D^+(x)-d_D^-(x)|\leqslant 1$.

1.7.5 (a)证明:设 D 是连通图. 若对任何 $x\in V(D)$ 均有 $|d_D^+(x)-d_D^-(x)|\leqslant 1$ 且对任何 a

$\in E(D)$均含在奇数条有向圈中，则 D 是 Euler 图.

(b)举例说明(a)中逆命题不真.

(c)证明：连通图 G 是 Euler 图$\Leftrightarrow G$的每条边都包含在奇数条圈中.

1.7.6 构作 $B(2,4)$和 $M(2,4)$；$B(3,3)$和 $M(3,3)$.

1.8 Hamilton 图

包含G(或D)中每个顶点的圈(或有向圈)称为**Hamilton 圈**(或**Hamilton 有向圈**). 显然，完全图 K_n 必含 Hamilton 圈. 由定理 1.3 知，强连通的竞赛图必含有 Hamilton 有向圈. 含 Hamilton 圈的无向图和含 Hamilton 有向圈的有向图统称为 **Hamilton 图**. 不含 Hamilton 圈的图称为**非 Hamilton 图**. 判断一个给定的图是否是 Hamilton 图的问题称为 **Hamilton 问题**.

Hamilton 问题是从所谓的"周游世界问题"的游戏中提出来的. 1856 年，著名的爱尔兰数学家 Sir William Hamilton(1805～1865)设计了一个游戏：给定世界上 20 个城市，用一个代表地球的十二面体的 20 个顶点分别代表这 20 个城市. 从某一顶点出发，沿着十二面体的棱，经过每个顶点恰好 1 次，最后回到出发点. 这个问题归结为在图 1.22 所示的图中寻找一条 Hamilton 圈. 这条圈是存在的，如图 1.22 中粗边所示.

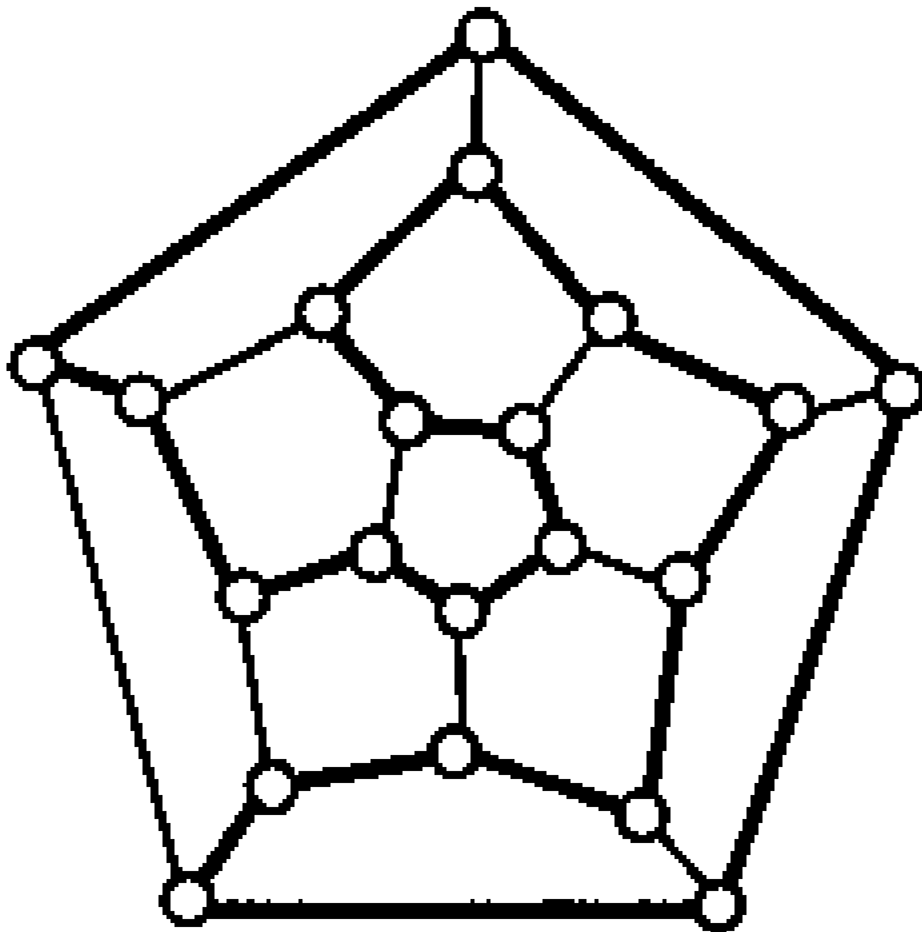


图 1.22

谈到 Hamilton 问题，几乎所有的图论教科书都提到 Hamilton 这个游戏.

非 Hamilton 图确实存在.

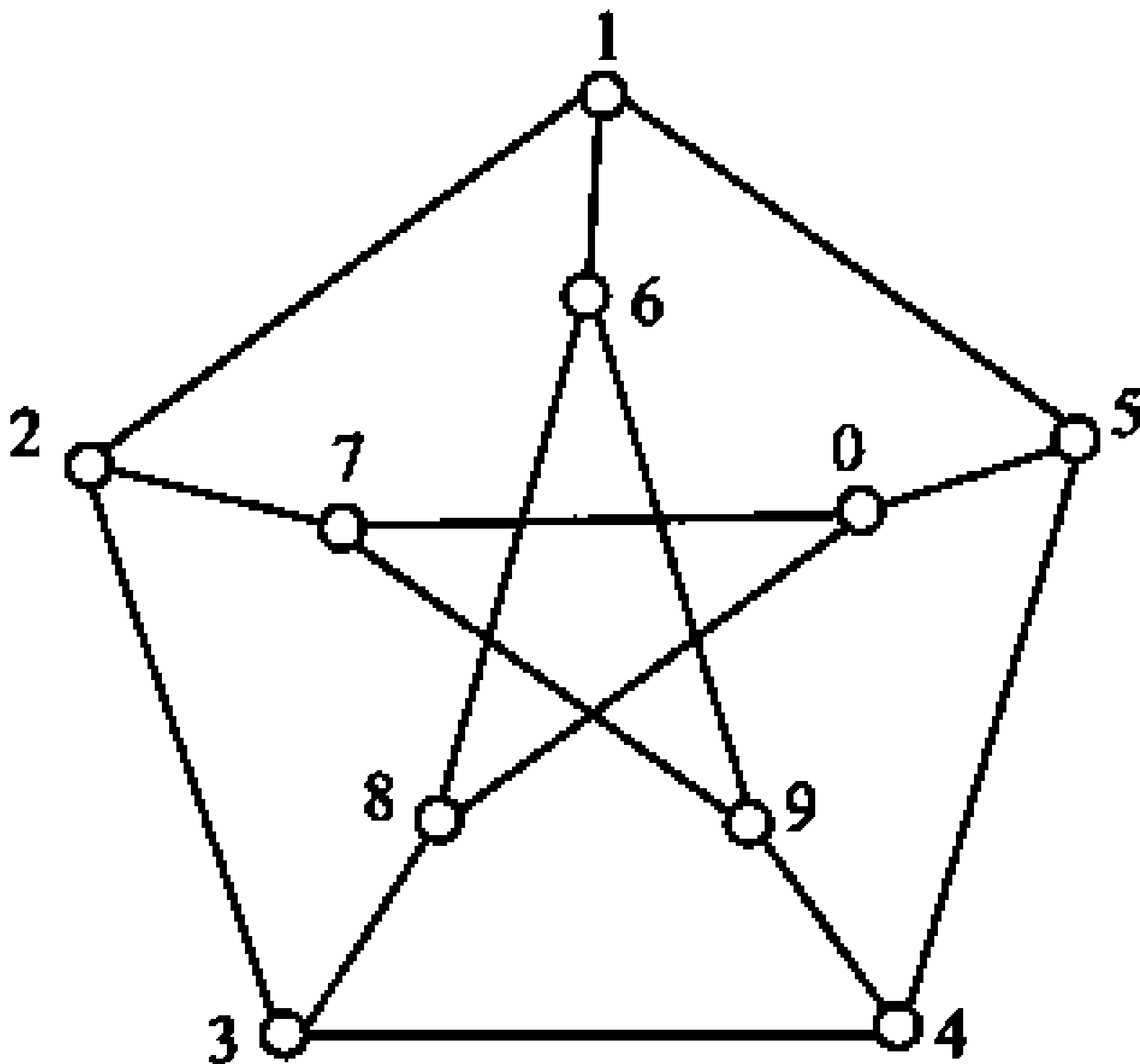


图 1.23

例 1.8.1 Petersen 图是非 Hamilton 图.

证明 设 Petersen 图 G(如图 1.23 所示)是 Hamilton 图. 令边子集 $T=\{16,27,38,49,50\}$，则 $G-T$ 是非连通图. 所以，G 中任何一条 Hamilton 圈必含 T 中偶条边. 容易看出，若某圈只含 T 中两条边，则该圈必不是 Hamilton 圈. 于是 G 中每条 Hamilton 圈必含 T 中 4 条边. 不妨设 C 是一条含边 27，38，49，50 而不含 16 的 Hamilton 圈. 则 C 必含

边 12,15,68,69,并且边 23,45 必不在 C 中. 由于顶点 3 和 4 在 C 中,所以边 34 必在 C 中. 于是边集{34,49,96,68,83}构成一条圈且含在 C 中,这不可能. 因而 Petersen 图是非 Hamilton 图. □

Hamilton 问题目前尚未解决. 事实上,它是图论中尚未解决的主要难题之一. 本节介绍若干必要(但不是充分)条件和若干充分(但不是必要)条件.

首先介绍必要条件. 由定义,立即得到一个简单而又非常重要的必要条件:Hamilton 有向图必是强连通的;Hamilton 无向图必无割点(习题 1.8.1).

定理 1.6 设 G 是 Hamilton 图,则

$$\omega(G-S)\leqslant|S|,\quad \forall S\subset V(G).$$

证明 设 C 是 G 中一条 Hamilton 圈,则

$$\omega(C-S)\leqslant|S|,\quad \forall S\subset V(C)=V(G).$$

由于 $C-S$ 是 $G-S$ 的支撑子图,所以

$$\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)\leqslant|S|,\quad \forall S\subset V(G).$$ □

若取 $S\subset V(G)$ 使 $|S|=1$,则立即有

推论 1.6.1 每个 Hamilton 图都无割点.

推论 1.6.2 奇阶 2 部分图是非 Hamilton 图.

证明: 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的奇阶 2 部分图,则 $|X|\neq|Y|$. 不妨设 $|X|<|Y|$. 于是

$$\omega(G-X)=|Y|>|X|,$$

不满足定理 1.6 中的必要条件. 所以 G 是非 Hamilton 图. □

例 1.8.2 考察图 1.24 中所示的图. 令 $S=\{x_2,x_6,x_7\}$,则有 $\omega(G-S)=4>3=|S|$. 由定理 1.6 知 G 是非 Hamilton 图.

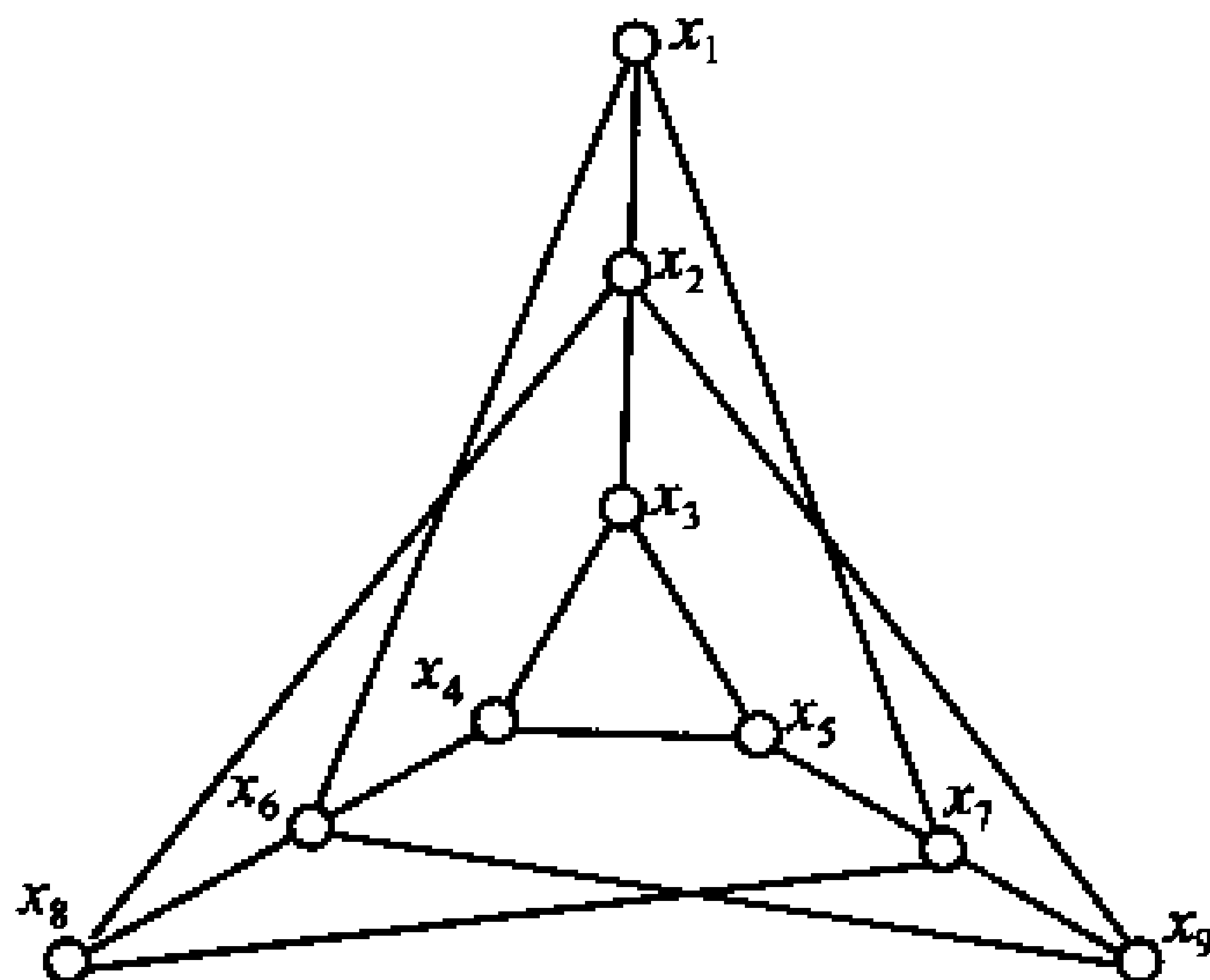


图 1.24

然而,定理 1.6 中的条件不是充分的. 例如 Petersen 图 G. 任取 $S\subset V(G)$,不难验证:

当$|S|\leqslant 2$时，有$\omega(G-S)=1\leqslant|S|$；

当$|S|=3$时，有$\omega(G-S)\leqslant 2<|S|$；

当$|S|=4$时，有$\omega(G-S)\leqslant 3<|S|$；

当$|S|\geqslant 5$时，有$\omega(G-S)\leqslant 5\leqslant|S|$.

所以 Petersen 图满足定理 1.6 中的条件，但由例 1.8.1 知Petersen图是非 Hamilton 图. □

下面介绍 Hamilton 图的充分条件. 由于环和平行边不影响图中 Hamilton 圈的存在性，所以在以下的讨论中，我们只考虑简单图.

定理 1.7(Ore,1960) **设G是$v(\geqslant 3)$阶简单图. 若对于G中任何不相邻两顶点x和y均有$d_G(x)+d_G(y)\geqslant v$，则G是 Hamilton 图.**

证明

方法 1 （反证法）设G是满足假定条件的极大非 Hamilton 图，即G是满足假定条件的非 Hamilton 图，但对G中任何不相邻的两顶点x和y，$G+xy$是 Hamilton 图. 由于$\nu\geqslant 3$，所以G是非完全图.

设x和y是G中不相邻两顶点. 由假定$G+xy$是 Hamilton 图，因而$G+xy$中任何一条 Hamilton 圈都含边xy. 因此，G中含一条连接x和y的 Hamilton 路P. 设

$$P=((x=)x_1,x_2,\cdots,x_{\nu-1},x_\nu(=y)).$$

令
$$S=\{x_i\in V(P):\ xx_{i+1}\in E(G),\ 1\leqslant i\leqslant\nu-2\},$$
$$T=\{x_j\in V(P):\ yx_j\in E(G),\ 2\leqslant j\leqslant\nu-1\}.$$

则由于G是简单图，所以，

$$|S|=d_G(x),\qquad |T|=d_G(y).$$

而且由于y不在$S\cup T$中，所以

$$|S\cup T|\leqslant\nu-1.$$

我们能进一步断定

$$|S\cap T|=0.$$

这是因为，若存在$x_i\in S\cap T$，则

$$C=(x,x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{\nu-1},y,x_i,\cdots,x_2,x)$$

是G中一条 Hamilton 圈. 矛盾于我们对G的假定. 于是

$$d_G(x)+d_G(y)=|S|+|T|=|S\cup T|\leqslant\nu-1.$$

矛盾于定理中假定的条件. 所以，G是 Hamilton 图.

方法 2 下面提供的论证方法对理解定理 1.8 的证明是很有用的.

由假设易知G是连通的并且含有圈. 设$C=(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_1)$是$G$中最长圈. 若$k<\nu$，则令$R=V(G)\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$. 由于$G$是连通的，所以存在$y\in R$

与 C 中某点，不妨设为 x_k 相邻．由于 C 的最长性，所以 $x_1y\notin E(G)$．令

$$S=\{x_i\in V(C):\ x_1x_{i+1}\in E(G),\ 1\leqslant i\leqslant k-1\},$$
$$T=\{x_j\in V(C):\ yx_j\in E(G),\ 2\leqslant j\leqslant k\}.$$

则
$$|S\cup T|\leqslant k,\qquad |S\cap T|=0. \tag{1.3}$$

这是因为，若存在 $x_i\in S\cap T$，则 G 含一条圈

$$C'=(x_1,x_{i+1},\cdots,x_k,y,x_i,\cdots,x_2,x_1)$$

且 $|C'|=|C|+1$，矛盾于 C 的最长性．

由(1.3)式，x_1 和 y 在 C 上的邻点数目 $d_C(x_1)$ 和 $d_C(y)$ 满足：

$$d_C(x_1)+d_C(y)=|S|+|T|=|S\cup T|\leqslant k. \tag{1.4}$$

另一方面，由 C 的最长性知，对任何 $z\in R,z\neq y$，边 x_1z 和 yz 至多有一条存在．所以 x_1 和 y 在 R 中的邻点数目 $d_R(x_1)$ 和 $d_R(y)$ 满足：

$$d_R(x_1)+d_R(y)\leqslant \nu-k-1. \tag{1.5}$$

由(1.4)和(1.5)式，有

$$d_G(x_1)+d_G(y)\leqslant k+\nu-k-1=\nu-1,$$

这矛盾于假定．所以 $k=\nu$，即 C 是 G 中 Hamilton 圈． □

推论 1.7(Dirac，1952)　**设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单图．若 $\delta(G)\geqslant\frac{\nu}{2}$，则 G 是 Hamilton 图．**

证明　这是定理 1.7 的直接推论． □

考虑圈 $C_n(n\geqslant 6)$ 知，上述两个条件都不是必要的．这两个充分条件可以推广到有向图上，我们将它们作为下列结果的推论．

定理 1.8(Bondy & Thomassen，1977)　**设 $C=(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_1)$ 是强连通简单图 D 中最长有向圈．若 $k<\nu$，则存在 $x\in V(D)\setminus V(C)$ 和整数 $a\in[1,k]$，$b\in[1,k-1]$ 使得**

(i) $(x_a,x)\in E(D)$，

(ii) x_{a+i} **与** x **不相邻**，$\forall i\in[1,b]$，

(iii) $d_D(x)+d_D(x_{a+b})\leqslant 2\nu-1-b$，**其中**$(a+b)$**是**(mod k)**的．**

证明　令 $S=V(C)$．因为 D 是强连通，并且 C 不是 Hamilton 圈，所以存在 $x_i,x_j\in S$ 使在 $D-(S\setminus\{x_i,x_j\})$ 中有一条与 C 边不交的 (x_i,x_j) 路 P．若 $x_i\neq x_j$，则 P 称为 S 路；若 $x_i=x_j$，则 P 称为 S 圈．

情形 1　D 中不含 S 路．

设 $P=(x_a,y_1,\cdots,y_t,x_a)$ 是 S 圈，其中 $x_a\in S$．令 $x=y_1$．因为 D 不含 S 路，所以对任何 $i\in[1,k]$，$i\neq a$，x 与 x_i 都不相邻．于是有

$$|E_D[x,S]|\leqslant 2. \tag{1.6}$$

由于 D 不含 S 路，所以对任何 $y\in V\setminus S$，$y\neq x$，边 (x_{a+1},y) 和 (y,x) 至多有

一条属于 $E(D)$. 同样地，边 (x,y) 和边 (y,x_{a+1}) 至多之一属于 $E(D)$. 于是有

$$|E_D[y,\{x_{a+1},x\}]|\leqslant 2,\quad \forall\, y\in V\setminus(S\cup\{x\}). \tag{1.7}$$

又显然有

$$|E_D[x_{a+1},S]|\leqslant 2(k-1). \tag{1.8}$$

所以由(1.6)，(1.7) 和(1.8)式有

$$d_D(x)+d_D(x_{a+1})\leqslant 2+2(k-1)+2(\nu-k-1)=2\nu-2.$$

在此情形下只须令 $b=1$ 即有定理成立.

情形 2 D 中含 S 路.

设 $P=(x_a,y_1,\cdots,y_t,x_{a+r})$ 是 D 中使 r 最小的 S 路. 由 C 的最长性知 $r\geqslant 2$. 令 $x=y_1$.

由 r 的最小性知，对任何 $i\in[1,r-1]$，x 与 x_{a+i} 不相邻. 又由 C 的最长性知，对任何 $i\in[1,k-1]$，边 (x_i,x) 和边 (x,x_{i+1}) 至多之一在 $E(D)$ 中，于是有

$$|E_D(x,S)|\leqslant k-r+2. \tag{1.9}$$

对任何 $y\in V\setminus S$，$y\neq x$，及任何 $i\in[1,r-1]$，有

$$E_D[y,\{x,x_{a+i}\}]\leqslant 2. \tag{1.10}$$

令 b 为最大的 $i\in[1,r-1]$，使 $D[S]$ 中含有向 (x_{a+r},x_a) 路 P'，并且

$$V(P')=\{x_{a+r},x_{a+r+1},\cdots,x_{a-1},x_a,x_{a+1},\cdots,x_{a+i-1}\}.$$

由 b 的最大性和 x_{a+b} 不在 P' 上，并且 $|V(P')|=k-r+b$ 知

$$|E_D[x_{a+b},V(P')]|\leqslant k-r+b+1, \tag{1.11}$$

$$|E_D[x_{a+b},S\setminus V(P')]|\leqslant 2(r-b-1). \tag{1.12}$$

由(1.9)，(1.10)，(1.11)和(1.12)式有

$$\begin{aligned}d_D(x)+d_D(x_{a+b})&\leqslant(k-r+2)+(k-r+b+1)\\&\quad+2(r-b-1)+2(\nu-k-1)\\&=2\nu-b-1.\end{aligned}$$

□

推论 1.8.1(Meyniel, 1973) **设 D 是强连通简单图. 若对 D 中任何不相邻两顶点 x 和 y 均有 $d_D(x)+d_D(y)\geqslant 2\nu-1$，则 D 是 Hamilton 图.**

推论 1.8.2(Ghouila—Houri, 1960) **设 D 是强连通简单图. 若对任何 $x\in V(D)$ 均有 $d_D(x)\geqslant\nu$，则 D 是 Hamilton 图.**

推论 1.8.3(Nash-Williams, 1969) **设 D 是简单图，$\delta=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}$. 若 $\delta\geqslant\frac{1}{2}\nu>1$，则 D 是 Hamilton 图.**

推论 1.8.4(Camion, 1959) **每个强连通竞赛图都是 Hamilton 图.**

推论 1.8.5(Woodall, 1972) **设 D 是简单图. 若对 D 中任何两顶点 x 和 y，或者 $(x,y)\in E(D)$ 或者 $d_D^+(x)+d_D^-(y)\geqslant\nu$，则 D 是 Hamilton 图.**

推论 1.8.6(Rédei, 1934) **任何竞赛图含 Hamilton 路.**

上述推论的证明留给读者作为习题(习题 1.8.2).

习 题

1.8.1 (a)证明:设 G 是 Hamilton 图,则 G 无割点.

(b)证明:设 D 是 Hamilton 图,则 D 是强连通的.

(c)证明:设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图. 若 G 是 Hamilton 图,则 $|X|=|Y|$.

(d)举例说明(a)~(c)的逆都不真.

1.8.2 (a)给出推论 1.8.1 至推论 1.8.6 的证明.

(b)举例说明推论 1.8.1 中

(i)当 $\nu\geqslant 5$ 时,条件"D 是强连通的"不能少;

(ii)当 $\nu\geqslant 3$ 时,条件"$\geqslant 2\nu-1$"不能改为"$=2\nu-2$".

(c)举例说明推论 1.8.1 至 1.8.6 的逆都不真.

1.8.3 (a)证明:若 D 是强连通简单有向图,$\nu\geqslant 3$ 且 $\varepsilon>(\nu-1)(\nu-2)+2$,则 D 为 Hamilton 图.

(b)构造一个强连通非 Hamilton 简单图 D,使得 $\varepsilon=(\nu-1)(\nu-2)+2$.

1.8.4 (a)证明:若 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单无向图,且 $\varepsilon>\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)+1$,则 G 为 Hamilton 图.

(b)构造一个非 Hamilton 简单图 G 使 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)+1$.

1.8.5 简单图 G 的闭包(**closure**)是指用下述方法得到的 G 的简单母图:反复添加边连接图中其顶点度之和不小于 ν 的不相邻的两顶点,直到没有这样的两顶点为止. 用 $C(G)$ 表示 G 的闭包. 证明(J. A. Bondy & V. Chvátal,1974):

(a)$C(G)$ 由 G 唯一确定;

(b)简单图 G 是 Hamilton 图$\Leftrightarrow C(G)$是 Hamilton 图;

(c)定理 1.7 和推论 1.7.

1.8.6 设 G 是不含割点,且至少有 3 个顶点的简单图. 利用习题 1.8.5(b)证明:若对任何使 $d_G(x,y)=2$ 的两顶点 x 和 y 均有 $\max\{d_G(x),d_G(y)\}\geqslant\frac{1}{2}\nu$,则 G 是 Hamilton 图. (范更华,1984)

1.8.7 证明:设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分简单图,$|X|=|Y|=n\geqslant 2$. 若 G 满足下列条件之一,则 G 是 Hamilton 图:

(a)$d_G(x)+d_G(y)>n$, 对任何 $x\in X,y\in Y,xy\notin E(G)$;

(b)$\varepsilon(G)>n^2-n+1$;

(c) $\delta(G)>\frac{1}{2}n$.

1.8.8 (a)证明:D 是 Euler 图$\Leftrightarrow L(D)$是 Hamilton 图.

(b)举例说明(a)中"$\Rightarrow$"对无向图不真.

1.8.9　设 n 是正整数，G 是简单图且对任何不相邻两顶点 x 和 y 有 $d_G(x)+d_G(y)\geq\frac{1}{2}(\nu+n)$．$F\subseteq E(G)$ 且 $|F|=n$．证明：若 $G[F]$ 是点不交路之并，则 G 存在一条 Hamilton 圈 C 使 $F\subseteq E(C)$．

1.8.10　设 G 是 $\nu(\geq3)$ 的非 Hamilton 连通图．证明：若对任何不相邻两顶点 x 和 y 有 $d_G(x)+d_G(y)\geq k$，则 G 中存在长至少为 k 的路．

1.8.11　证明：下述五问题等价（C. St. J. A. Nash-Williams，1969）：

(a) 含 Hamilton 圈的无向图的确定；

(b) 含 Hamilton 路的无向图的确定；

(c) 含 Hamilton 有向圈的有向图的确定；

(d) 含 Hamilton 有向路的有向图的确定；

(e) 含 Hamilton 圈的 2 部分图的确定．

1.9　图的矩阵表示

设 (V,E,ψ) 是一个有向图 D 或者一个无向图 G，其中 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$，$E=\{a_1,a_2,\cdots,a_\varepsilon\}$．则 V 中元素与 E 中元素之间的关联关系能够体现在该图的邻接矩阵与关联矩阵中．

所谓**邻接矩阵**（**adjacency matrix**）是指 $\nu\times\nu$ 阶矩阵：

$$\mathbf{A}=(a_{ij}),\quad 其中\ a_{ij}=\mu(x_i,x_j),$$

这里 $\mu(x_i,x_j)$ 表示有向图 D 中以 x_i 为起点且以 x_j 为终点的有向边的数目或者无向图 G 中连接 x_i 和 x_j 的边的数目．有向图 D 和无向图 G 的邻接矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}(D)$ 和 $\boldsymbol{A}(G)$．

显然，$\boldsymbol{A}(G)$ 是对称矩阵，而 $\boldsymbol{A}(D)$ 一般说来不是对称矩阵．邻接矩阵是图的另一种表示形式．图常以这种表示形式存贮于计算机中．

图的**关联矩阵**（**incidence matrix**）是指 $\nu\times\varepsilon$ 阶矩阵：

$$\boldsymbol{M}=(m_x(a)),$$

其中 $x\in V$，$a\in E$，并且对无环有向图 D 有

$$m_x(a)=\begin{cases}1, & 当\ a\ 以\ x\ 为起点，\\ -1, & 当\ a\ 以\ x\ 为终点，\\ 0, & 其他；\end{cases}$$

而对无向图 G 有

$$m_x(a)=\begin{cases}1, & 当\ a\ 以\ x\ 为端点，\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

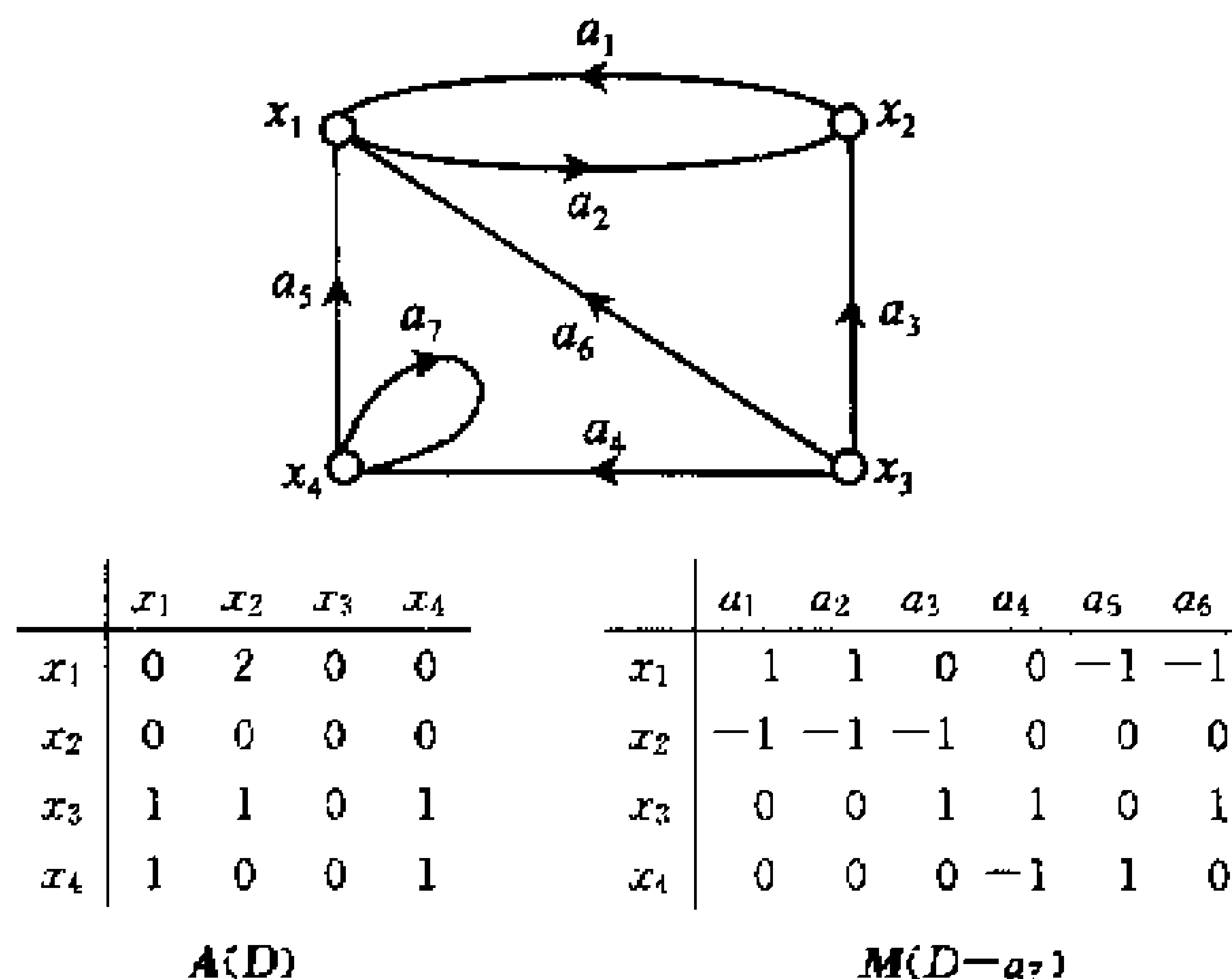
有向图 D 和无向图 G 的关联矩阵分别记为 $\boldsymbol{M}(D)$ 和 $\boldsymbol{M}(G)$．

图的邻接矩阵和关联矩阵在分析图的某些性质时常常是非常有用的．以

后，我们将看到，图的矩阵表示架起了图论与矩阵论之间的桥梁．利用这种表示，我们可以借助于矩阵的理论和分析方法来研究图论中的问题．反之，我们也可以借助于图的理论和分析方法来研究矩阵论中的问题．

例 1.9.1 图 1.25 和图 1.26 分别给出有向图 D 和无向图 G 的邻接矩阵和关联矩阵．

D：



	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	0	0
x_2	0	0	0	0
x_3	1	1	0	1
x_4	1	0	0	1

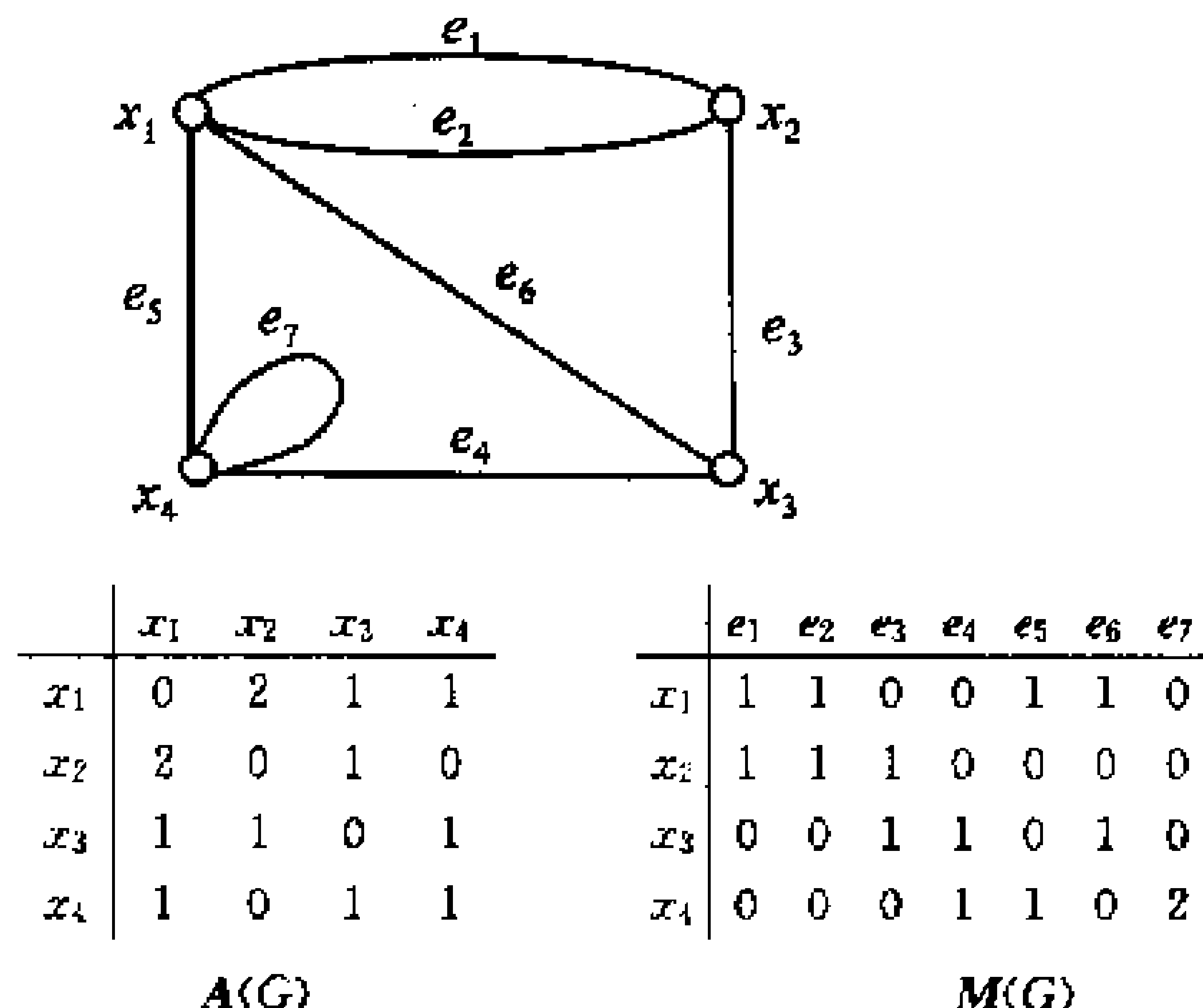
$\boldsymbol{A}(D)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	1	1	0	0	−1	−1
x_2	−1	−1	−1	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0	1
x_4	0	0	0	−1	1	0

$\boldsymbol{M}(D-a_7)$

图 1.25 有向图 D 及它的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和关联矩阵 $\boldsymbol{M}$

G:



	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	1	1
x_2	2	0	1	0
x_3	1	1	0	1
x_4	1	0	1	1

$\boldsymbol{A}(G)$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
x_1	1	1	0	0	1	1	0
x_2	1	1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0	1	0
x_4	0	0	0	1	1	0	2

$\boldsymbol{M}(G)$

图 1.26 有向图 G 及它的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 和关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$

注 设

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

是一个置换，则由

$$p_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{当 } j=\sigma(i), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

定义的 n 阶方阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 称为**置换方阵**(permutation matrix). 对于无标号图的邻接矩阵和关联矩阵都不是唯一的. 但任何两个邻接矩阵是置换相似的，而任何两个关联矩阵是置换相抵的.

下面，我们利用图的邻接矩阵来刻画图中连接任何两顶点之间长度为 k 的链的数目.

定理 1.9 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(D)$ 是有向图 D 的邻接矩阵，则 $\boldsymbol{A}^k$ 中的 (i,j) 元素是 D 中长度为 k 的从 x_i 到 x_j 的有向链的数目.

证明 对 $k\geqslant 1$ 用归纳法. 当 $k=1$ 时，由邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的定义知结论显然成立. 假定 $\boldsymbol{A}^{(k-1)}$ 中 (i,j) 元素 $a_{ij}{}^{(k-1)}$ 为 D 中长度为 $(k-1)$ 的 (x_i,x_j) 链的数目，并设 $a_{ij}{}^{(k)}$ 为 $\boldsymbol{A}^k$ 中 (i,j) 元素. 由于 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{(k-1)}\boldsymbol{A}$，所以

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{l=1}^{\nu}a_{il}^{(k-1)}\cdot a_{lj} \tag{1.13}$$

由于 D 中每条长度为 k 的 (x_i,x_j) 链都是由长度为 $(k-1)$ 的 (x_i,x_l) 链 $(1\leqslant l\leqslant\nu)$ 再接上形如 (x_l,x_j) 的边而得到. 所以由归纳假设和(1.13)式知 $a_{ij}^{(k)}$ 恰好是 D 中长度为 k 的 (x_i,x_j) 链的数目. □

注 定理 1.9 对无向图也是成立的，而且定理中的链不能改为迹或者路.

图的邻接矩阵和关联矩阵在分析图的性质和结构时起到了非常重要作用. 节末的习题中列举了一些. 下面举个例子，初学者可以暂不去读它.

例 1.9.2 设 $\boldsymbol{M}$ 是无环有向图 D 的关联矩阵，$\boldsymbol{M}_i$ 是从 $\boldsymbol{M}$ 中除掉第 i 行后得到的矩阵. 则 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$ 中所有元素的代数余子式都等于 $\det(\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{M}_i{}^T)$，其中 $\boldsymbol{M}^T$ 表示 $\boldsymbol{M}$ 的转置，$\det\boldsymbol{M}$ 表示 $\boldsymbol{M}$ 的行列式.

证明 令 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$，并用 n_{ij} 表示 $\boldsymbol{N}$ 中 (i,j) 元素，$V(D)=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$，则

$$n_{ij}=\begin{cases}d_D(x_i)=d_D^+(x_i)+d_D^-(x_i), & \text{当 } j=i \text{ 时;}\\ -\mu(x_i,x_j)-\mu(x_j,x_i), & \text{当 } j\neq i \text{ 时,}\end{cases}$$

其中 $\mu(x_i,x_j)$ 表示 D 中以 x_i 为起点并以 x_j 为终点的边的数目. 例如，对于图 1.25 所示有向图的关联矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1&-1\\-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&1&0\end{pmatrix}.$$

我们有

$$N=MM^T=\begin{pmatrix}4&-2&-1&-1\\-2&3&-1&0\\-1&-1&3&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

由N的定义立即可知N是对称的，而且所有的行和与列和都为零. 因而容易验证N中元素n_{ij}的代数余子式均相等(习题1.9.5(b)). N_{ij}表示n_{ij}的代数余子子式，于是不妨设

$$N_{ij}=N_{11},\qquad 1\leqslant i,j\leqslant \nu.$$

用$\boldsymbol{\alpha}_i$表示M中第i行的行向量. 于是，

$$N=MM^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ M_1\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1{}^T M_1{}^T)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1{}^T & \boldsymbol{\alpha}_1 M_1{}^T\\ M_1\boldsymbol{\alpha}_1{}^T & M_1M_1{}^T\end{pmatrix}.$$

由此知

$$N_{ij}=N_{11}=\det(M_1M_1^T).$$ □

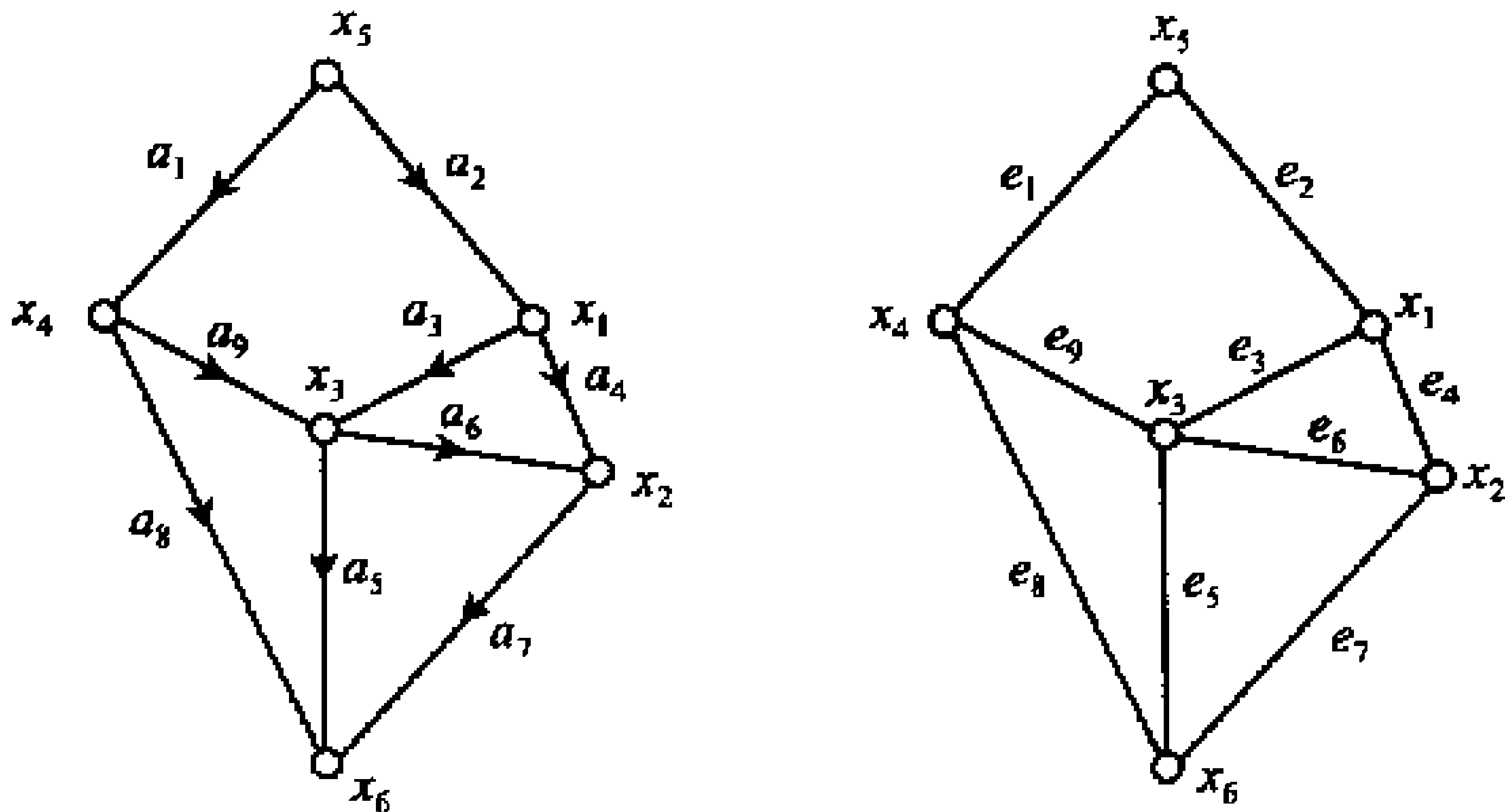
设A是顶点集$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$的无环无向图$G$的邻接矩阵，$M$是$G$的任何一个定向图$D$的关联矩阵，$B$是对角元素$b_{ii}=d_G(x_i)$的$\nu$阶对角方阵. 容易验证(习题1.9.5(a))

$$MM^T=B-A.$$

由例1.9.2知，MM^T中任何元素的代数余子式均相等，其值为$\det(M_iM_i{}^T)$. 这个值是D(或G)中一个非常重要的不变量. 这个不变量究竟是什么？我们将在2.4节中明白这一点.

习 题

1.9.1 写出下列有向图D和它的基础图G的邻接矩阵和关联矩阵.



(习题1.9.1)

1.9.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是邻接矩阵. 问：

(a) $\boldsymbol{A}$ 的行和与列和各表示什么？

(b) $\boldsymbol{A}$ 中所有元素之和表示什么？

1.9.3　设 $\boldsymbol{M}$ 是关联矩阵. 证明：

(a) $\boldsymbol{M}(D)$ 中第 i 行正元素之和为 $d_D^+(x_i)$，而负元素之和为 $d_D^-(x_i)$；$\boldsymbol{M}(G)$ 中第 i 行元素之和为 $d_G(x_i)$；

(b) $\boldsymbol{M}(D)$ 的列和为零；$\boldsymbol{M}(G)$ 列和为 2；

(c) rank $\boldsymbol{M}(D) \leqslant \nu - \omega$.

(d) $\boldsymbol{M}$ 置换相抵于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow D$(或 G)非连通.

1.9.4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 D(或 G)的邻接矩阵. 证明：

(a) $\boldsymbol{A}$ 置换相似于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \Leftrightarrow D$(或 G)为 2 部分图；

(b) $\boldsymbol{A}$ 置换相似于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow D$(或 G)非连通；

(c) $\boldsymbol{A}$ 置换相似于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow D$ 非强连通；

(d) $\boldsymbol{A}$ 置换相似于上三角矩阵 $\Leftrightarrow D$ 不含长度 $\geqslant 2$ 的有向圈；

(e) D 强连通 $\Leftrightarrow \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{\nu-1}>0$；

(f) D 是 $\nu(\geqslant 5)$ 阶强连通竞赛图，则 $\boldsymbol{A}^{d+3}>0$，其中 d 是 D 的直径.

1.9.5　设 G 是无环无向图，$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$，$D$ 是 G 的任何一个定向图，$\boldsymbol{M}$ 是 D 的关联矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是对角元素 $b_{ii}=d_G(x_i)$ 的 ν 阶对角方阵.

(a)证明：$\boldsymbol{MM}^T=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$.

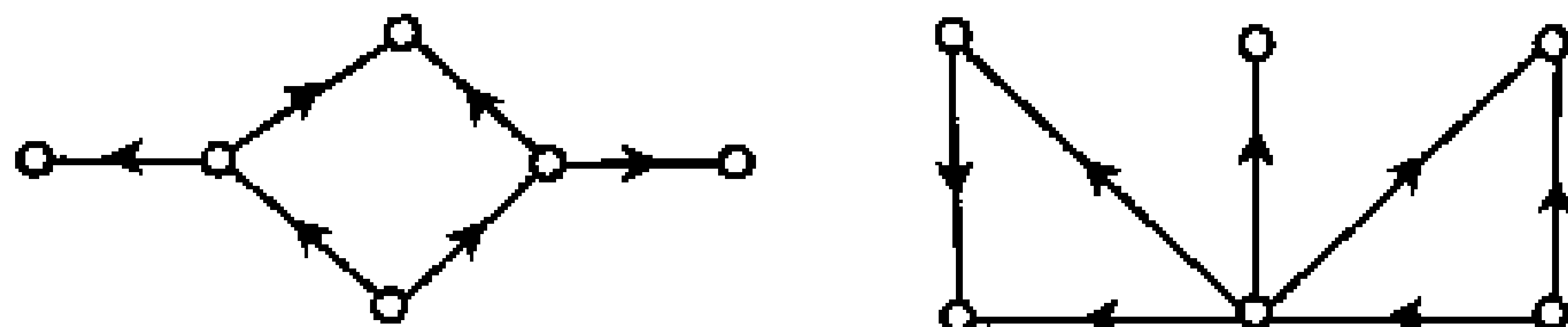
(b)证明：$\boldsymbol{MM}^T$ 中每个元素的代数余子式都相等.

(c)对习题 1.9.1 中图，验证(a)中结论并且求出 $\boldsymbol{MM}^T$ 中(1,1)元素的代数余子式的值(其值为 66).

1.9.6　设 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 D 的邻接矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 ν 阶单位方阵. 多项式

$$P_D(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^\nu+c_1\lambda^{\nu-1}+\cdots+c_{\nu-1}\lambda+c_\nu$$

称为 D 的**特征多项式**；$P_D(\lambda)$ 的根称为 D 的**特征根**.



(习题 1.9.6)

(a)求下列两个图的特征多项式(均为 λ^6)和特征根.

(b)证明：

$$c_k=\sum_{H\in\mathscr{H}_k}(-1)^{\omega(H)},\qquad k=1,2,\cdots,\nu,$$

其中 $\mathscr{H}_k$ 是有向图 D 中 k 阶 1 正则子图集.（M. Milic (1964)，H. Sachs (1964)，L. Spialter (1964)）

(c)证明：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\nu$ 是有向图 D 的特征根，则

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu=-c_1$；

(ii) D 中长度为 k 的有向闭链的数目为 $(\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_\nu^k)$.

(d)根据矩阵论的 Perron-Frobenius 定理(参见李乔(1988)，P. 71)："每个非负矩阵 A 总有一个非负特征根 λ 使得对 A 的任何特征根 r 均有 $|r|\leqslant\lambda$；而且对应一个非负特征向量". 这样的特征根 λ 称为 A 的**最大特征根**. 设 λ 是有向图 D 的最大特征根. 证明：

(i) $\delta^+(D)\leqslant\lambda\leqslant\Delta^+(D)$，　$\delta^-(D)\leqslant\lambda\leqslant\Delta^-(D)$，

而且，上式等号成立 $\Leftrightarrow D$ 是正则图.

(ii) 若 D 强连通且 $\lambda=\delta^+(D)$(或 $=\delta^-(D)$)，则对任何 $x\in V(D)$ 均有 $d_D^+(x)=\lambda$ (或 $d_D^-(x)=\lambda$)并且 λ 的重数是 1.

(e)证明：若 G 是 k 正则无向图，则 k 是 G 的特征根，而且对 G 的任何特征根 λ 均有 $|\lambda|\leqslant k$.

1.9.7 (a)设 A 是有向图 D 的邻接矩阵. 证明：存在多项式 $p(x)$ 使得

$J=p(A)\Leftrightarrow D$ 是强连通正则图，其中 J 为全 1 矩阵.

(b)设 C_n 是 n 阶有向圈，A 是 C_n 的邻接矩阵. 求出多项式 $p(x)$，使得 $J=p(A)$.

1.9.8 证明(参见习题 1.5.10)：

(a)设 D 是直径为 d 的强连通有向图. 若 $d\geqslant 2$ 且 $\Delta=\max\{\Delta^+(D),\Delta^-(D)\}\geqslant 2$，则 $\nu(D)\leqslant\Delta^d+\Delta^{d-1}+\cdots+\Delta^2+\Delta$；(J. Plesník & Š. Znám (1974)和 W. G. Bridges & S. Touge (1980))

(b)设 G 是直径为 2 的无向图. 若 $\Delta=\Delta(G)\neq 2,3,7$ 或 57，则 $\nu(G)\leqslant\Delta^2$.　(A. J. Hoffman & R. R. Singleton (1960))

1.9.9 设 G 是 ν 阶简单无向图，$V(G)=\{x_1,\cdots,x_\nu\}$，$A$ 为 G 的邻接矩阵，B 是对角元素 $b_{ii}=d_G(x_i)$ 的 ν 阶对角方阵. 令 $A^*=B-A$. 证明：

(a) A^* 是半正定矩阵；

(b) G 是连通的 $\Leftrightarrow$ rank $A^*=\nu-1$. (D. Raghavarao, 1977)

应　用

1.10 本原方阵的本原指数

每个元素都非负的矩阵称为**非负矩阵**(**nonnegative matrix**). 随着非负方阵的应用日益扩展，它的基本特征已认为是矩阵理论的经典内容之一. 本节考虑非负方阵的一个重要组合性质——本原性. 考察下列 3 阶非负方阵：

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},B^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},B^4=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=B.$$

这说明不存在任何整正数 k 使 B^k 中每个元素都大于零. 再考察如图 1.27 中所示的方阵 A. 通过计算知,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

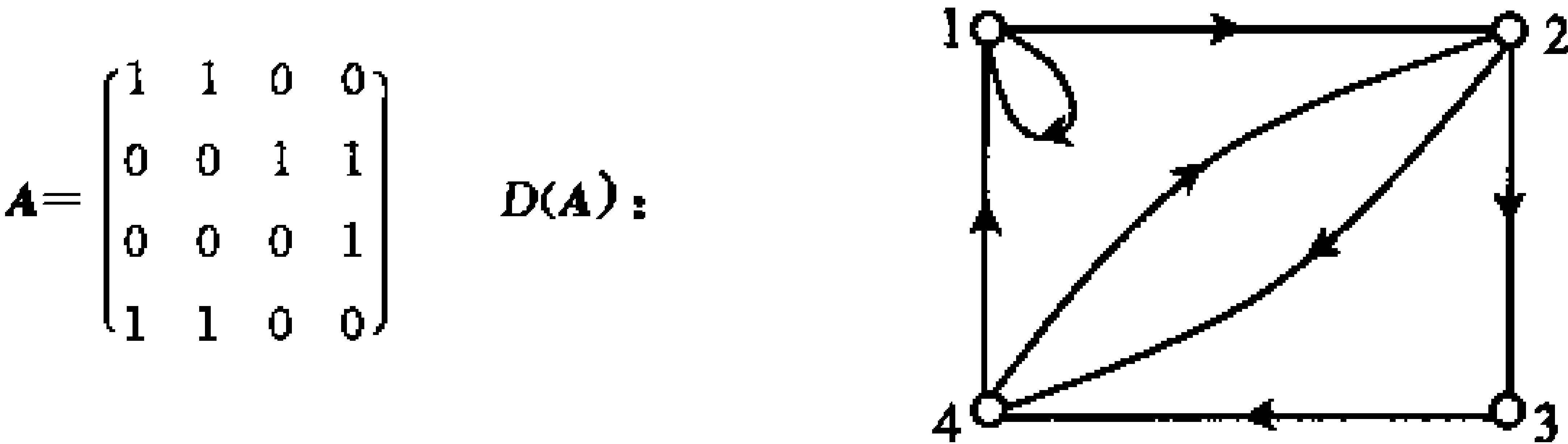


图 1.27　(0,1)矩阵 A 和它的伴随有向图 $D(A)$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}2&2&1&2\\2&2&1&1\\1&1&1&1\\2&2&1&2\end{bmatrix}.$$

所以,A^3 中每个元素都大于零.

n 阶非负方阵 A 称为**本原的(primitive)**,如果存在正整数 k 使 A^k 的每个元素都为正数(记为 $A^k>0$). 使 $A^k>0$ 成立的最小 k 称为 A 的**本原指数(primitive exponent)**,记为 $\gamma(A)$.

例如,上述方阵 B 不是本原的,而图 1.27 所示的矩阵 A 是本原的,并且 $\gamma(A)=3$.

由于 n 阶非负方阵只有 2^{n^2} 个不同的零位模式,所以由全体 n 阶本原方阵的本原指数所组成的正整数集 E_n 是有限集. Wielandt(1950)指出,这个有限集的上确界是 $(n-1)^2+1$. 令人十分惊奇的是,这个纯粹矩阵理论的结果却可以归结为图论结果的一个直接推论.

由于本原方阵的本原性及其本原指数只与方阵的零元素位置分布有关,而与非零元素的具体数值无关. 所以我们可以假设所有非零元素均为 1,即所谓的 **(0,1)方阵**.

有向图是研究(0,1)方阵组合结构的最有力工具. 事实上,在 1.9 节我们已看到,任何无平行边有向图的邻接矩阵都是(0,1)方阵. 反之,任何一个 n 阶(0,1)方阵 A,总存在一个 n 阶无平行边有向图 D 使其邻接矩阵 $A(D)=A$.

例如,设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶(0,1)方阵. 构作有向图 $D=D(A)=(V(D),E(D))$ 如下:

$$V(D)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\quad (x_i,x_j)\in E(D)\Leftrightarrow a_{ij}=1.$$

显然 D 是无平行边的有向图而且以 $\boldsymbol{A}$ 为其邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(D)$. $D=D(\boldsymbol{A})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随有向图**(**associated digraph**)(见图 1.27). 因此,n 阶(0,1)方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶无平行边的有向图 $D=D(\boldsymbol{A})$ 一一对应.

若 $\boldsymbol{A}$ 是本原方阵,则 $D(\boldsymbol{A})$ 称为**本原有向图**(**primitive digraph**). 换言之,有向图 D 称为本原的,如果 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原的. $\gamma(\boldsymbol{A})$ 称为 D 的**本原指数**,记作 $\gamma(D)$. 对于(0,1)方阵 $\boldsymbol{A}$ 的本原性及其本原指数的研究就可以转化为研究有向图 $D(\boldsymbol{A})$ 的本原性及其本原指数这样一个等价的图论问题了.

对于一般的有向图 D,它的本原性及其本原指数 $\gamma(D)$ 的确定一般说来并不容易. 但若已知 D 是本原的,确定 $\gamma(D)$ 的一个比较好的上界是很容易的. 为此先给出有向图为本原的一个充分必要条件.

定理 1.10(Rosenblatt,1957) **有向图 D 是本原的 $\Leftrightarrow D$ 为强连通的而且 D 中所有不同的有向圈长度 l_i 所构成的正整数集 $(l_1,l_2,\cdots,l_c)$ 的最大公约数为 1,即** g. c. d$(l_1,l_2,\cdots,l_c)=1$.

证明 (⇒) 因为 D 是本原的 $\Leftrightarrow D$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原的,所以存在正整数 k 使 $\boldsymbol{A}^k>0$. 由定理 1.9 知,对于 D 中任何两顶点 x_i 和 x_j, D 中存在一条长度为 k 的 (x_i,x_j) 链,也存在一条长度为 k 的 (x_j,x_i) 链. 因而 D 是强连通的.

设 x_i 和 x_j 是 D 中任意两顶点. 设 $(x_i,x_k)\in E(D)$. 由于 D 中存在长度为 k 的 (x_k,x_j) 链 W_{kj},于是 $(x_i,x_k)\cup W_{kj}$ 就是 D 中长度为 $(k+1)$ 的 (x_i,x_j) 链. 特别,对任何 $x_i\in V(D)$, D 中存在长度为 k 和 $(k+1)$ 的 (x_i,x_i) 链.

由于 D 中任何 (x_i,x_i) 链 W_{ii} 是若干条有向圈之并,故 W_{ii} 的长度必是 g. c. d$(l_1,l_2,\cdots,l_c)$ 的倍数. 因而 k 和 $(k+1)$ 均是 g. c. d$(l_1,l_2,\cdots,l_c)$ 的倍数, $1=(k+1)-k$ 也是 g. c. d$(l_1,l_2,\cdots,l_c)$ 的倍数,即有 g. c. d$(l_1,l_2,\cdots,l_c)=1$.

充分性的证明要用到数论中的所谓 Frobenius 集和 Frobenius 数.

设 $n_1,n_2,\cdots,n_l$ 是一组正整数. 下列数集称为 **Frobenius 集**:

$F(n_1,n_2,\cdots,n_l)=\{z_1n_1+z_2n_2+\cdots+z_ln_l:\ z_i$ 为非负整数$\}$.

Schur 引理 **若** g. c. d$(n_1,n_2,\cdots,n_l)=1$,**则存在正整数 n_0 使对所有的整数 $n\geqslant n_0$ 均有 $n\in F(n_1,n_2,\cdots,n_l)$.**

证明 记 $R=n_1+n_2+\cdots+n_l$. 由于 g. c. d$(n_1,n_2,\cdots,n_l)=1$,所以存在整数(不一定非负)$z_1,z_2,\cdots,z_l$ 使得

$$z_1n_1+z_2n_2+\cdots+z_ln_l=1.$$

从而存在整数 $c_{ij}(i=0,1,\cdots,R-1,j=1,2,\cdots,l)$ 使得

$$c_{i1}n_1+c_{i2}n_2+\cdots+c_{il}n_l=i,\quad i=0,1,\cdots,R-1.$$

令
$$K=\max\{|c_{ij}|:0\leqslant i\leqslant R-1,1\leqslant j\leqslant l\},$$

并令 $n_0=KR$,当 $n\geqslant n_0$ 时,记

$$n = qR + r, \quad (0 \leqslant r \leqslant R-1, q \geqslant K),$$

则
$$n = qR + \sum_{j=1}^{l} c_{rj} n_j = \sum_{j=1}^{l} (q + c_{rj}) n_j.$$

由于
$$q \geqslant K \geqslant |c_{rj}| \quad (j = 1, 2, \cdots, l),$$

所以，$q + c_{rj} \geqslant 0$，即 $n \in F(n_1, n_2, \cdots, n_l)$. □

满足 Schur 引理中条件的最小整数 n_0 称为 **Frobenius 数**，记为 $\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_l)$. Frobenius 数的确定是个困难的问题. 不过，我们能容易证明

$$\varphi(n_1, n_2) = (n_1 - 1)(n_2 - 1).$$

证明 (i)先证 $\varphi(n_1, n_2) \geqslant (n_1 - 1)(n_2 - 1)$. 若不然，由 Schur 引理可设$(n_1 - 1)(n_2 - 1) - 1 \in F(n_1, n_2)$. 则存在非负整数 z_1 和 z_2 使

$$(n_1 - 1)(n_2 - 1) - 1 = z_1 n_1 + z_2 n_2,$$

即
$$(n_1 - 1)n_2 - n_1 = z_1 n_1 + z_2 n_2. \tag{1.14}$$

于是
$$[z_2 - (n_1 - 1)]n_2 \equiv 0 \pmod{n_1}.$$

由于 g. c. d$(n_1, n_2) = 1$，所以

$$z_2 \equiv (n_1 - 1) \pmod{n_1}$$

由于 $z_2 \geqslant 0$，所以 $z_2 \geqslant n_1 - 1$. 由(1.14)式便得$(z_1 + 1)n_1 \leqslant 0$. 这矛盾于 $z_1 \geqslant 0$. 故 $\varphi(n_1, n_1) \geqslant (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

(ii)再证 $\varphi(n_1, n_2) \leqslant (n_1 - 1)(n_2 - 1)$. 因为 g. c. d$(n_1, n_2) = 1$，所以存在整数 p，$0 \leqslant p \leqslant n_1 - 1$，使得

$$pn_2 \equiv (n_1 - 1) \pmod{n_1}.$$

由于 $pn_2 \geqslant 0$，所以 $pn_2 \geqslant n_1 - 1$. 于是存在非负整数 q 使得

$$pn_2 - (n_1 - 1) = qn_1.$$

因此
$$\begin{aligned}(n_1 - 1)(n_2 - 1) &= (n_1 - 1 - p)n_2 + pn_2 - (n_1 - 1) \\ &= (n_1 - 1 - p)n_2 + qn_1 \in F(n_1, n_2).\end{aligned}$$

故有 $\varphi(n_1, n_2) \leqslant (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

结合(i)和(ii)，我们证明了 $\varphi(n_1, n_2) = (n_1 - 1)(n_2 - 1)$. □

下面给出定理 1.10 的充分性证明.

($\Leftarrow$)设 D 是满足定理条件的有向图. 为证明 D 是本原的，由本原定义和定理 1.9，我们只须证明：存在正整数 k 并且对于 D 中任意两顶点(不必相异)x 和 y，存在一条长度为 k 的(x, y)链.

设 x 和 y 是 D 中任意两顶点，取一条含 D 中所有顶点的(x, y)链 W_{xy}(由例 1.5.5 或者习题 1.5.2 知这条有向链是存在的)，并记 W_{xy} 的长度为 d_{xy}.

由于 W_{xy} 含 D 中所有顶点，所以它与 D 中所有有向圈都有公共顶点. 因此，在 W_{xy} 中添加任意若干条有向圈的任意若干次后仍是一条(x, y)链. 于是，若 $r \in F(l_1, l_2, \cdots, l_t)$，则 $d_{xy} + r$ 也是 D 中某条(x, y)链的长度. 由于 g. c. d$(l_1, l_2,$

$\cdots,l_c)=1$，所以由 Schur 引理知 $\varphi(l_1,l_2,\cdots,l_c)$ 存在．取

$$k=\max\{d_{xy}:x,y\in V(D)\}+\varphi(l_1,l_2,\cdots,l_c),$$

则对 D 中任意两顶点 x 和 y，均有

$$k\geqslant d_{xy}+\varphi(l_1,l_2,\cdots,l_c).$$

令 $$k=d_{xy}+r,\qquad \text{其中 } r\geqslant\varphi(l_1,l_2,\cdots,l_c),$$

则由 $\varphi(l_1,l_2,\cdots,l_c)$ 的定义知 $r\in F(l_1,l_2,\cdots,l_c)$．由此知 D 中存在长度为 k 的 (x,y) 链．

由于 x 和 y 的任意性且 k 与 x 和 y 的选取无关，所以对于 D 中每个顶点有序对 (x,y)，D 中存在长度为 k 的 (x,y) 的链．因此 D 是本原的． □

推论 1.10.1　设 D 是 $n(\geqslant2)$ 阶本原有向图，则 D 中必含有长度小于 n 的有向圈．

证明　由于 D 是本原的，所以由定理 1.10 知 D 是强连通的．因此对于 D 中任何两顶点 x 和 y，D 中存在 (x,y) 路 P 和 (y,x) 路 Q，$P\cup Q$ 含有向圈．若 D 中所有有向圈的长度 $l_1=l_2=\cdots=l_c=n$，则 g. c. d$(l_1,l_2,\cdots,l_c)=n\geqslant2$．矛盾定理 1.10．故 D 中必含有长度小于 n 的有向圈． □

推论 1.10.2　设 T_n 是 n 阶竞赛图．若 T_n 是本原的，则 T_n 是强连通的且 $n\geqslant4$．反之，若 $T_n(n\geqslant4)$ 是强连通的，则 T_n 是本原的，而且 $\gamma(T_4)=9$，$\gamma(T_n)\leqslant n+2$，$n\geqslant5$．

证明　设 T_n 是本原的，则由定理 1.10 知 T_n 是强连通的，因此 $n\geqslant3$．但强连通的 T_3 是一条长度为 3 的有向圈．故由推论1.10.1知其不是本原的，所以 $n\geqslant4$．

反之，设 $T_n(n\geqslant4)$ 是强连通的．如果 $n=4$，那么在同构意义下，强连通的 4 阶竞赛图只有一个（参见图 1.5 所示）．容易验证（习题 1.10.1）它的邻接矩阵是本原的且 $\gamma(T_4)=9$．

当 $n\geqslant5$ 时，则由推论 1.3 和定理 1.9 知 T_n 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{d+3}>0$，其中 $d=d(T_n)$．因而 T_n 是本原的．由于 $d\leqslant n-1$，所以 $\gamma(T_n)\leqslant d+3\leqslant n+2$． □

注　在习题 1.10.3 中我们将看到，存在 $T_n(n\geqslant5)$ 使 $\gamma(T_n)=n+2$．事实上，Moon 和 Pallman(1967) 已证明：当 $n\geqslant7$ 时，对于 $[3,n+2]$ 中任何整数 k，存在 T_n 使 $\gamma(T_n)=k$（见习题1.10.4）．

定理 1.11 (Dulmage & Mendelsohn, 1967)　**设 D 是 $n(n\geqslant2)$ 阶本原有向图且含有长度为 s 的有向圈，则**

$$\gamma(D)\leqslant n+s(n-2).$$

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 是 D 的邻接矩阵．欲证 $\boldsymbol{A}^{n+s(n-2)}>0$，由定理1.9，我们只需证明对 D 中任意顶点有序对 (x_i,x_j)，D 中存在长度恰为 $n+s(n-2)$ 的 (x_i,x_j) 链．

设 C 是 D 中长度为 s 的有向圈. 由于 A 是本原的,所以 D 和 $D^s=D(A^s)$ 都是强连通的. 注意 $V(D^s)=V(D)$,$(x,y)\in E(D^s)\Leftrightarrow$(由定理 1.9)$D$ 中含长度为 s 的 (x,y) 链. 所以对任何 $x_k\in V(C)$,在 D^s 中有环. 因而在 D^s 中必存在长度恰为 $(n-1)$ 的 (x_k,x_j) 链,即 D 中存在长度恰为 $s(n-1)$ 的 (x_k,x_j) 链,记为 W_{kj}.

若 $x_i\in V(C)$,则设从 x_i 出发沿 C 正向走 $(n-s)$ 步到达的顶点为 $x_k\in V(C)$,并记这条长度恰为 $(n-s)$ 的 (x_i,x_k) 链为 C_{ik}. 于是,$C_{ik}\oplus W_{kj}$ 就是 D 中长度恰为

$$(n-s)+s(n-1)=n+s(n-2)$$

的 (x_i,x_j) 链.

若 $x_i\notin V(C)$,则取 x_i 到 C 的最短 (x_i,x_l) 路 P_{il},其中 $x_l\in V(C)$. 设 P_{il} 的长度为 l,则 $1\leqslant l\leqslant n-s$. 再设从 x_l 出发沿 C 正向走 $(n-s-l)$ 步到达的顶点为 $x_k\in V(C)$,并记这条长度为 $(n-s-l)$ 的 (x_l,x_k) 链为 C_{lk}. 于是,$P_{il}\oplus C_{lk}\oplus W_{kj}$ 就是 D 中长度恰为

$$l+(n-s-l)+s(n-1)=n+s(n-2)$$

的 (x_i,x_j) 链. 定理得证. □

推论 1.11 (Wielandt 定理)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(>1)$ 阶本原方阵,则

$$\gamma(\boldsymbol{A})\leqslant(n-1)^2+1.$$

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 是本原的 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的伴随有向图 $D(\boldsymbol{A})$ 是本原的. 由推论 1.10.1 知 $D(\boldsymbol{A})$ 中必有长度小于 n 的有向圈. 设 C 是 D 中长度为 $s\leqslant n-1$ 的有向圈. 由定理 1.11 有

$$\begin{aligned}\gamma(\boldsymbol{A})&=\gamma(D)\leqslant n+(n-1)(n-2)\\&=(n-1)^2+1.\end{aligned}$$

□

Dulmage & Mendelsohn (1967) 已证明了 $\gamma(\boldsymbol{A})$ 的上界 $(n-1)^2+1$ 可以达到(见下面例子 1.10.1).

令 $E_n=\{\gamma(\boldsymbol{A}):\boldsymbol{A}$ 是 n 阶本原方阵$\}$,$W_n=(n-1)^2+1$ 并用 $[a,b]^0$ 表示 $[a,b]$ 内的整数集. 由推论 1.11 知 $E_n\subseteq[1,W_n]^0$. Dulmage & Mendelsohn(1964) 首先证明 $E_n\neq[1,W_n]^0$. n 阶本原方阵的本原指数在 E_n 中的分布问题可参见李乔和邵嘉裕(1988)的综述文章. 作为例子,我们确定两个矩阵的本原指数.

例 1.10.1　设

$$\underset{(n>2)}{\boldsymbol{A}_n}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

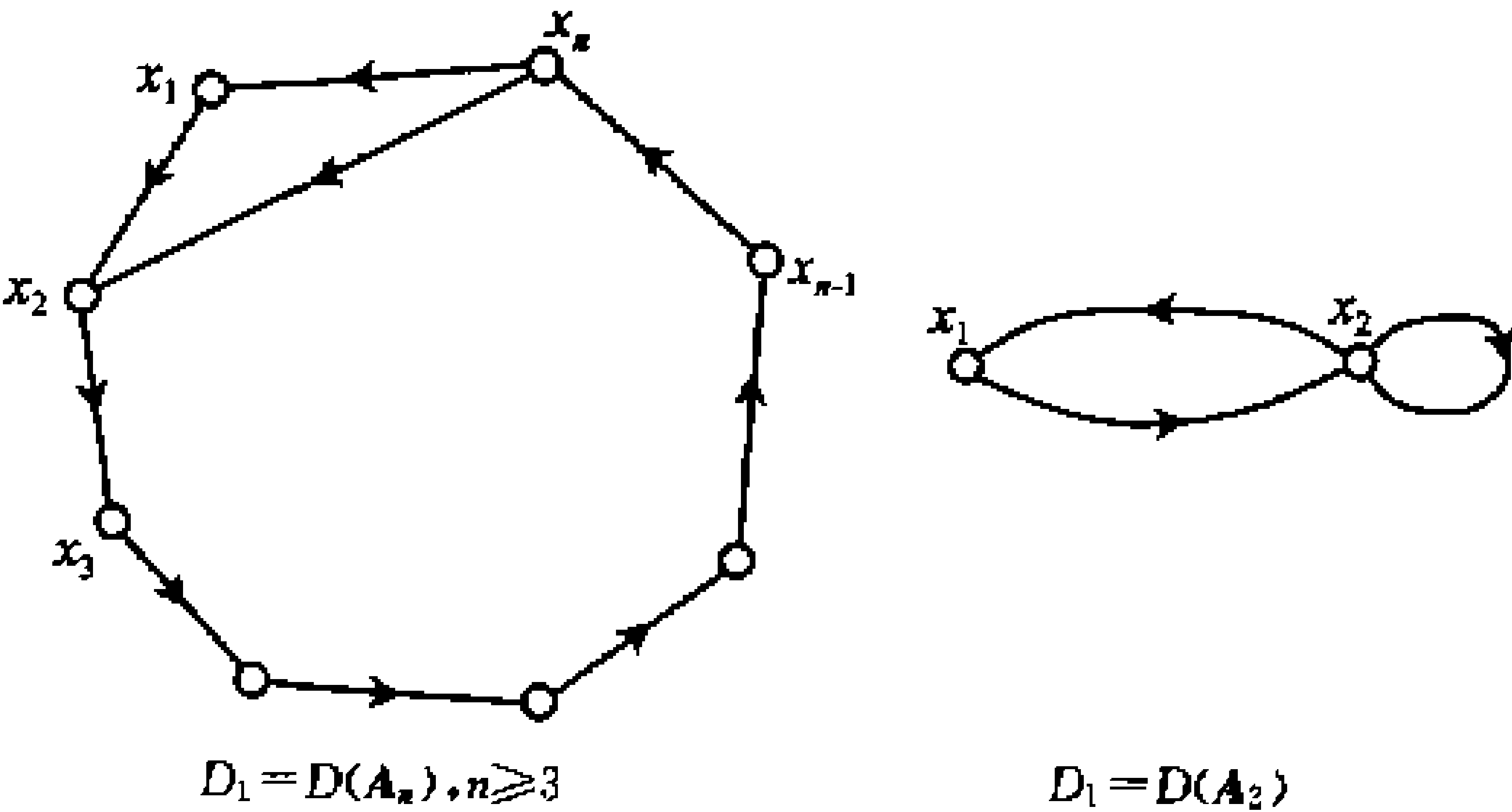
则 $\gamma(A_n)=(n-1)^2+1$.

证明 设 D_1 为 A_n 的伴随有向图 $D(A_n)$，如图 1.28 所示. 因为 D_1 中含有一条经过每个顶点的有向圈，所以 D_1 是强连通的. 又因为 D_1 中仅含一条长度为 n 的有向圈和一条长度为$(n-1)$的有向圈，并且 g. c. d$(n,n-1)=1$，所以由定理 1.10 知 D_1 是本原的. 由推论 1.11 知 $\gamma(D_1)\leqslant(n-1)^2+1$. 下面证明

$$\gamma(D_1)\geqslant(n-1)^2+1.$$

设 W 是 D_1 中一条长度大于 0 的(x_1,x_1)闭链. 显然，W 是由 D_1 中若干条有向圈合并而成. 由于 D_1 中仅含一条长度为 n 的有向圈和一条不含 x_1 且长度为$(n-1)$的有向圈，所以 W 至少含一条长 n 的有向圈. 故 W 的长度 l 必为

$$l=n-z_1n+z_2(n-1),\quad \text{其中 } z_1,z_2 \text{ 为非负整数}.$$



$D_1=D(A_n),n\geqslant3$ $D_1=D(A_2)$

图 1.28

因为 $z_1n+z_2(n-1)\in F(n,n-1)$，且 $\varphi(n,n-1)-1\notin F(n,n-1)$，所以 D_1 中不存在长度为$(n+\varphi(n,n-1)-1)$的有向(x_1,x_1)闭链. 故

$$\begin{aligned}\gamma(D_1)&\geqslant n+\varphi(n,n-1)\\&=n+(n-1)(n-2)\\&=(n-1)^2+1.\end{aligned}$$

□

例 1.10.2 设

$$\underset{(n\geqslant4)}{A_n}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1&0\\1&0&0&0&\cdots&0&0&1\\1&1&0&0&\cdots&0&0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

则 $\gamma(A_n)=(n-1)^2$.

证明 设 D_2 为 A_n 的伴随有向图 $D(A_n)$，如图 1.29 所示. 因为 D_2 中含有

一条经过每个顶点的有向圈,所以 D_2 是强连通的,而且 D_2 中仅含 3 条有向圈,其中一条长度为 n,另两条长度为 $n-1$. 由于 g. c. d$(n,n-1)=1$,所以 D_2 是本原的.

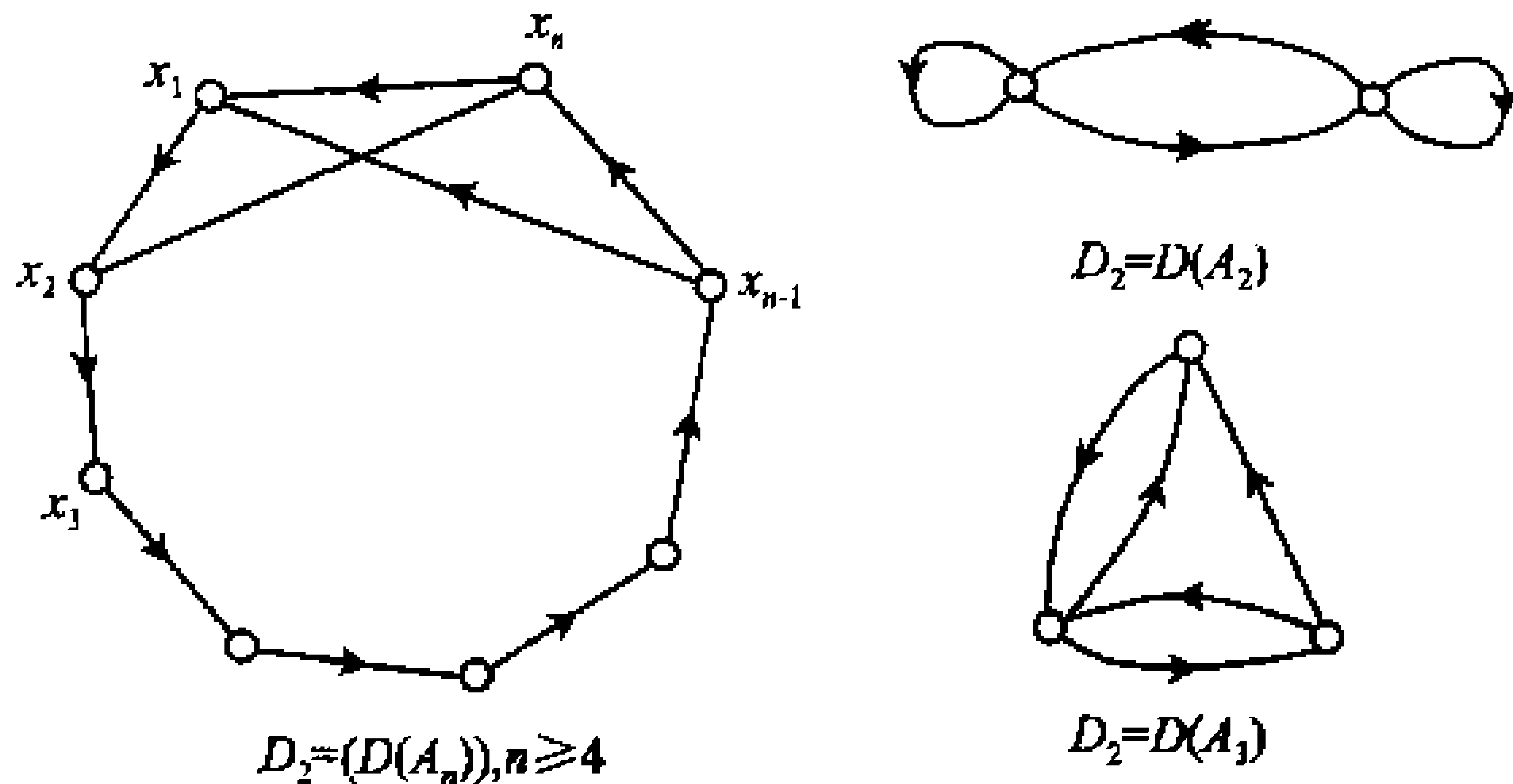


图 1.29

任取 $x,y\in V(D_2)$,令 P_{xy} 是 D_2 中最短 (x,y) 路,并令 P_{xy} 的长度为 d_{xy},则 $d_{xy}\leqslant n-1$. 由于 D_2 中任何顶点既含在长度为 n 的有向圈中,又含在长度为 $(n-1)$ 的有向圈中,所以在 P_{xy} 上添加若干条长度为 n 的有向圈和长度为 $(n-1)$ 的有向圈后仍是一条 (x,y) 链. 故对任意整数 $r\in F(n,n-1)$,D_2 中存在一条长度为 $(d_{xy}+r)$ 的 (x,y) 链. 令

$$q=\varphi(n,n-1)+n-1-d_{xy}.$$

由于

$$q=\varphi(n,n-1)+n-1-d_{xy}\geqslant\varphi(n,n-1),$$

所以 $q\in F(n,n-1)$. 于是 D_2 中存在长度为

$$d_{xy}+q=\varphi(n,n-1)+n-1$$

的 (x,y) 链. 由 x,y 的任意性,即有

$$\gamma(D_2)\leqslant\varphi(n,n-1)+(n-1)=(n-1)^2.$$

另一方面,D_2 中 (x_1,x_n) 路 Q 是唯一的,其长度为 $(n-1)$. 所以,D_2 中任何一条 (x_1,x_n) 链的长度 l 均可以表示为

$$l=n-1+r,\quad 其中\ r\in F(n,n-1).$$

由于 $\varphi(n,n-1)-1\notin F(n,n-1)$,所以 D_2 中不存在长度为 $n-1+\varphi(n,n-1)-1$ 的有向链,即

$$\gamma(D_2)\geqslant\varphi(n,n-1)+n-1=(n-1)^2.$$ □

注　当 $n=4$ 时,D_2 即为图 1.5 所示的 4 阶强连通竞赛图 T_4,因而 $\gamma(T_4)=9$(见习题 1.10.1).

习 题

1.10.1 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

(a)画出 A 和 B 的伴随有向图 D.

(b)证明:A 不是本原方阵,而 B 是本原方阵且 $\gamma(B)=9$.

1.10.2 证明:

(a)含环的强连通有向图必是本原的;

(b)每个顶点都有环的强连通有向图 D 有 $\gamma(D)\leqslant d(D)$.

1.10.3 设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&\cdots&1&1&1\\1&0&0&1&1&1&\cdots&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&\cdots&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&\cdots&1&1&1\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$$

是 $n(\geqslant5)$阶(0,1)方阵. 证明:$\gamma(A)=n+2$.

1.10.4 设 T_n 是 $n(\geqslant4)$阶强连通竞赛图. 证明:

(a) $\gamma(T_n)\neq1,2$;

(b)当 $n\leqslant6$,则 $\gamma(T_n)\neq3$;

(c)设 $4\leqslant k\leqslant7$,则存在 T_5 使 $\gamma(T_5)=k$;

(d)设 $4\leqslant k\leqslant8$,则存在 T_6 使 $\gamma(T_6)=k$;

(e)设 $n\geqslant5$,且 $3\leqslant k\leqslant n+2$. 若存在 T_n 使 $\gamma(T_n)=k$, 则存在 T_{n+1} 使 $\gamma(T_{n+1})=k$,也存在 T'_{n+1} 使 $\gamma(T'_{n+1})=k+1$;

(f)设 $n\geqslant7$ 且 $3\leqslant k\leqslant n+2$,则存在 T_n 使 $\gamma(T_n)=k$.

1.10.5 n 阶方阵 A 称为可约的(**reducible**),如果存在置换方阵 P 使

$$PAP^T=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{11} 是 l 阶方阵,$1\leqslant l\leqslant n-1$,右上角是 $l\times(n-l)$阶零矩阵. 反之称为不可约的(**irreducible**). 证明:

(a) $n(>1)$阶非负方阵 A 不可约$\Leftrightarrow D(A)$是强连通的;

(b)设 A 是不可约的非负方阵且对角线上至少有 $k(\geqslant1)$个非零元素,则 A 为本原的,并且 $\gamma(A)\leqslant2n-k-1$.

小结与参考文献

历史上，图和图的理论曾经被许多位数学家各自独立地建立和研究过. 这是因为图论本身就是数学的一部分，所以出现这种情况并不是偶然的巧合. 著名的瑞士数学家 Euler 于 1736 年解决 Königsberg 七桥问题的论文被公认为图论第一篇论文. 后来，Kirchhoff(1847)和 Cayley(1857)在各自的研究中独立地发现了树(见第 2 章). Hamilton(1856)从设计一个游戏而提出图论中的 Hamilton 问题，同时著名的四色猜想也被提出来了(见第 6 章). 1878 年，数学家 J. Sylvester 第一次用到"图(Graph)"这个词. 1936 年，匈牙利数学家 König 写出第一本图论书(有限图与无限图的理论). 早期的历史和参考文献见 Biggs, Lloyd, & Wilson (1976).

本章主要介绍了图的基本概念、术语、记号、运算，图形表示和矩阵表示以及顶点度、路、回、圈，Euler 图和 Hamilton 图的若干基本结果. 本章涉及的概念和记号繁多，但这些都是进一步学习以下章节所必需的，读者应花大力气熟悉和掌握它们. 本章还通过例题介绍了图论中常用的基本方法，如数学归纳法、反证法、最大边法、最短路法和最长路法. 每节尾的习题是正文的补充和拓展. 建议读者努力去做一些，以便从中加强对正文中概念的理解和常用方法的掌握.

本章应用部分介绍了图论在矩阵论中的应用. 图论方法已成为矩阵论中基本方法之一，有兴趣的读者可参见李乔(1988)和邵嘉裕(1991)的著作. 关于 de Bruijn 图在编码方面的应用，有兴趣的读者可参阅万哲先(1976)的著作. 有关 Euler 图和 Hamilton 图的应用，我们将分别在 4.6 节和 5.5 节讨论.

一般参考书，建议读者参阅 Bondy & Murty (1976)的著作，这是一部公认的图论入门书. 两本更高层次的图论参考书是 Diestel(1997)和 Bollotas(1998). 有关 Euler 图的研究可参见 Fleischner(1983)的综述文献. 有关 Hamilton 问题的研究结果和进展可参见 Bermond(1978), Bermond & Thomassen(1981)和 Gould(1991)的综述文献.

1 Bermond J C. Hamilton graphs. *Selected Topics in Graph Theory*, *I*, (edited by Beineke L W and Wilson R J). London: Academic Press, 1978. 127～168

2 Bermond J C and Thomassen C. Cycles in digraphs— a survey. *J Graph Theory*, 1981, **5**: 1～43

3 Biggs N L, Lloyd E K and Wilson R J. *Graph Theory* 1736～1936. Oxford: Clarendon Press, 1976

4 Bollotas B. *Modern Graph Theory*. New York: Springer-Verlag Inc, 1998(有影印版：现

代图论,北京:科学出版社,2001)

5 Bondy J A and Murty U S R. *Graph Theory with Applications*. London and Basingstoke: Mac Millan Press,1976.(中译本:邦迪 J A,默蒂 U S R 著,吴望名等译. 图论及其应用. 北京:科学出版社,1984)

6 Bondy J A and Thomassen C. A short proof of Meyniel's theorem. *Discrete Math*, 1977, **19**:195~197

7 Camion P. Chemins et ciruits hamiltoniens des graphes complets. *C R Acad Sci Pairs*, 1959,**249**:2151~2152

8 Diestel R. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag:1997

9 Dirac G A. Some theorems on abstract graphs. *Proc London Math Soc*, 1952,**2**:69~81

10 Dulmage A L and Mendelsohn N S. Graph and matrices. *Graph Theory and Theoretical Physics* (edited by Harary F). London: Academic Press,1967. 167~227

11 Euler L. Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comment. Academiae,Sci Imp Petropolitanae*,1736,**8**: 128~140

12 Fleischner H. Eulerian graphs. *Selected Topics in Graph Theory*, Ⅱ,(edited by Beineke L W and Wilson R J) London:Academic Press,1983. 17~54

13 Ghouila-Houri A. Une Condition suffisance déxistece dún ciruit hamiltonien. *C R Acad Sci Paris*, 1960,**251**:495-497

14 Gould R J. Updating the haimiltonian problem—a survey. *J Graph Theory*, 1991,**15**(2): 121~157

15 Hierholzer C. Über die Möglichkeit,einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren. *Math Ann*, 1873,**6**:30~32

16 König D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesell schaft,1936

17 李乔. 矩阵论八讲. 上海:上海科学技术出版社,1988

18 李乔. 拉姆塞理论. 长沙:湖南教育出版社,1991

19 李乔、邵嘉裕. 论布尔方阵的幂序列. 高校应用数学学报,1988,**2**(3):186~199

20 Moon J W. On subtournaments of a tournament. *Canad Math Bull*,1966,**9**:297~301

21 Moon J W and Pallman N J. On the power of tournament matrices. *J Comb Theory*,1967, **3**:1~9

22 Nash-Willians C St J A. Hamiltonian circuits in graphs and digraphs. *The Many Facets of Graph Theory,Lecture Notes in Mathematics* (edited by Chartrand G and Kapoor S F). Berlin,Heidelberg and NewYork:Springer-Verlag, 1969,**110**:237~243

23 Ore O. Note on Hamilton circuits. *Amer Math Monthly*, 1960,**67**:55

24 Rédei L. Ein kombinatorischer Satz. *Acta Litt Sci Szeged*, 1934,**7**:39~43

25 Rosenblatt D. On the graphs and asymptotic forms of finite boolean relation matrices. *Naval Res Quart*, 1957,**4**:151~167

26 邵嘉裕. 组合数学. 上海:同济大学出版社,1991

27 Sylvester J J. Chemistry and algebra. *Nature*, 1877～1878, 17:284=*Math. Papers*, vol. **3**:103～104

28 万哲先. 代数和编码. 北京:科学出版社, 1976

29 Wielandt H. Unzerlegbare, nicht negative matrizem. *Math Z*, 1950, **52**:642～648

30 Woodall D R. Sufficient conditions for circuits in graphs. *Proc London Math Soc*, 1972, **24**:739～755

第2章 树与图空间

当人们用图来模拟某一个系统时,常常遇到这样的情况——代表该系统的模拟图不含圈.例如,城市供水、供电系统就是这样的系统.若把该供水系统中所有的阀门或供电系统中所有的开关作为模拟图的顶点,而把供水管道或供电线路作为模拟图的边,则这样构作出来的模拟图不含圈. 本章讨论的就是这样一种特殊类型的图.

不含圈的连通图称为树. 几乎所有的作者都这么称呼它. 树是图论中最简单而又最重要并且应用最广的一类图.

本章首先介绍树的基本性质,接着讨论支撑树与圈集以及割集之间的关系.借助于线性代数中线性空间的理论,引进图空间、圈向量和割向量的概念. 进一步揭示支撑树、圈集与割集之间的密切关系. 利用图的矩阵表示,我们将看到有向图 D 中所有割向量构成的向量空间 $\mathscr{B}(D)$,D 中所有圈向量构成的向量空间 $\mathscr{C}(D)$ 与 D 的关联矩阵中所有行向量构成的向量空间 $\mathscr{M}(D)$ 之间的密切关系:$\mathscr{B}(D)$ 与 $\mathscr{M}(D)$ 相等,而 $\mathscr{C}(D)$ 是 $\mathscr{B}(D)$ 在图 D 的边空间 $\mathscr{E}(D)$ 中的正交补. 图空间是图论中重要概念,除了理论作用外,它是各种应用,特别是电网络分析中重要工具之一.

在对图空间的讨论中,支撑树起了重要作用. 我们将看到,每棵支撑树都可以生成一组圈向量,这组圈向量构成圈空间 $\mathscr{C}$ 中一组基;也可以生成一组割向量,这组割向量构成割空间 $\mathscr{B}$ 中一组基. 由于圈空间 $\mathscr{C}$ 和割空间 $\mathscr{B}$ 在边空间 $\mathscr{E}$ 中正交互补,所以任何一棵支撑树都可以生成图的边空间 $\mathscr{E}$ 的一组基. 我们还将导出连通图中支撑树的计数公式.

在应用部分中,我们将介绍求最小连接问题和最短路问题的有效算法,以及树、圈集、割边集与图空间在电网络分析中的应用.

2.1 树 与 林

不含圈的图称为**林**(**forest**). 不含圈的连通图称为**树**(**tree**). 设 T 是有向图,并且为树. 若存在 $x\in V(T)$ 使得对任何异于 x 的 $y\in V(T)$,T 中含 (x,y) 路,则称 T 为**根**(**root**)**在** x **的树形图**(**arborescence**),亦称**外向树**(**out-tree**). 图 2.1 所示的分别是林、树和树形图. 由于 D 是林$\Leftrightarrow$$D$ 的每个连通分支都是树,而且

D 是树$\Leftrightarrow D$ 的基础图 G 是树. 所以在本节, 我们只须对无向图 G 来叙述树和林的性质.

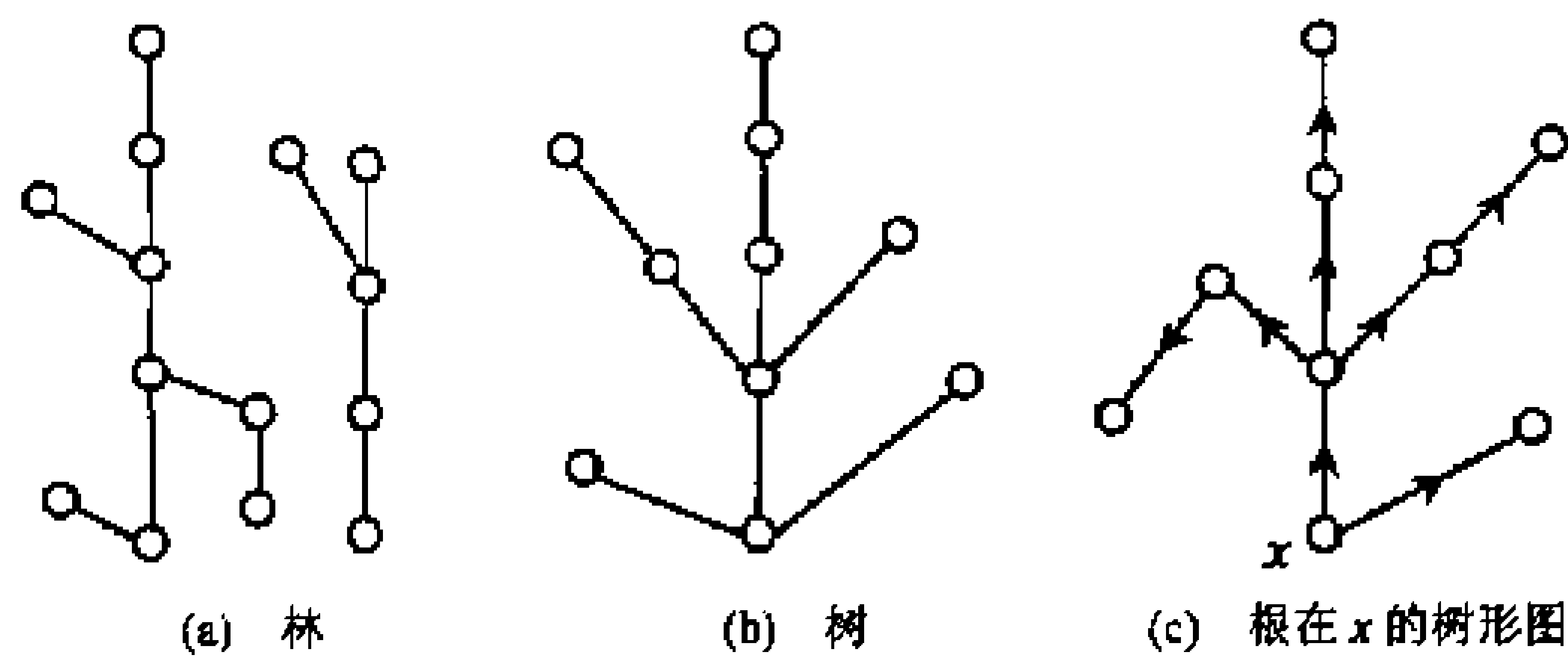


图 2.1

定理 2.1　G 是树$\Leftrightarrow G$ 中无环, 并且任何不同两顶点恰由一条路所连接.

证明　($\Rightarrow$)由于 G 是树, 所以 G 不含环和平行边, 即 G 是简单图. 设 $x,y\in V(G)$, 并设 P_1 和 P_2 是 G 中两条不同的 xy 路. 则 $P_1\cup P_2$ 是闭链, 并且存在 $e\in E(P_1)$ 且 $e\notin E(P_2)$. 子图 $(P_1\cup P_2)-e$ 是连通的. 设 $e=uv$. 于是在 $(P_1\cup P_2)-e$ 中存在 uv 路 P. 且 $P+e$ 是 G 中的圈, 矛盾于 G 是树的假定. 所以 G 中恰有一条 xy 路.

($\Leftarrow$)由于 G 中任何不同两顶点由一条路连接并且无环, 所以 G 是连通的简单图. 假若 G 含圈 C, 则 $\nu(C)\geqslant 3$. 任取 $x,y\in V(C)$. 于是在 C 上有两条连接 x 和 y 的路, 矛盾于假定. 所以 G 中不含任何圈, 即 G 是树. □

定理 2.2　G 是树$\Leftrightarrow G$ 连通且对任何 $e\in E(G)$ 均有

$$\omega(G-e)=2.$$

证明　设 G 是树, 由定理 2.1 知 G 是简单连通图. 设 $e=xy\in E(G)$, 则 $\omega(G-e)\leqslant 2$. 另一方面, 由定理 2.1 知 xey 是 G 中唯一 xy 路. 所以 x 和 y 在 $G-e$ 的不同连通分支. 于是 $\omega(G-e)\geqslant 2$, 故有 $\omega(G-e)=2$.

反之, 设 G 含圈 C 并设 $e\in E(C)$, $\psi_G(e)=xy$. 由于 G 是连通的且 $\omega(G-e)=2$, 所以 e 不是环, 即 x 和 y 在 $G-e$ 的不同连通分支中. 然而 $C-e$ 是 $G-e$ 中 xy 的路, 矛盾. 所以 G 是树. □

定理 2.3　G 是树$\Leftrightarrow G$ 连通且 $\varepsilon=\nu-1$.

证明　($\Rightarrow$)因为 G 是树, 所以 G 是连通的. 下面对 $\varepsilon\geqslant 0$ 用归纳法来证明 $\varepsilon=\nu-1$. 当 $\varepsilon=0$ 时, 结论显然成立. 假定对于边数小于 ε 的所有树均使结论成立, 并设 G 是边数为 $\varepsilon(\geqslant 1)$ 的树. 取 $e\in E(G)$. 由定理 2.2 知 $\omega(G-e)=2$. 设 G_1 和 G_2 是 $G-e$ 的两个连通分支, 则 G_1 和 G_2 都为树, 并且 $\varepsilon(G_i)<\varepsilon$, $i=1,2$. 由归纳假设 $\varepsilon(G_i)=\nu(G_i)-1$. 于是

$$\varepsilon(G)=\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+1=\nu(G_1)+\nu(G_2)-1=\nu(G)-1.$$

($\Leftarrow$)对 $\nu\geqslant 1$ 用归纳法来证明 G 中不含圈. 当 $\nu=1$ 时, $\varepsilon=0$. G 是平凡图,

因而无圈. 下设任何 $n(\geq 1)$ 阶且 $\varepsilon=n-1$ 的连通图都不含圈，并设 G 是 $n+1$ 阶且 $\varepsilon=n$ 的连通图. 由于 G 是连通的非空图，所以 $\delta(G)\geq 1$. 若 $\delta(G)\geq 2$，则由推论 1.1.1 知

$$2n = 2\varepsilon = \sum_{x\in V} d_G(x) \geq 2(n+1),$$

这是不可能的. 所以存在 $x\in V(G)$ 使 $d_G(x)=1$. 于是 $G-x$ 是 n 阶连通图，并且 $\varepsilon(G-x)=n-1$. 由归纳假设 $G-x$ 不含圈. 所以 G 是不含圈的连通图，因而是树. □

推论 2.3 G 是林 $\Leftrightarrow \varepsilon=\nu-\omega$.

例 2.1.1 无孤立点的林至少有 2ω 个 1 度点.

证明 设 G 是无孤立点的林，则 $\delta(G)\geq 1$. 由推论 1.1.1 和推论 2.3 有

$$\sum_{x\in V} d_G(x) = 2\varepsilon = 2(\nu-\omega).$$

由此可知 G 中至少有 2ω 个 1 度点. □

作为林或树的应用，我们举一个例子.

例 2.1.2(J. A. Bondy, 1972) 设 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 n 个不同子集族，则存在 $x\in X$ 使得 $A_1\backslash\{x\},A_2\backslash\{x\},\cdots,A_n\backslash\{x\}$ 互不相同.

证明 首先注意到，若 $A,B\subset X, A\neq B$，且 $A\backslash\{i\}=B\backslash\{i\}$，则或者 $A=B\cup\{i\}$ 或者 $B=A\cup\{i\}$. 因此，A 与 B 的对称差 $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=\{i\}$.

用反证法. 设对任何 $i\in X$，存在 $k=k(i)$ 和 $l=l(i)$，$1\leq k<l\leq n$，使得 $A_k\backslash\{i\}=A_l\backslash\{i\}$. 由于 $A_k\neq A_l$，所以 $A_k\Delta A_l=\{i\}$. 构作一个简单无向图 G：$V(G)=X$，$k(i)l(i)\in E(G)\Leftrightarrow A_k\Delta A_l=\{i\}$，$i=1,2,\cdots,n$. 由我们的假定有 $\varepsilon(G)\geq n=\nu(G)$. 由推论 2.3 易知 G 中含有圈. 设 $(i_1,i_2,\cdots,i_s,i_1)$ 是 G 中一条圈. 不妨设 $i_j=j$，$i_j=k(j)$，则 $i_{j+1}=l(j)$，$j=1,2,\cdots,s$. 于是

$$\{s\}=A_1\Delta A_s=(A_1\Delta A_2)\Delta(A_2\Delta A_3)\Delta\cdots\Delta(A_{s-1}\Delta A_s)$$
$$\subset\bigcup_{j=1}^{s-1}(A_j\Delta A_{j+1})=\{1,2,\cdots,s-1\}.$$

这显然是一个矛盾，所以命题得证. □

注意，当 $\mathscr{A}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\cdots,\{n\}\}$ 时，上述的 x 则不存在.

习 题

2.1.1 证明：有向图 D 是根在 x 的树形图 $\Leftrightarrow D$ 不含有向圈，$d_D^-(x)=0$ 且对任何异于 x 的 $y\in V(D)$ 均有 $d_D^-(y)=1$.

2.1.2 设 G 是非平凡树，v_i 表示 G 中 i 度点数目. 证明：

(a) G 中最长路两端点均为 1 度点；

(b)G中所有最长路有至少一个公共顶点；

(c)$v_1 \geqslant \Delta(G)$；

(d)若$v_1=2$，则G是一条路；

(e)或者$v_1 \geqslant v_i(i=2,3,\cdots,\Delta)$或者$v_2>v_1>v_i(i=3,4,\cdots,\Delta)$；

(f) 令$U=\{x\in V(G): d_G(x)\geqslant 3\}$，则$v_1=2+\sum\limits_{x\in U}(d_G(x)-2)$；

(g)若$d(G)\geqslant 2k-3$，$k\geqslant 1$，则G中含至少$\nu-k$条长度$\geqslant k$的路.

2.1.3 设T是非平凡非空树. 证明：

(a)T是2部分图；

(b)设$\{X,Y\}$是T的2部划分，则：

(i)若$|X|\geqslant|Y|$，则X中至少有1个1度点；

(ii)若$|X|=|Y|+k$，则X中至少有$k+1$个1度点.

2.1.4 设$G_1=(V,E_1)$和$G_2=(V,E_2)$是同一顶点集V上的两棵树，并设对任何$x\in V$，$G_1-x\cong G_2-x$. 证明：$d(G_1)=d(G_2)$.

2.1.5 设G是恰有$2k(k\geqslant 1)$个奇度点的林. 证明：G有k条边不交的路$P_1,\cdots,P_k$使得$E(G)=E(P_1)\cup\cdots\cup E(P_k)$.

2.1.6 设G是$k(\geqslant 2)$阶树. 证明：若H是简单无向图且$\delta(H)\geqslant k-1$，则H中有一个同构于G的子图.

2.1.7 设$G_i=(V_i,E_i)(i=1,2,\cdots,k)$是树$G$的子树，$B=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_k$. 证明：

(a)若$V_i\cap V_j\neq\varnothing$，$1\leqslant i\neq j\leqslant k$，则$B\neq\varnothing$；

(b)若$B\neq\varnothing$，则$G[B]$是G的子树.

2.1.8 饱和烃分子形如C_mH_n，其中每个碳原子的化合价为4，每个氢原子的化合价为1，并且任何化合价序列都不构成圈.

(a)证明：对每个正整数m，仅当$n=2m+2$时，C_mH_n存在.

(b)$m=1,2,3$，画出饱和烃分子模型图，它们分别代表什么化合物?

(c)当$m=4$时，饱和烃分子模型图有两个对应的化合物叫同分异构体. 画出这两个分子模型图并写出对应的同分异构体.

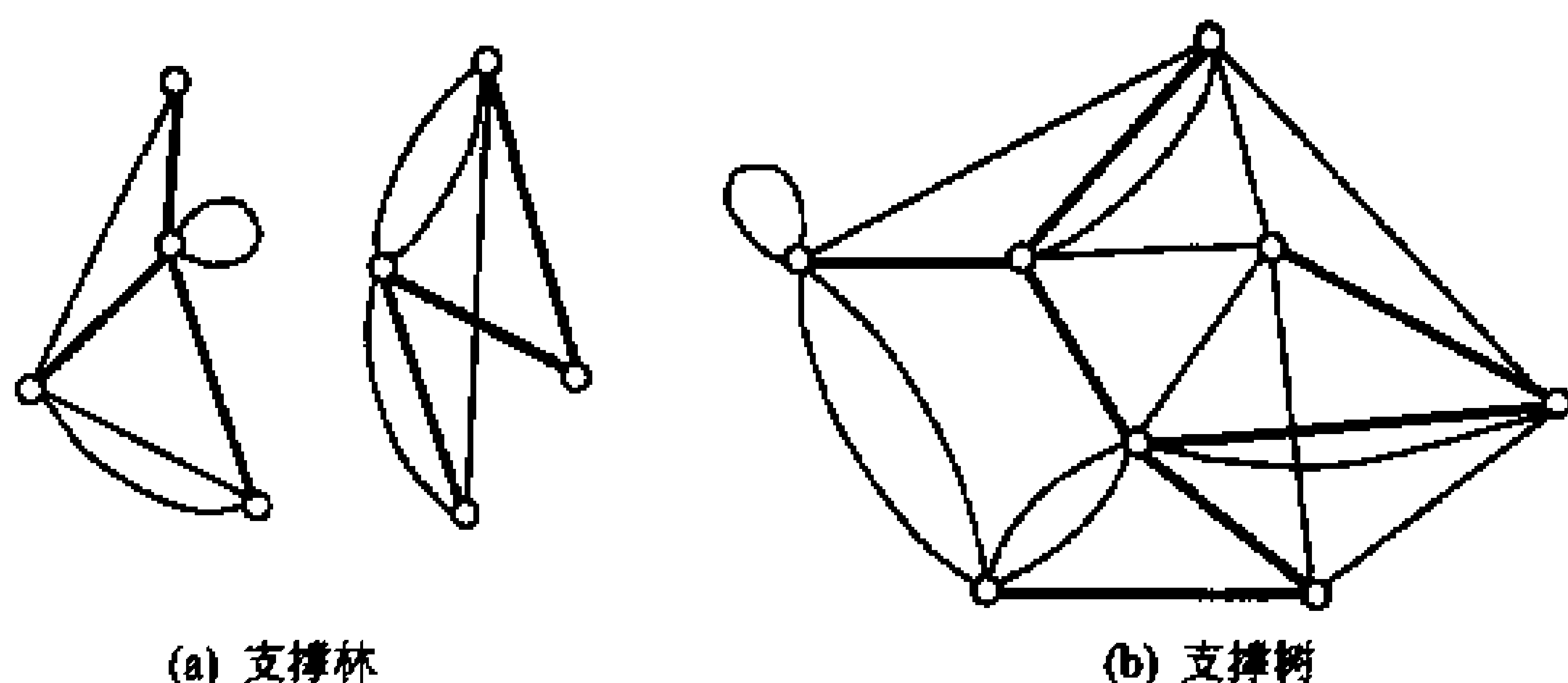
2.1.9 10个学生参加一次考试，试题有10道. 已知没有两个学生做对的题目完全相同. 证明：在这10道试题中可以找到1道试题，将这道试题取消后，每两个学生所做对的题目仍然不会完全相同.

2.2 支撑树与支撑林

设F是图D的支撑子图，并且$\omega(F)=\omega(D)$. 若F是林，则称F为D的**支撑林(spanning forest)**；若F是树，则称F为D的**支撑树(spanning tree)**. 图2.2粗边所示的是支撑林和支撑树. 支撑林和支撑树概念与边的方向无关，故只须对无向图来叙述它们的性质.

定理 2.4 每个连通图都含支撑树.

证明 设 T 是连通图 G 的连通支撑子图且使其边尽可能少. 于是,对任何 $e\in E(T)$ 均有 $\omega(T-e)=2$. 由定理 2.2 知 T 是树. □



(a) 支撑林 (b) 支撑树

图 2.2

推论 2.4.1 每个图都含支撑林或者支撑树.

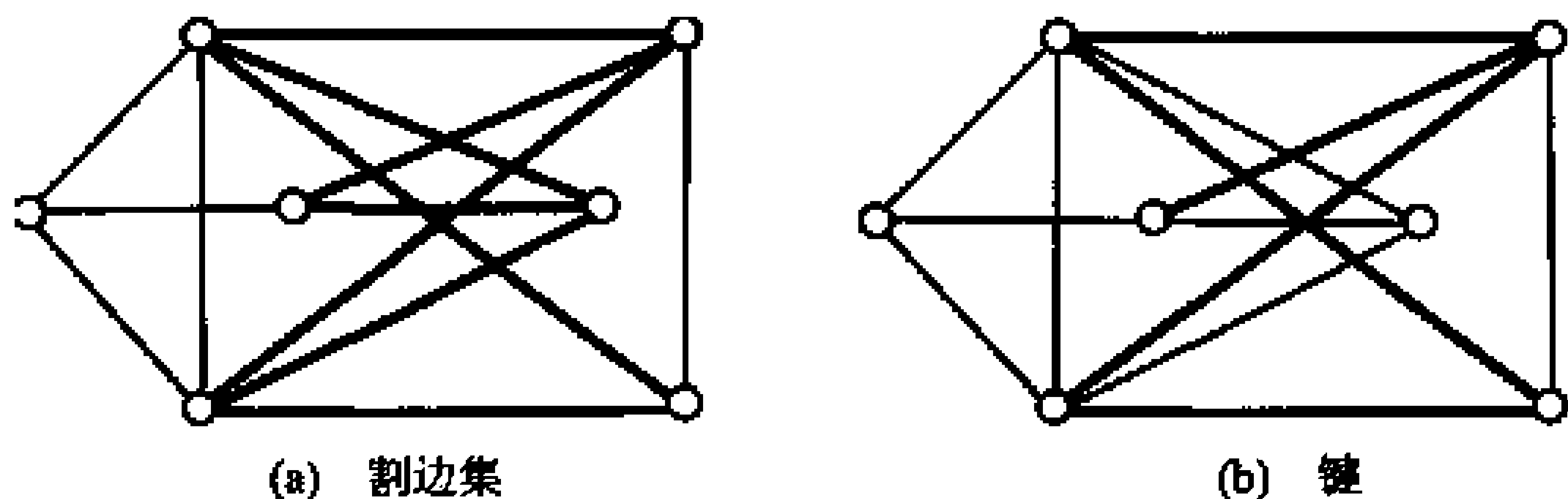
推论 2.4.2 每个图均有 $\varepsilon\geqslant\nu-\omega$.

证明 设 G 是任何一个图. 由推论 2.4.1 知 G 含支撑林 F. 再由推论 2.3 知,$\varepsilon(F)=\nu-\omega$. 于是 $\varepsilon(G)\geqslant\varepsilon(F)=\nu-\omega$. □

定理 2.5 设 F 是 G 的支撑林. 若 $E(G)\backslash E(F)$ 非空,则对其中的任何边 e, $F+e$ 含有且仅含有一条圈.

证明 设 $e\in E(G)\backslash E(F)$. 由支撑林的定义知 $F+e$ 含圈. e 的两端点为 x 和 y,则由定理 2.1 知,F 中含唯一的连接 x 和 y 的 P,于是 $P+e$ 是 $F+e$ 中唯一圈. □

设 B 是 E 的非空子集. 若存在非空子集 $S\subset V(D)$ 使 $B=[S,\overline{S}]$,则称 B 为 D 的**割边集**(**cut edge-set**). 若 B 的任何非空真子集都不是割边集,则称 B 为**键**(**bond**). 不难看出,若 B 是键,则 $\omega(D-B)=\omega(D)+1$. 边数为 1 的割边集即为割边(见 1.5 节). 反之,若 a 是 D 中一条割边,则 a 为割边集,且为键. 由于 $\omega(D)$ 与 D 中边的方向无关,所以割边集概念与 D 中边的方向无关,以下只须考虑无向图 G. 图 2.3 所示的是一个割边集和一个键(粗边表示).



(a) 割边集 (b) 键

图 2.3

设 H 是 G 的子图,则 $G-E(H)$ 称为 H 在 G 中的**余图**(**cograph**),记为 $\overline{H}(G)$. 易知,若 $G=K_\nu$,则 $\overline{H}(K_\nu)=H^c$(参见习题 1.2.6). 若 F 是 G 的支撑林(或树),则 $\overline{F}(G)$ 称为 G 的**余林**(或**余树**)(**coforest** 或 **cotree**).

例如，图 2.2(a)中粗边所示的子图是 G 的支撑林 F，而细边所示的子图是 G 的余林 $\overline{F}(G)$；(b)中粗边所示的子图是 G 的支撑树 T，而细边所示的子图是 G 的余树 $\overline{T}(G)$. 在不至于引起混淆的情况下，我们简记 $\overline{F}(G)$ 为 $\overline{F}$，简记 $\overline{T}(G)$ 为 $\overline{T}$. 有时也用 $\overline{F}$(或 $\overline{T}$)替代 $E(\overline{F})$(或 $E(\overline{T})$).

定理 2.6　设 F 是非空图 G 的支撑林. $e\in E(F)$，则

(i) $\overline{F}$ 不含键.

(ii) $\overline{F}+e$ 含有且仅含有一个键.

证明　(i)设 B 是 G 的键，则 $\omega(G-B)-1=\omega(G)=\omega(F)$. 因而 $E(F)\cap B\neq\varnothing$. 于是 $B\not\subseteq E(\overline{F})$.

(ii)设 S 是 $F-e$ 的某连通分支的顶点集，则 $B=[S,\overline{S}]$ 是 G 的割集，因而 $\overline{F}+e$ 含 G 的键. 设 $\overline{F}+e$ 含两个不同的键 B_1 和 B_2. 由于(i)$\overline{F}$ 不含键，所以 $e\in B_1\cap B_2$. 因此$(B_1\cup B_2)-e$ 含有 G 的键 B'(习题 2.2.5)，即 $\overline{F}$ 含键 B'. 矛盾于(i)，故 $\overline{F}+e$ 仅含一个键.　□

习　题

2.2.1　证明：G 中至少含 $\varepsilon-\nu+\omega$ 个不同的圈和 $\nu-\omega$ 个不同的键.

2.2.2　证明：设 D 是强连通图，$x\in V(D)$. 则 D 中存在根在 x 的支撑树形图.

2.2.3　(a)设 G 连通且 S 是 $V(G)$的非空真子集. 证明：割边集 $E_G(S)$是键$\Leftrightarrow G[S]$和$G[\overline{S}]$都是连通的.

(b)举例说明(a)中结论对有向图的强连通性不真.

2.2.4　证明：每个割边集都是边不交键之并.

2.2.5　设B_1 和B_2是键. 证明：B_1 和B_2 对称差$B_1\Delta B_2$ 是割边集，因而含键.

2.2.6　连通图 G 的树图 $T^*(G)$是这样一个简单无向图：$V(T^*)$为 G 的所有支撑树 $T_1,T_2,\cdots,T_n$. T_i 与 T_j 相邻$\Leftrightarrow T_i$ 和 T_j 在 G 中恰有 $\nu-2$ 条公共边. 证明：T^* 是连通图.

2.2.7　证明：若图 G 含 k 棵边不交支撑树，则对于 $V(G)$的每个划分$\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$，端点在 V_i 和 $V_j(j\neq i)$的边数$\geq k(n-1)$. (Tutte (1961) & Nash-Williams (1961)已证明：G 含 k 棵边不交支撑树的这个必要条件也是充分的).

2.2.8　设 G 是连通图，$x\in V(G)$. 证明：G 中存在支撑树 T 使得对任何 $y\in V(G)$均有 $d_T(x,y)=d_G(x,y)$.

2.2.9　设G 是简单连通图，$x\in V(G)$. 证明：G 有定向图 D 使得 D 有支撑树 T 满足：

(i)T 是根在 x 树形图；

(ii)对任何 $a\in E(\overline{T})$，$T+a$ 含有向圈；

(iii)对 D 中任何有向圈 C，存在 $a\in E(\overline{T})$使 $C\subseteq T+a$.

2.3　图的向量空间

设 D 是一个图，$V(D)=\{u_1,u_2,\cdots,u_\nu\}$，$E(D)=\{a_1,a_2,\cdots,a_\varepsilon\}$. D 的顶点

空间(**vertex-space**)$\mathscr{V}(D)$定义为$V(D)$到实数集$\mathbf{R}$中的所有函数的向量空间. D的**边空间**(*edge-space*)$\mathscr{E}(D)$定义为$E(D)$到实数集$\mathbf{R}$中的所有函数的向量空间.

$$\dim \mathscr{V}(D)=\nu,\quad \dim \mathscr{E}(D)=\varepsilon.$$

设$f\in \mathscr{V}(D)$并设$f(u_i)=x_i$,则通常可以写成形式和$f=\sum_{i=1}^{\nu}x_i\boldsymbol{u}_i$. 如果把$u_i$看成是$\mathscr{V}(D)$中元素且$\boldsymbol{u}_i(u_i)=1,\boldsymbol{u}_i(u_j)=0(j\neq i)$,那么$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_\nu\}$可以看成是$\mathscr{V}(D)$的一组基. $(x_1,x_2,\cdots,x_\nu)$可以看作是f在这组基下的坐标. 记$f=(x_1,x_2,\cdots,x_\nu)$. 同样地,设$g\in\mathscr{E}(D)$,并设$g(a_i)=y_i$,可以写$g=\sum_{i=1}^{\varepsilon}y_i\boldsymbol{a}_i$,并称$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_\varepsilon\}$是$\mathscr{E}(D)$的一组基,$(y_1,y_2,\cdots,y_\varepsilon)$是$g$在这组基下的坐标,记$g=(y_1,y_2,\cdots,y_\varepsilon)$. 在这两个空间中,赋予通常的内积. 在这种内积下,空间中任何基中两组向量是正交的.

本节只考虑无环图D的边空间$\mathscr{E}(D)$.

设$w\in\mathscr{E}(D)$,称(D,w)为**加权图**(**weighted graph**),w亦称为**权函数**,$w(a)$称为边a的**权**(**weight**).

图2.4所示的是一个加权图. 加权图经常出现在应用中. 权通常是以矩阵的形式给出,这样的矩阵称为**加权矩阵**. 根据实际中的问题,权可以是矩离,也可以是费用等等.

设$B\subseteq E(D)$或$B\subseteq D$,记

$$w(B)=\sum_{a\in B}w(a).$$

设$S\subset V(D)$,记$E_D^+(S)=(S,\overline{S})$,即$D$中起点在$S$而终点在$\overline{S}$的边集. 同样地,记$E_D^-(S)=(\overline{S},S)$. 记

$$w^-(S)=w(E_D^+(S)),\quad w^-(S)=w(E_D^-(S)).$$

设$f\in\mathscr{E}(D)$. 若

$$f^+(u)=f^-(u),\quad \forall u\in V(D),\tag{2.1}$$

则称f为D的**圈向量**(**cycle vector**).

图2.4所示的是D的一个圈向量f,f在各边上的值标在对应的边上.

设C是D中圈,并指定C的正向. 用C^-表示C中其方向与C的正向一致的边集;C^-表示C中其方向与C的正向相反的边集.

定义$f_C\in\mathscr{E}(D)$如下:

$$f_C(a)=\begin{cases}1, & 若\ a\in C^+;\\ -1, & 若\ a\in C^-;\\ 0, & 若\ a\notin C^+\cup C^-.\end{cases}$$

容易验证,f_C满足(2.1)式,所以f_C是D的圈向量. f_C称为**圈C的圈向量**.

图 2.5 所示的是对应于圈 C(粗边所示)的圈向量 f_C. 不难证明,D 的所有圈向量构成 $\mathscr{E}(D)$的一个子空间(见习题 2.3.2). 称这个子空间为 D 的**圈空间**(**cycle space**),记为 $\mathscr{C}(D)$.

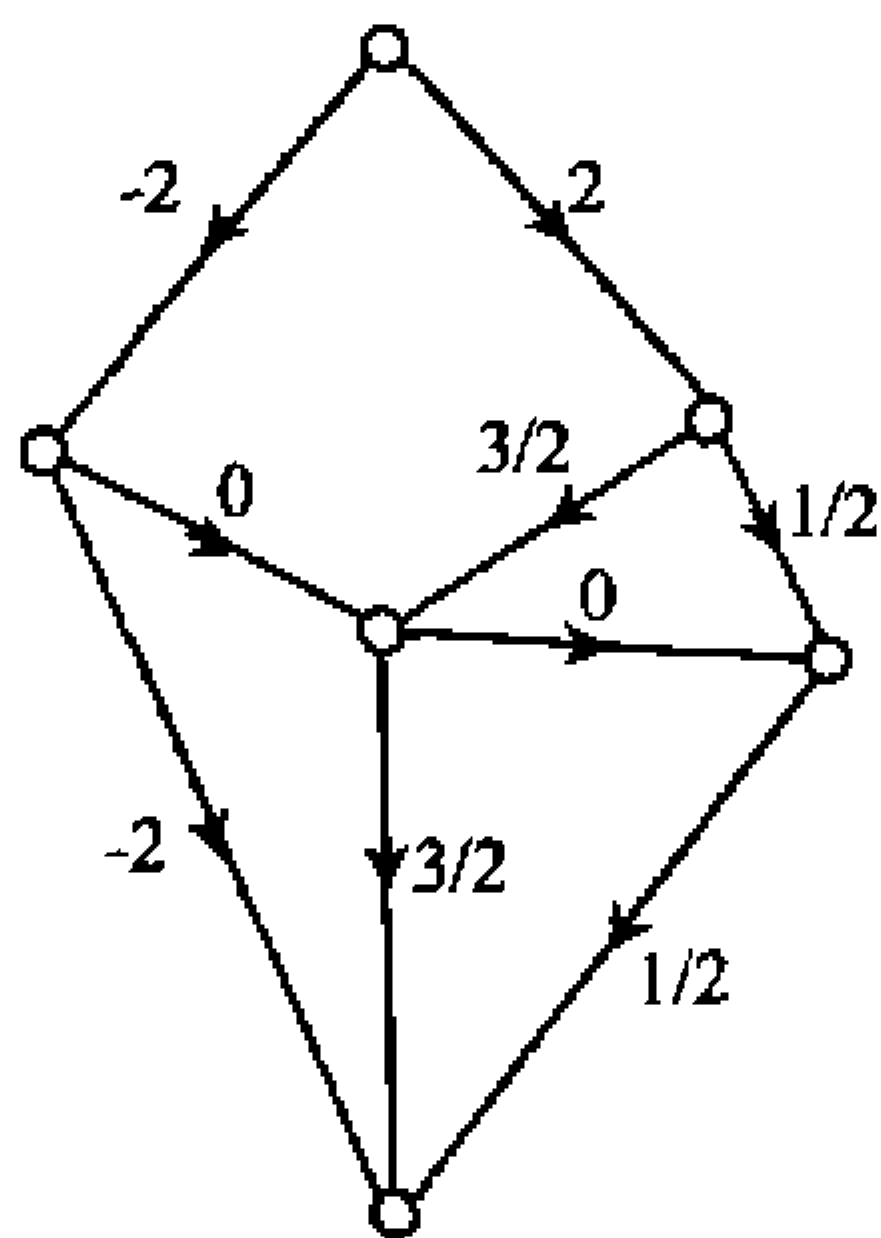


图 2.4

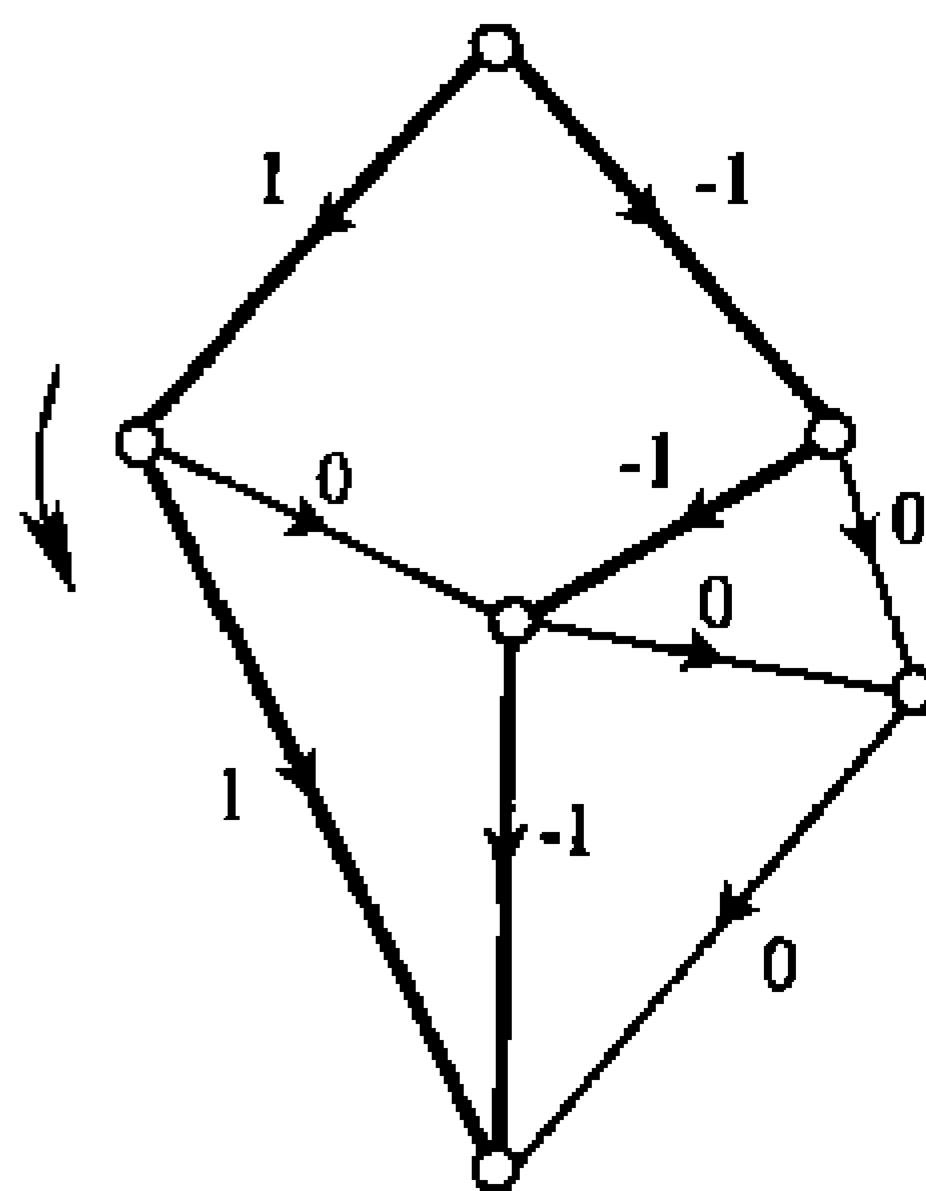


图 2.5

设 $p\in\mathscr{V}(D)$. 按下列规则定义 $\boldsymbol{\delta}_p\in\mathscr{E}(D)$: $\forall a\in E(D)$且$\psi_D(a)=(x,y)$,

$$\boldsymbol{\delta}_p(a)=\boldsymbol{p}(x)-\boldsymbol{p}(y) \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{\delta}_p$ 称为 D 的**割向量**(**cut vector**).

图 2.6 所示的是 $p\in\mathscr{V}(D)$及对应的 $\boldsymbol{\delta}_p$.

设 $B=E_D[S,\bar{S}]$是 D 中的键,定义 $g_B\in\mathscr{E}(D)$如下:

$$g_B(a)=\begin{cases}1, & 若\ a\in(S,\bar{S});\\ -1, & 若\ a\in(\bar{S},S);\\ 0, & 若\ a\notin B.\end{cases}$$

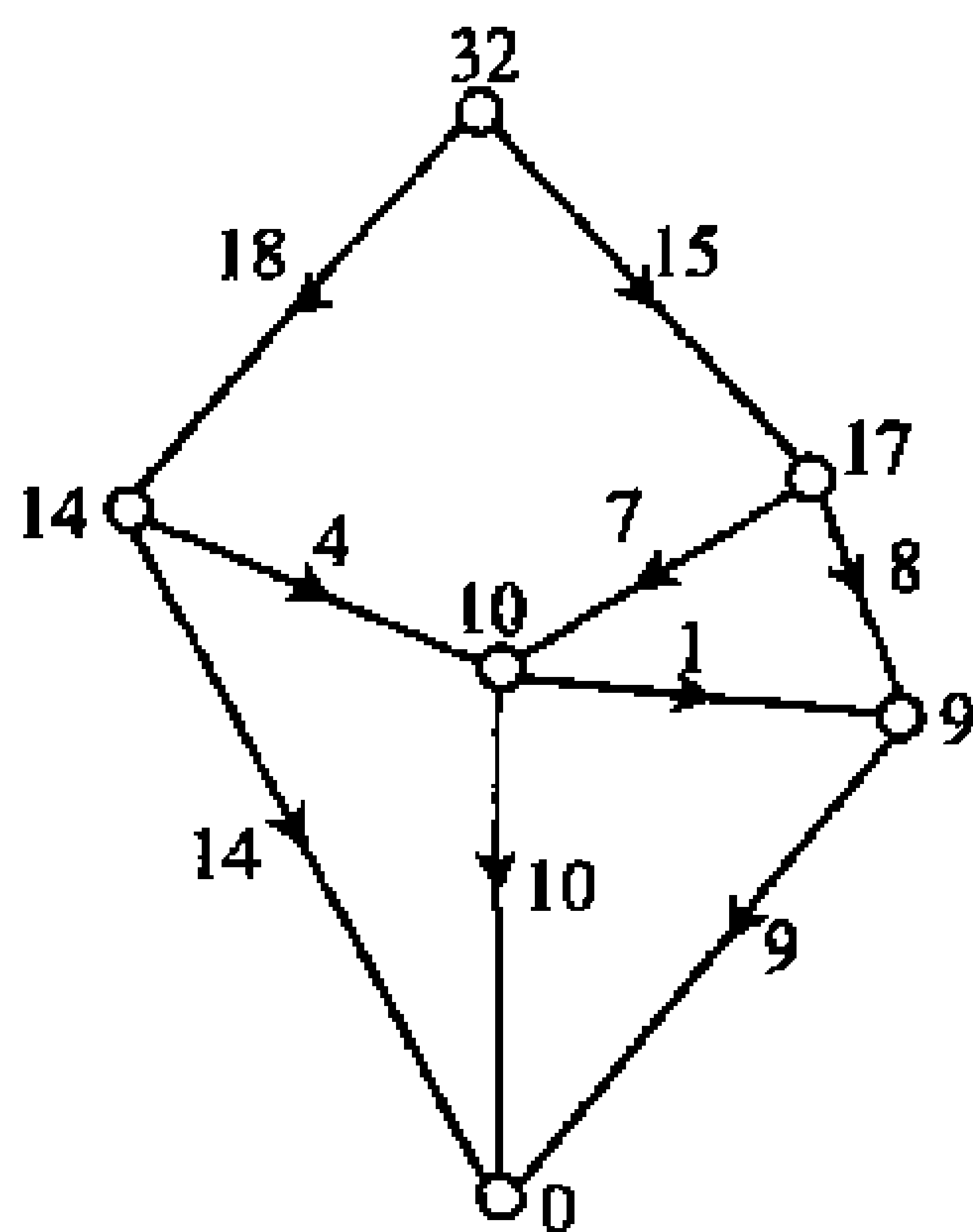


图 2.6

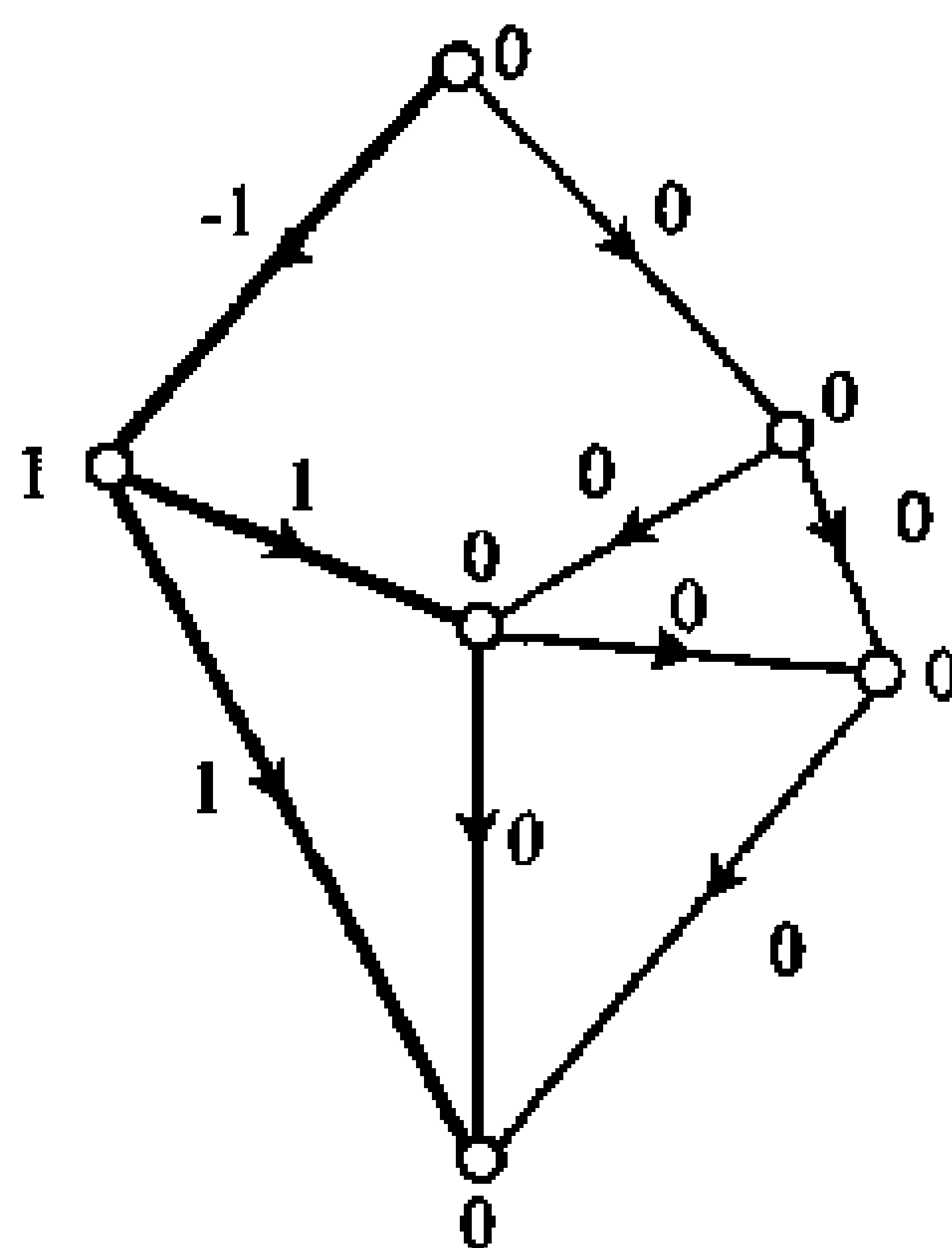


图 2.7

若令

$$p(u)=\begin{cases}1, & u\in S;\\ 0, & u\notin S.\end{cases}$$

则 $g_B=\delta_p$. 于是 g_B 是 D 的割向量. g_B 称为**键 B 的割向量**. 图 2.7 所示的是对应于键 B(粗边表示)的割向量 g_B. 不难证明, D 的所有割向量构成 $\mathscr{E}(D)$ 的一个子空间(见习题 2.3.3). 称这个子空间为 D 的**割空间(cut space)**, 记为 $\mathscr{B}(D)$.

定理 2.7　设 M 是 D 的关联矩阵,则 $\mathscr{B}(D)$ 是 M 的行向量空间 $\mathscr{M}$,而 $\mathscr{C}(D)$ 是它的正交补.

证明　设 $g\in\mathscr{B}(D)$. 于是存在 $p\in\mathscr{V}(D)$,使 $\delta_p=g$ 且 p 满足(2.2)式. 因此对任何 $a\in E(D)$ 且 $\psi_D(a)=(x,y)$ 均有

$$g(a)=\delta_p(a)=p(x)-p(y)=\sum_{x\in V}p(x)\cdot m_x(a),$$

其中 $m_x(a)$ 表示顶点 x 对应于 M 中的行向量在边 a 上的分量. 即 g 可以表示成 M 的行向量的线性组合,即 $\mathscr{B}(D)\subseteq\mathscr{M}$.

反之,设 $g=(m_x(a_1),m_x(a_2),\cdots,m_x(a_\varepsilon))$ 是 M 中任意一个行向量. 显然 $g\in\mathscr{E}(D)$. 令

$$p(u)=\begin{cases}1, & 若\ u=x;\\ 0, & 若\ u\neq x.\end{cases}$$

则 $p\in\mathscr{V}(D)$ 且 $g=\delta_p$. 因此 $g\in\mathscr{B}(D)$. 由于 M 中任何行向量的线性组合仍属于 $\mathscr{B}(D)$. 故 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{B}(D)$.

设 $f\in\mathscr{E}(D)$,则 f 满足(2.1)式

$$\Leftrightarrow\sum_{a\in E}f(a)m_x(a)=0,\quad\forall x\in V(D),$$

$\Leftrightarrow f$ 与 M 中每个行向量都正交.

因此 $\mathscr{C}(D)$ 是 $\mathscr{B}(D)$ 的正交补. □

推论 2.7　对任何图 D 都有 $\mathscr{E}(D)=\mathscr{B}(D)\oplus\mathscr{C}(D)$.

设 $f\in\mathscr{E}(D)$. 用 D_f 表示 D 中使 f 的值不为 0 的边集所导出的子图. D_f 称为 **f 的支撑图**.

例如,图 2.5 所示的 f,它的支撑图 D_f 为一条圈(图中粗边所示);而图 2.7 所示的 g,它的支撑图 D_g 为 D 中一个键(图中粗边所示). 一般地,我们有下述结果.

引理 2.8　(i)若 $f\in\mathscr{C}(D)$ 且非零,则 D_f 含圈;

(ii)若 $g\in\mathscr{B}(D)$ 且非零,则 D_g 含键.

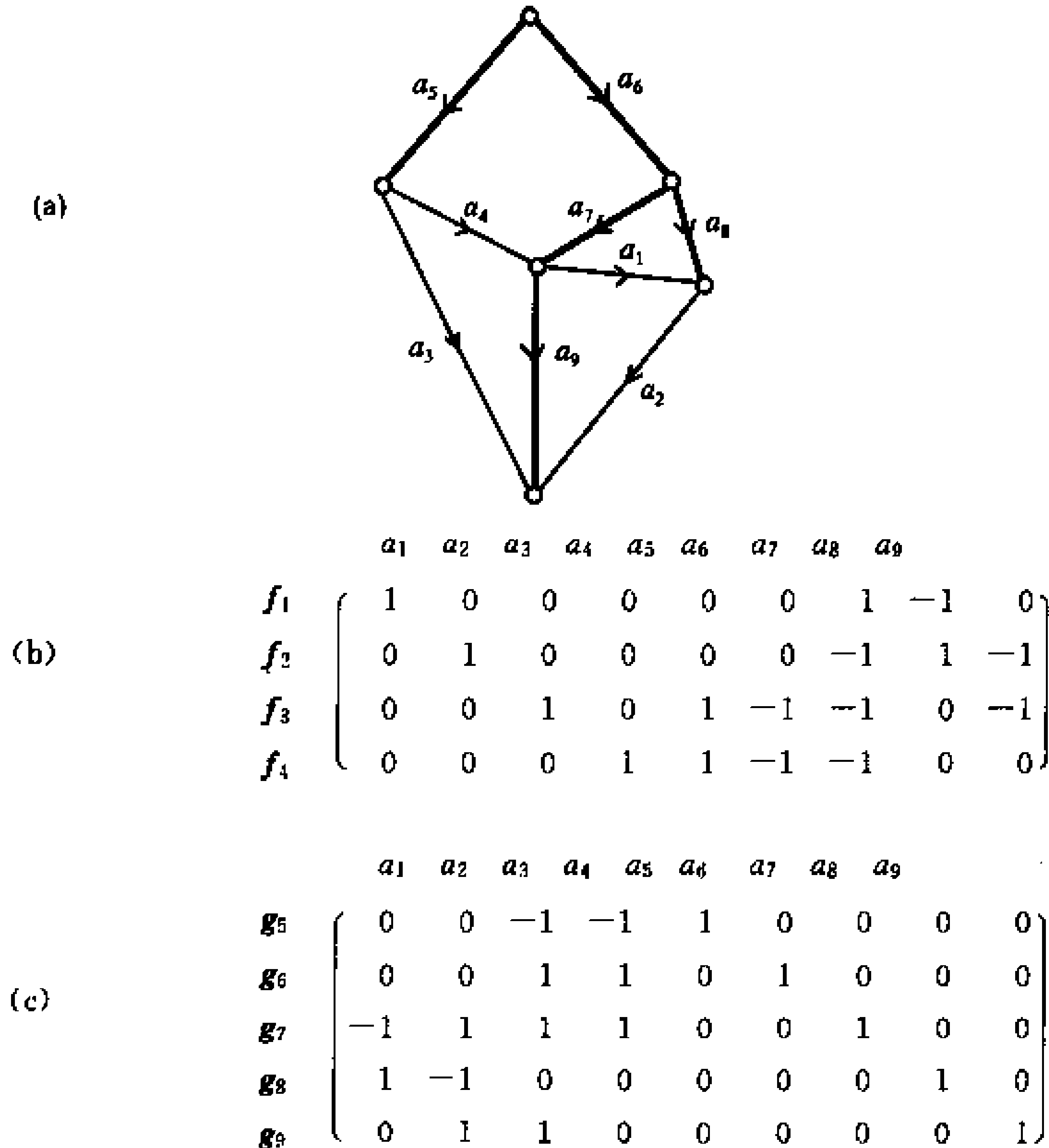
证明　(i)由于 $0\neq f\in\mathscr{C}(D)$,所以由(2.1)式可知,对每个 $u\in V(D_f)$, $d_{D_f}(u)\geqslant2$,即 $\delta(D_f)\geqslant2$. 故(由例 1.6.1) D_f 含圈.

(ii)由于 $\mathbf{0}\neq \mathbf{g}\in \mathscr{B}(D)$，所以存在非零 $\mathbf{p}\in \mathscr{V}(D)$ 使 $\mathbf{g}=\boldsymbol{\delta}_p$. 任取 $u\in V(D_g)$，并令

$$S=\{w\in V(D):\mathbf{p}(w)=\mathbf{p}(u)\}.$$

则 $E_D[S,\overline{S}]\neq\varnothing$，并且对任何 $a\in E_D[S,\overline{S}]$ 均有 $\mathbf{g}(a)\neq 0$，所以 $E_D[S,\overline{S}]\subseteq E(D_g)$. 于是(习题 2.2.4)$D_g$ 含键. □

设 $\mathbf{B}$ 是其行由 $\mathscr{E}(D)$ 中向量组成的矩阵并且 $R\subseteq E(D)$. 则用 $\mathbf{B}|R$ 表示 $\mathbf{B}$ 中列限制在 R 上得到的子矩阵. 例如，见图 2.8，在(a)所示的有向图 D 中，令 $R=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$\mathscr{E}(D)$ 中行向量矩阵 $\mathbf{B}$ 如(b)所示，则 $\mathbf{B}|R$ 为 4 阶单位矩阵 $\mathbf{I}_4$. 为使记号简化，若 R 是 D 的子图，我们也记 $\mathbf{B}|E(R)$ 为 $\mathbf{B}|R$.



(b)

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ \hline f_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ f_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ \hline g_5 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_7 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_8 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_9 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

图 2.8

定理 2.8　设 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别是 $\mathscr{B}(D)$ 和 $\mathscr{C}(D)$ 的基矩阵，则对任何 $R\subseteq E(D)$，有

(i) $\mathbf{B}|R$ 的各列线性无关 $\Leftrightarrow D[R]$ 不含圈；

(ii) $\mathbf{C}|R$ 的各列线性无关 $\Leftrightarrow D[R]$ 不含键.

证明　(i)用 $\mathbf{B}_a$ 表示 $\mathbf{B}|a$，即 $\mathbf{B}$ 中对应于边 a 的列向量.

($\Leftarrow$)(反证法)设 $\mathbf{B}|R$ 的各列线性相关，则存在 $\mathbf{0}\neq \mathbf{f}\in \mathscr{E}(D)$，

$$\mathbf{f}(a)=\begin{cases}\neq 0, & \text{当 } a\in R;\\ =0, & \text{当 } a\notin R,\end{cases}$$

使 $$0=\sum_{a\in R}f(a)\boldsymbol{B}_a=\sum_{a\in E}f(a)\boldsymbol{B}_a=\boldsymbol{B}f^T.$$

由此可知 $D_f\subseteq D[R]$，并且 f 与 $\boldsymbol{B}$ 中每个行向量都正交，即 f 与 $\mathscr{B}$ 中每个向量都正交，即 $f\notin\mathscr{B}$. 由推论 2.7 知 $f\in\mathscr{C}$. 再由引理2.8(i)知 D_f 含圈，因而 $D[R]$ 也含圈. 矛盾于假定. 所以 $\boldsymbol{B}|R$ 各列必线性无关.

($\Rightarrow$)(反证法)若 $D[R]$ 含圈，则取 C 为 $D[R]$ 中的圈，f_C 是 D 中对应于圈 C 的非零圈向量，即 $\boldsymbol{0}\neq f_C\in\mathscr{C}(D)$. 因此 f_C 与 $\boldsymbol{B}$ 中每个行向量都正交，即

$$\sum_{a\in E}f_C(a)\boldsymbol{B}_a=\boldsymbol{B}f_C{}^T=0.$$

而 $$\sum_{a\in E}f_C(a)\boldsymbol{B}_a=\sum_{a\in R}f_c(a)\boldsymbol{B}_a.$$

因而，非零向量 f_C 使得

$$\sum_{a\in R}f_C(a)\boldsymbol{B}_a=0,$$

即 $\boldsymbol{B}|R$ 的各列线性相关. 矛盾于假定，所以 $D[R]$ 不含圈.

利用引理 2.8(ii)，做类似的叙述可证(ii). □

推论 2.8 (i) $\dim\mathscr{B}=\nu-\omega$;

(ii) $\dim\mathscr{C}=\varepsilon-\nu+\omega$.

证明

(i)设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 的基矩阵. 根据定理 2.8(i)知

$$\text{rank }\boldsymbol{B}=\max\{|R|:R\subseteq E(D)\text{且 }D[R]\text{不含圈}\}.$$

上式只有当 $D[R]$ 是 D 中支撑林时才达到最大值 $\nu-\omega$(推论2.3). 由于 $\dim\mathscr{B}=\text{rank }\boldsymbol{B}$，所以 $\dim\mathscr{B}=\nu-\omega$.

(ii)的证明 由推论 2.7 知 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 都是 $\mathscr{E}(D)$ 的子空间且互为正交补，所以(ii)成立. □

设 F 是 D 的支撑林. 用 $a_1,a_2,\cdots,a_\varepsilon$ 对 D 的边进行标号使

$$E(\overline{F})=\{a_1,a_2,\cdots,a_{\varepsilon-\nu+\omega}\},\quad E(F)=\{a_{\varepsilon-\nu+\omega+1},\cdots,a_\varepsilon\}.$$

如图 2.8(a)所示，其中细边表示 $\overline{F}$，粗边表示 F.

由定理 2.5 知，对每个 $a_i\in E(\overline{F})$，$F+a_i$ 含唯一圈. 记这条圈为 C_i，称为 D 中**对应于 F 的基本圈**(**fundamental cycle**). 用 f_i 表示对应于圈 C_i 且使 $f_{C_i}(a_i)=1$ 的圈向量. 于是，以

$$f_1,f_2,\cdots,f_{\varepsilon-\nu+\omega}$$

为行而构成的 $(\varepsilon-\nu+\omega)\times\varepsilon$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}_F$ 必有下列分块表示形式：

$$\boldsymbol{C}_F=(\boldsymbol{I}_{\varepsilon-\nu+\omega}\quad \boldsymbol{C}_2),$$

其中 $\boldsymbol{I}_{\varepsilon-\nu+\omega}=\boldsymbol{C}_F|\overline{F}$ 为 $(\varepsilon-\nu+\omega)$ 阶单位方阵，而 $\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{C}_F|F$ 是 $(\varepsilon-\nu+\omega)\times(\nu-\omega)$ 阶矩阵. 由于 rank $\boldsymbol{C}_F=\varepsilon-\nu+\omega$，所以向量组

$$f_1, f_2, \cdots, f_{\varepsilon-\nu+\omega}$$

是圈空间 $\mathscr{C}(D)$ 中的一组基. C_F 称为 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 F 的**基矩阵**. 例如,图 2.4 所示的加权图 (D,f),其边标号和支撑树 T 如图 2.8 所示(粗边所示). $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 T 的基矩阵 $C_T=(I_4\ C_2)$ 如图2.8(b)所示,其中:

$$C_T|\overline{T}=I_4,\quad C_T|T=C_2=\begin{pmatrix}0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&-1\\1&-1&-1&0&-1\\1&-1&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

而且,图 2.4 中所示的圈向量 f 可以表示为

$$f=\left(0,\frac{1}{2},-2,0,-2,2,\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=0\,f_1+\frac{1}{2}f_2+(-2)f_3+0\,f_4=\sum_{i=1}^{4}f(a_i)f_i.$$

这说明:f 的值是由 $f|\overline{T}$ 上的值所唯一确定. 事实上,对任何圈向量,此结论都成立(见习题 2.3.6).

类似地,设 $a_j\in E(F)$. 则由定理 2.6 知 $\overline{F}+a_j$ 含唯一的键,记为 B_j,称为 D 中对应于 F 的**基本键**(**fundamental bond**). 用 g_j 表示对应于 B_j 且使 $g_{B_j}(a_j)=1$ 的割向量,$j=\varepsilon-\nu+\omega+1,\cdots,\varepsilon$. 于是,以

$$g_{\varepsilon-\nu+\omega+1}, g_{\varepsilon-\nu+\omega+2}, \cdots, g_\varepsilon$$

为行而构成的 $(\nu-\omega)\times\varepsilon$ 阶矩阵 B_F 必有下列分块表示形式:

$$B_F=(B_1\quad I_{\nu-\omega}),$$

其中 $B_1=B_F|\overline{F}$ 是 $(\nu-\omega)\times(\varepsilon-\nu+\omega)$ 阶矩阵,而 $I_{\nu-\omega}=B_F|F$ 是 $(\nu-\omega)$ 阶单位方阵. 由于 $\operatorname{rank} B_F=\nu-\omega$,所以向量组

$$g_{\varepsilon-\nu+\omega+1}, g_{\varepsilon-\nu+\omega+2}, \cdots, g_\varepsilon$$

是割空间 $\mathscr{B}(D)$ 中的一组基. B_F 称为 $\mathscr{B}(D)$ 中对应于 F 的**基矩阵**. 例如,图 2.8(a)所示的图,$\mathscr{B}(D)$ 中对应于支撑树 T(粗边所示)的基矩阵 $B_T=(B_1\ I_5)$ 如图 2.8(c)所示,其中

$$B_T|\overline{T}=B_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&-1\\0&0&1&1\\-1&1&1&1\\1&-1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad B_T|T=I_5.$$

而且,图 2.6 所示的割向量 g 可以表示为

$$g=(1,9,14,4,18,15,7,8,10)$$

$$= 18g_5 + 15g_6 + 7g_7 + 8g_8 + 10g_9 = \sum_{j=5}^{9} g(a_j)g_j.$$

这说明：g 的值是由 $g|T$ 上的值所唯一确定. 事实上，对任何割向量，此结论仍然是成立的(见习题 2.3.6).

下面举两个例子来结束这一节.

例 2.3.1 设 $\boldsymbol{B}$ 是割空间 $\mathscr{B}(D)$的基矩阵，F 是 D 的支撑林，$\boldsymbol{B}_F$ 是 $\mathscr{B}(D)$中对应于 F 的基矩阵. 则 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{B}|F$ 唯一确定，而且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}|F)\boldsymbol{B}_F$.

证明 因为 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}_F$ 都是 $\mathscr{B}(D)$中的基矩阵，所以存在唯一可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_F$. 于是 $\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{P}$ 唯一确定. 由于 $\boldsymbol{B}|F=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_F|F=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}_F|F)=\boldsymbol{P}$. 因此， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_F=(\boldsymbol{B}|F)\boldsymbol{B}_F$. □

例 2.3.2 设 $\boldsymbol{K}$ 为从连通图 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中删去任意一行后所得到的矩阵，则 $\boldsymbol{K}$ 是割空间 $\mathscr{B}(D)$的基矩阵.

证明 由于 D 是连通的，所以由推论 2.8 知 $\dim \mathscr{B}(D)=\nu-1$. 又由定理 2.7 知 $\mathscr{B}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的行向量空间 $\mathscr{M}$，而 $\boldsymbol{K}$ 的行向量空间是 $\mathscr{M}$ 的子空间，所以只须证明 $\boldsymbol{K}$ 的秩 $\operatorname{rank} \boldsymbol{K}\geqslant\nu-1$.

设 $\boldsymbol{M}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_\nu$，则 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_\nu=0$. 不失一般性，设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{\nu-1}$是 $\boldsymbol{K}$ 的行向量. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{\nu-1}$线性相关，则存在不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{\nu-1}$，不妨设 $\lambda_1=-1$，使得 $\boldsymbol{\beta}_1=\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\lambda_3\boldsymbol{\beta}_3+\cdots+\lambda_{\nu-1}\boldsymbol{\beta}_{\nu-1}$. 于是

$$0 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_\nu = (1+\lambda_2)\boldsymbol{\beta}_2 + (1+\lambda_3)\boldsymbol{\beta}_3 + \cdots + (1+\lambda_{\nu-1})\boldsymbol{\beta}_{\nu-1} + \boldsymbol{\beta}_\nu,$$

即 $\boldsymbol{\beta}_\nu=-(1+\lambda_2)\boldsymbol{\beta}_2-(1+\lambda_3)\boldsymbol{\beta}_3-\cdots-(1+\lambda_{\nu-1})\boldsymbol{\beta}_{\nu-1}$. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_\nu$ 中每个向量都能被 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{\nu-1}$线性表出，即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{M}\leqslant\nu-2$. 矛盾于 $\operatorname{rank} \boldsymbol{M}=\dim \mathscr{M}=\dim \mathscr{B}=\nu-1$. 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{\nu-1}$线性无关，即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{K}\geqslant\nu-1$. □

习 题

2.3.1 给出定理 2.8(ii)的证明.

2.3.2 设 C 是 D 中的圈. 证明：

(a) $f_C\in\mathscr{E}(D)$是 D 的圈向量；

(b) D 的所有圈向量构成 $\mathscr{E}(D)$的子空间.

2.3.3 设 B 是 D 中的键. 证明：

(a) $g_B\in\mathscr{E}(D)$是 D 的割向量；

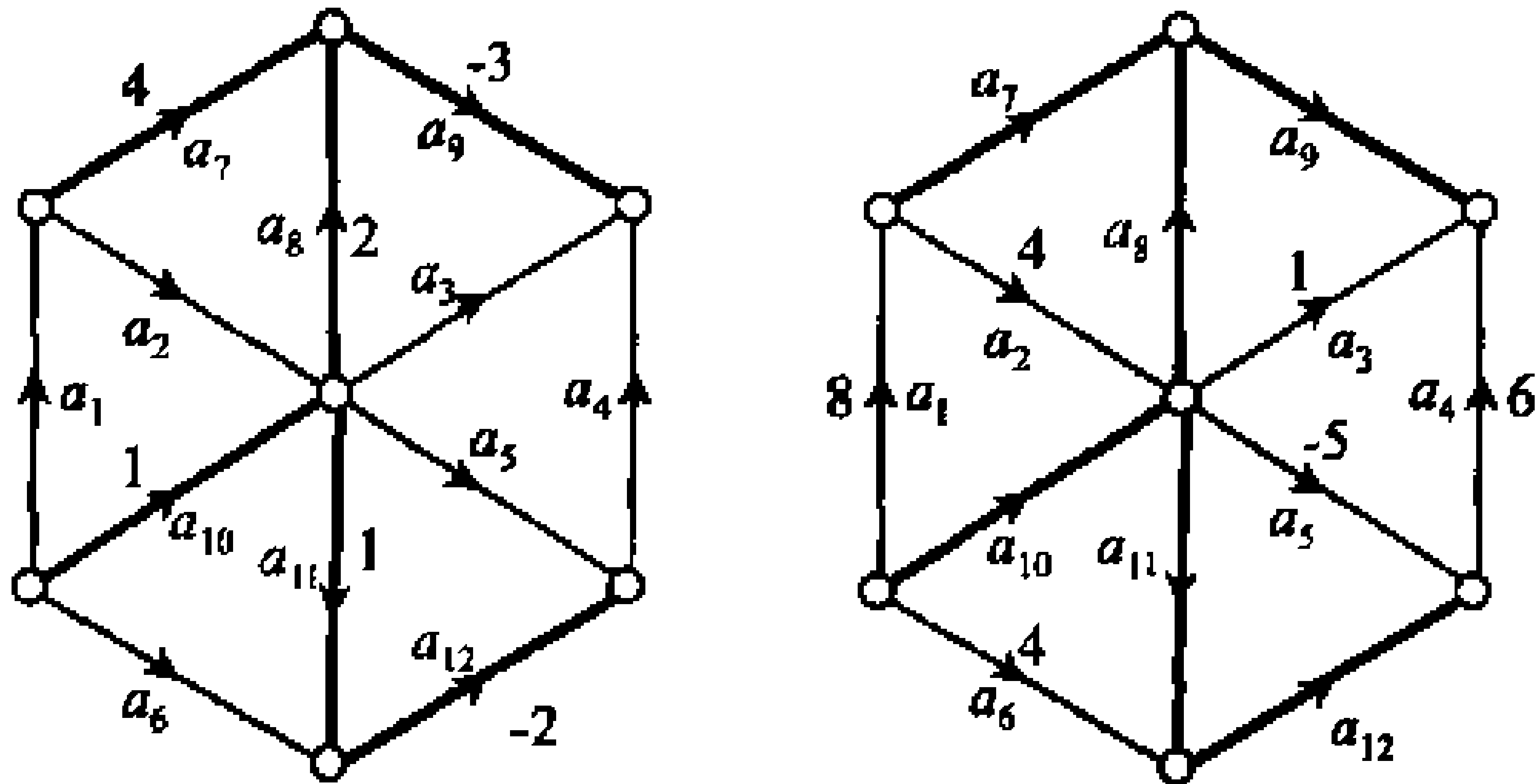
(b) D 的所有割向量构成 $\mathscr{E}(D)$的子空间.

2.3.4 设有向图 D 如下所示，粗边表示支撑树 T.

(a)将 T 上的函数扩充为 D 的割向量 g，写出 $\mathscr{B}(D)$中对应于 T 的基矩阵 $\boldsymbol{B}_T$，并写出

$\boldsymbol{g}$ 在这组基下的表达式.

(b)将 $\overline{T}$ 上的函数扩充为 D 的圈向量 $\boldsymbol{f}$，写出 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 T 的基矩阵 $\boldsymbol{C}_T$，并写出 $\boldsymbol{f}$ 在这组基下的表达式.



(习题 2.3.4)

2.3.5　设 F 是 D 的支撑林，$\boldsymbol{B}_F=(\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{I}_{\nu-w})$，$\boldsymbol{C}_F=(\boldsymbol{I}_{\varepsilon-\nu+w}\ \boldsymbol{C}_2)$ 分别是 $\mathscr{B}(D)$ 和 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 F 的基矩阵. 证明：

(a) $\boldsymbol{C}_F(\boldsymbol{B}_F)^T=0$，

(b) $\boldsymbol{C}_F=(\boldsymbol{I}_{\varepsilon-\nu+w}\quad -\boldsymbol{B}_1^T)$，

(c) $\boldsymbol{B}_F=(-\boldsymbol{C}_2^T\quad \boldsymbol{I}_{\nu-w})$.

2.3.6　设 $\boldsymbol{f}$ 是 D 的圈向量，$\boldsymbol{g}$ 是 D 的割向量，F 是 D 的支撑林，$\boldsymbol{B}_F$ 和 $\boldsymbol{C}_F$ 分别是割空间 $\mathscr{B}(D)$ 和圈空间 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 F 的基矩阵. 证明：

(a) $\boldsymbol{f}$ 由 $\boldsymbol{f}|\overline{F}$ 唯一确定，而且 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}|\overline{F})\boldsymbol{C}_F$

(b) $\boldsymbol{g}$ 由 $\boldsymbol{g}|F$ 唯一确定，而且 $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g}|F)\boldsymbol{B}_F$.

2.3.7　设 $\boldsymbol{C}$ 是圈空间 $\mathscr{C}(D)$ 的基矩阵，F 是 D 的支撑林，$\boldsymbol{C}_F$ 是 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 F 的基矩阵. 证明：$\boldsymbol{C}$ 是由 $\boldsymbol{C}|\overline{F}$ 唯一确定，而且 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}|\overline{F})\boldsymbol{C}_F$.

2.3.8　证明：

(a) D 中任何圈都可以表示成若干基本圈的对称差，

(b) D 中任何键都可以表示成若干基本键的对称差.

2.4　支撑树的数目*

我们已看到，在上两节的讨论中，支撑树起了一个关键作用. 在本节中，我们将导出无环连通图 D 中支撑树的数目 $\tau(D)$ 的计算公式. 这里介绍的证明方法属于 Tutte (1965).

设 D 为无环连通有向图，$\boldsymbol{B}$ 是割空间 $\mathscr{B}(D)$ 的基矩阵. 从定理 2.8 知，若 $R\subseteq E(D)$ 且 $|R|=\nu-1$，则子方阵 $\boldsymbol{B}|R$ 是可逆的当且仅当 R 在 D 中导出子图 $D[R]$ 是 D 的支撑树. 于是 $\tau(D)$ 就等于 $\boldsymbol{B}$ 中阶为 $\nu-1$ 的可逆方阵的数目.

设 M 是 $n\times m$ 阶矩阵. 如果 M 中的所有满阶(即 $\min\{n,m\}$ 阶)子方阵的行列式都取值 0,或 -1,或 1,那么称 M 为**幺模矩阵(unimodular matrix)**.

例 2.4.1 设 D 是无环有向图,F 是 D 中支撑林,并设 $\boldsymbol{B}_F$ 和 $\boldsymbol{C}_F$ 分别是 $\mathscr{B}(D)$ 和 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 F 的基矩阵. 则 $\boldsymbol{B}_F$ 和 $\boldsymbol{C}_F$ 都是幺模矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{B}_F$ 中任意一个满阶子方阵. 由推论 2.8(i)知 $\boldsymbol{P}$ 是 $\nu-\omega$ 阶方阵. 设 R 是 $\boldsymbol{P}$ 对应于 D 中的边子集,并设 R 在 D 中导出子图 $D[R]$ 为 F_1. 于是 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_F|F_1$. 由定理 2.8(i)知,若 F_1 中含有圈,则 $\det\boldsymbol{P}=0$. 下设 F_1 是 D 中的支撑林. 设 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $\mathscr{B}(D)$ 中对应于 F_1 的基矩阵. 由例 2.3.1 知

$$(\boldsymbol{B}_F|F_1)\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_F.$$

上式两边限制在 F 上得

$$(\boldsymbol{B}_F|F_1)(\boldsymbol{B}_1|F)=\boldsymbol{B}_F|F.$$

两边取行列式,并注意到 $\boldsymbol{B}_F|F$ 是单位矩阵,得

$$\det(\boldsymbol{B}_F|F_1)\cdot\det(\boldsymbol{B}_1|F)=1. \tag{2.3}$$

由于(2.3)式中两个行列式都是整数矩阵的行列式,所以其值都为整数.

由此可知 $$\det\boldsymbol{P}=\det(\boldsymbol{B}_F|F_1)=\pm1.$$

于是我们证明了 $\boldsymbol{B}_F$ 是幺模矩阵. 同理可证 $\boldsymbol{C}_F$ 也是幺模矩阵. □

例 2.4.2 设 $\boldsymbol{M}$ 是无环有向图 D 的关联矩阵,$\boldsymbol{K}$ 是从 $\boldsymbol{M}$ 中删去任何一行后得到的子矩阵,则 $\boldsymbol{K}$ 是幺模矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的满阶子方阵. 下面用归纳法来证明 $\boldsymbol{P}$ 中任何子方阵的行列式均为 0,1 或 -1. 由于 $\boldsymbol{M}$ 是 D 的关联矩阵,所以 $\boldsymbol{M}$ 中,也即 $\boldsymbol{P}$ 中的元素是 0,-1 或 1. 因此,$\boldsymbol{P}$ 中任何 1 阶子方阵的行列式为 0,-1 或 1. 假定 $\boldsymbol{P}$ 中任何 n ($\geqslant1$)阶子方阵的行列式都为 0,-1 或 1,我们要证明 $\boldsymbol{P}$ 中任何($n+1$)阶子方阵的列式也为 0,-1 或 1.

设 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})(1\leqslant i,j\leqslant n+1)$ 是 $\boldsymbol{P}$ 中 $n+1$ 阶子方阵. 由关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的定义知,$\boldsymbol{Q}$ 中每列至多有两个非零元素. 若 $\boldsymbol{Q}$ 中每列都有两个非零元素,则 $\boldsymbol{Q}$ 中所有行向量之和为零. 于是 $\det\boldsymbol{Q}=0$.

下设 $\boldsymbol{Q}$ 中至少有一列至多有一个非零元素,设为 q_{ij}($=0,-1$ 或 1). 将 $\det\boldsymbol{Q}$ 按第 j 列进行行列式展开. 于是 $\det\boldsymbol{Q}=(-1)^{i+j}q_{ij}\det\boldsymbol{Q}_{ij}$,其中 $\det\boldsymbol{Q}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的 n 阶子方阵,由假定知 $\det\boldsymbol{Q}_{ij}=0,-1$或 1. 所以 $\det\boldsymbol{Q}=0,\pm1$. 由 n 的任意性知 $\det\boldsymbol{P}=0,\pm1$. 再由 $\boldsymbol{P}$ 的任意性知 $\boldsymbol{K}$ 是幺模矩阵. □

定理 2.9 **设 D 是无环连通有向图,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是 $\mathscr{B}(D)$ 和 $\mathscr{C}(D)$ 中的幺模基矩阵. 则**

$$\tau(D)=\det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)=\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T),$$

其中 $\boldsymbol{B}^T$ 和 $\boldsymbol{C}^T$ 分别表示 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵.

证明　利用两个矩阵乘积的行列式的 Binet-Cauchy 公式(参见李炯生和查建国(1989),p. 138,定理 2)得

$$\det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T) = \sum_{\substack{R\subseteq E(D)\\ |R|=\nu-1}} (\det\boldsymbol{B}|R)^2. \tag{2.4}$$

于是,一方面由定理 2.8(i)知,(2.4)式右边中非零项的数目等于 $\tau(D)$. 另一方面由于 D 是连通的并且 $\boldsymbol{B}$ 是幺模矩阵,所以(2.4)式右边非零项的值都是 1. 因此 $\tau(D)=\det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)$.

同理可证 $\tau(D)=\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)$. □

推论 2.9.1　**设 D 是无环连通有向图,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是 $\mathscr{B}(D)$ 和 $\mathscr{C}(D)$ 中的幺模基矩阵. 则**

$$\tau(D) = \pm\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

证明　由定理 2.9 有

$$\tau(D)^2 = \det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T) = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

由于 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 正交,所以 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{O}$. 于是

$$\begin{aligned}\tau(D)^2 &= \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}(\boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{C}^T)\right)\\ &= \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\det(\boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{C}^T) = \left(\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\right)^2.\end{aligned} \tag{2.7}$$

故推论得证. □

推论 2.9.2　**设 D 是无环连通有向图,T 是 D 中支撑树,$\boldsymbol{B}_T$ 和 $\boldsymbol{C}_T$ 分别是 $\mathscr{B}(D)$ 和 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于 T 的基矩阵,$\boldsymbol{K}$ 是从 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中删去任意一行后得到的矩阵. 则**

$$\tau(D) = \det(\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{B}_T^T) = \det(\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{C}_T^T) = \det(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^T). \tag{2.8}$$

证明　由例 2.4.1 知 $\boldsymbol{B}_T$ 和 $\boldsymbol{C}_T$ 都是幺模矩阵,再由定理 2.9 有 $\tau(D)=\det(\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{B}_T^T)=\det(\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{C}_T^T)$.

由例 2.3.2 知 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathscr{B}(D)$ 的基矩阵,由例 2.4.2 知 $\boldsymbol{K}$ 是幺模矩阵. 再由定理 2.9 有 $\tau(D)=\det(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^T)$. □

例 2.4.3　考察图 2.8 中所示的有向图 D. 它的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{K}$ 为从 $\boldsymbol{M}$ 中删去最后一行所得到的矩阵,则

$$\det\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^T = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 66.$$

设 T 是 D 中由边子集$\{a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}$导出的支撑树(图 2.8 粗边所示). $\mathscr{B}(D)$和$\mathscr{C}(D)$中对应于 T 的基矩阵$\boldsymbol{B}_T$ 和$\boldsymbol{C}_T$ 分别为图 2.8 中(c)和(b)所示. 于是

$$\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{B}_T^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{C}_T^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

因而有 $\det(\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{B}_T^T)=66=\det(\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{C}_T^T)$. □

推论 2.9.3 设 T_n 表示$n(\geqslant 2)$阶竞赛图,则 $\tau(T_n)=n^{n-2}$.

证明 由推论 2.9.2,有

$$\tau(T_n) = \det\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^T$$

$$= \det\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}_{n-1} = n^{n-2}. \qquad (2.9)$$

□

图 2.9 给出了所示竞赛图 T_4 的 16 个支撑树. 在这 16 个 4 阶树中,不同构的只有 6 个,如图 2.10 所示. 注意,不同构的 4 阶无向树只有 2 个,如图 2.11 所示.

通过考虑无环的连通无向图 G 的定向图,由推论 2.9.2 和2.9.3便分别得到下列两个推论:

推论 2.9.4(矩阵-树定理,Kirchhoff,1847) 设 G 是顶点集为$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的无环连通无向图,则 $\tau(G)=\det\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^T$,其中 $\boldsymbol{K}$ 是从 G 的任何一个定向图 D

的关联矩阵 $M(D)$ 中删去任意一行后得到的矩阵.

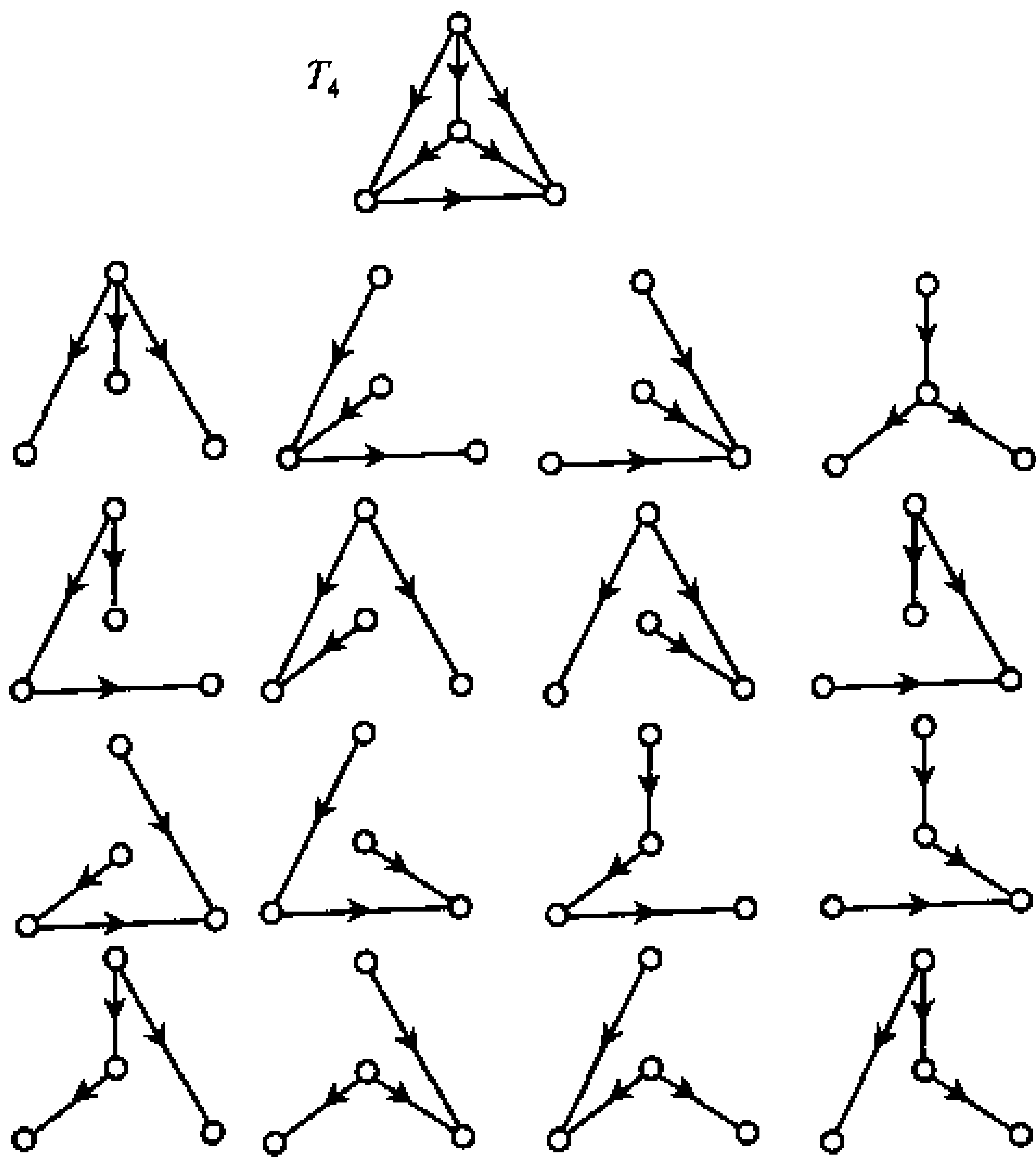


图 2.9　4 阶有向树

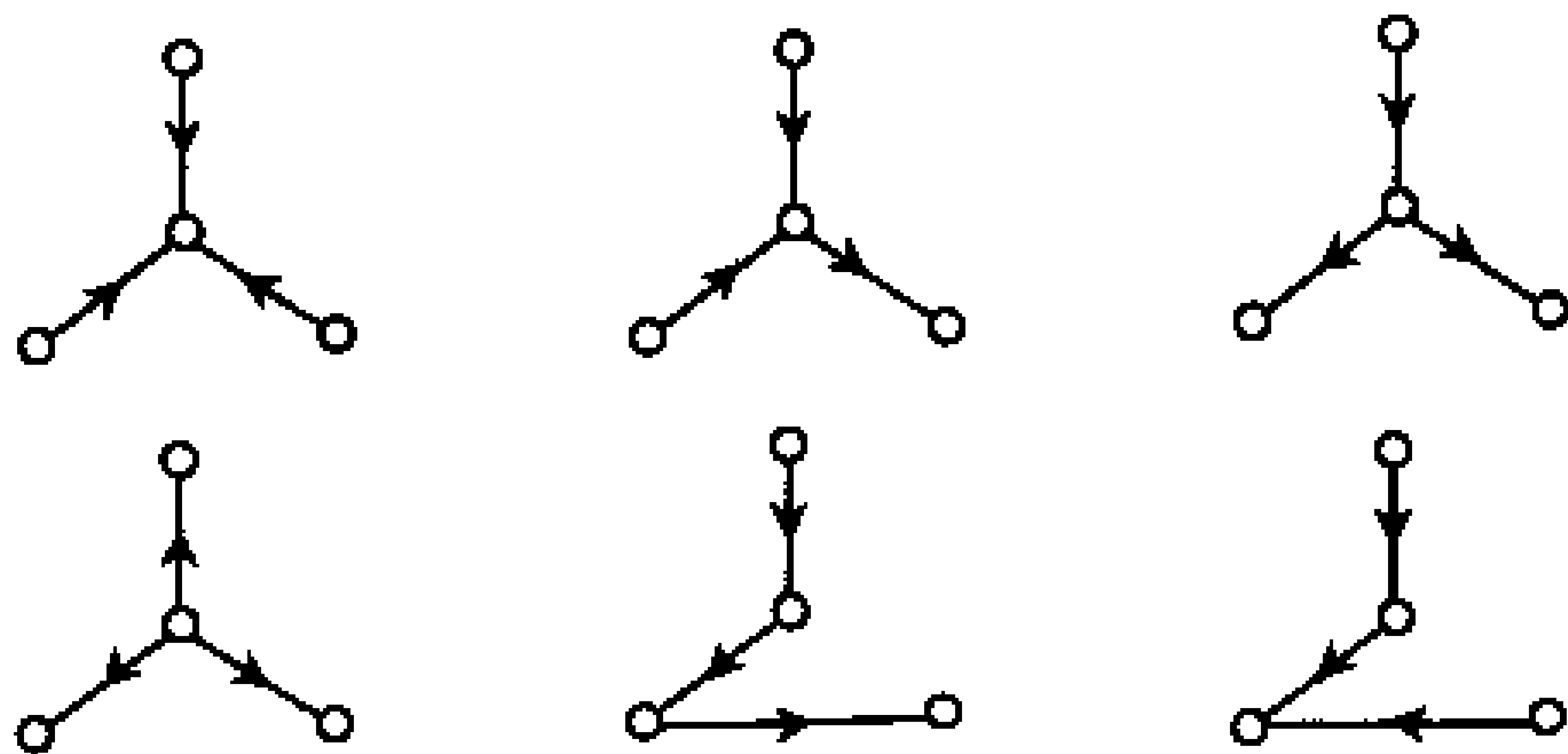


图 2.10　不同构的 4 阶有向树



图 2.11　不同构的 4 阶无向树

推论 2.9.5(Cayley 公式,1889)　设 K_n 是顶点集为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的完全

图，则 $\tau(K_n)=n^{n-2}$，$n\geqslant 2$.

Cayley 公式是推论 2.9.3 的直接推论，这里我们给出 Prüfer(1918)的一个很有技巧性的直接证明.

设 $V(K_n)=N=\{1,2,\cdots,n\}$，并设 M 为其元素是 N 中元素且长为 $(n-2)$ 的序列集，则 $|M|=n^{n-2}$. 为证明 Cayley 公式，只须在 K_n 的支撑树集与 M 之间建立一一对应.

设 T 是 K_n 的任意支撑树. 把 N 看成是一个有序集. 设 x_1 是 T 中第一个 1 度点，令 $t_1\in N_T(x_1)$. 设 x_2 是 $T-x_1$ 中第一个 1 度点，并令 $t_2\in N_{T-x_1}(x_2)$. 重复这种过程直到确定了 t_{n-2}. 留下来的子图 $T-\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}\}$ 是 K_2. 这样得到 M 中一个序列 $(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$. 例如，图 2.12 所示图中的树产生 M 中序列为 $(2,7,7,7,6,6,2,2)$. 不难看出，不同的支撑树产生 M 中不同的序列.

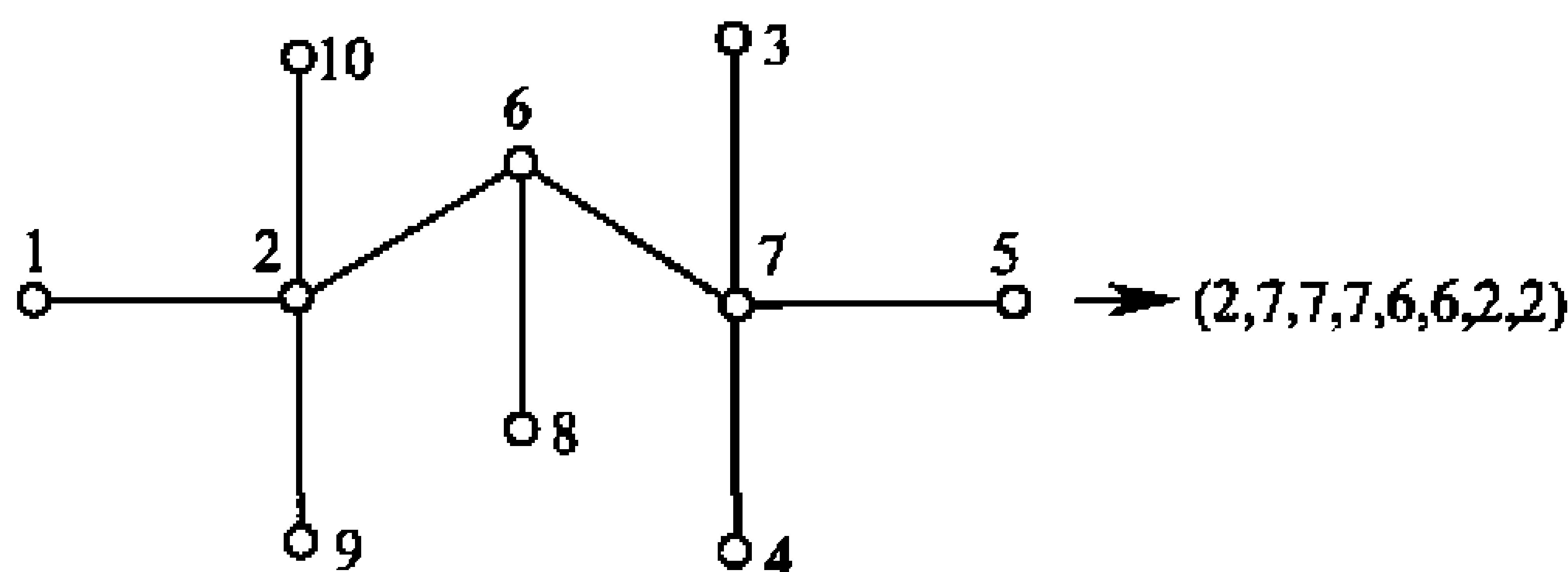


图 2.12

另一方面，注意到对任意 $x\in V(T)$，x 在 $(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$ 中出现 $(d_T(x)-1)$ 次. 于是 T 中 1 度点在该序列中不出现. 按下列方法从序列 $(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$ 中重新构造支撑树 T. 设 x_1 是不在 $(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$ 中出现的第一个顶点，则连接 x_1 和 t_1. 再设 x_2 是不在 $(t_2,t_3,\cdots,t_{n-2})$ 中出现的第一个顶点，则连接 x_2 和 t_2. 如此继续下去，直到确定了 $(n-2)$ 条边 $x_1t_1,x_2t_2,\cdots,x_{n-2}t_{n-2}$ 为止. 然后连接 $N\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}\}$ 中剩下的两顶点，即得到 T. 容易验证，M 中不同的序列产生 K_n 中不同的支撑树. □

习 题

2.4.1 设 $\boldsymbol{M}$ 是无环连通有向图 D 的关联矩阵，$\boldsymbol{K}$ 是从 $\boldsymbol{M}$ 中删去任意一行后得到的矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是圈空间 $\mathscr{C}(D)$ 的幺模基矩阵. 证明：

$$\tau(D)=\pm\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

2.4.2 (a)设 $\boldsymbol{M}$ 是无环连通有向图 D 的关联矩阵. 证明：$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$ 中所有元素的代数余子式都为 $\tau(D)$(参见例 1.9.2).

(b)设 D 是如图 2.8 中所示的有向图. 分别利用(a)和习题 2.4.1,求出 $\tau(D)$(参见例 2.4.3).

2.4.3 设 G 是其顶点集为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的无环连通无向图,$\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵. $\boldsymbol{B}$ 是对角元素为 $b_{ii}=d_G(x_i)$ 的对角矩阵,$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$. 证明:

(a) $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$,其中 $\boldsymbol{M}$ 为 G 的任何一个定向图的关联矩阵;

(b) $\boldsymbol{N}$ 中的所有元素的代数余子式均等于 $\tau(G)$.

2.4.4 若矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的所有子方阵的行列式均为 0,−1 或 1,则 $\boldsymbol{T}$ 为**全幺模矩阵**(**totally unimodular matrix**). 证明:

(a)有向图 D 的割空间 $\mathscr{B}(D)$ 和圈空间 $\mathscr{C}(D)$ 中 对应于支撑林的基矩阵是全幺模的;

(b)无环有向图 D 的关联矩阵是全幺模的;

(c)简单无向图 G 的关联矩阵是全幺模的$\Leftrightarrow G$ 是 2 部分图.

2.4.5 证明:

(a)$\tau(C_n)=n$,其中 C_n 是以 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为其顶点集的 n 阶圈;

(b) $\tau(K_n-e)=(n-2)n^{n-3}$,其中 K_n-e 表示从以 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为其顶点集的 K_n 中除掉任何一条边后得到的子图;

(c) $\tau(K_{m,n})=m^{n-1}n^{m-1}$,其中 $K_{m,n}$ 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的完全 2 部分图,$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$.

2.4.6 设 D 是非平凡无环连通有向图,a 是 D 的任意一条边. 证明:

$$\tau(D)=\tau(D\cdot a)+\tau(D-a).$$

2.4.7 设 H 是用 k 条两端点相同的边替代简单无向图 G 中每条边后而得到的图. 证明:$\tau(H)=k^{\nu-1}\tau(G)$.

2.4.8 设 D 不含有向圈,$\tau_x(D)$ 表示 D 中根在 x 的支撑树形图的数目.

(a) 证明:$\tau_x(D)=\prod\limits_{x\neq y\in V(D)} d_D^-(y)$.

(b)设 D 为图 2.9 所示的竞赛图 T_4. 对 $\forall x\in V(T_4)$,验证(a)的结论.

应　　用

2.5 最小连接问题

假设在某地区内要修建一个连接若干个城镇的公路系统. 已知城 x_i 与城 x_j 之间直通公路的造价为 c_{ij}. 试设计一个造价最低的建造方案.

这类问题很多,如某城市内供气系统的设计,供水系统的设计、供电系统以及通讯系统的设计等等. 我们把这类问题称为**最小连接问题**(**minimum connection problem**).

构作加权简单图(G,w),其中城镇 x_i 被视为 G 的顶点 x_i,$x_ix_j\in E(G)\Leftrightarrow c_{ij}$

$<\infty$(若 $c_{ij}=\infty$,则认为城 x_i 和城 x_j 之间不可能修筑公路),$w(x_ix_j)=c_{ij}$. 于是最小连接问题就转化为在(G,w)中找出一棵权和最小的支撑树. 这样的支撑树称为**最小树(minimum tree)**.

显然,最小连接问题有解,即最小树存在的一个必要条件是 G 为连通图. 反之,连通图 G 中最小树是存在的(因为由推论2.9.5有 $\tau(G)\leqslant\tau(K_\nu)=\nu^{\nu-2}$). 枚举 G 的所有支撑树,然后比较它们的权和,找出最小树. 用这种方法来找出 G 的最小树无疑是可以的. 但一般说来,当 ν 很大时,列出 $\tau(G)$棵支撑树本身就是一件十分困难的事. 因此有必要寻找求最小树的有效方法.

目前有许多算法可用来求加权连通简单图(G,w)的最小树,其中最为著名的是 Prim (1957)算法和 Kruskal (1956)算法. 下面介绍 Prim 算法,而 Kruskal 算法见习题(2.5.3).

首先考虑最简单的情形,即对每个 $e\in E(G)$均有 $w(e)=1$. G 中任何一棵支撑树都是最小树. 于是,只须构造出任何一棵支撑树就可以了. 基于习题 1.5.4 (a) ,有如下递归算法:

1. 任取 $x_0\in V(G)$,令 $V_0=\{x_0\}$,$T_0=x_0$,$k=0$.
2. 若 V_{k-1}和 T_{k-1}已选好,则任取 $e_k\in(V_{k-1},\bar{V}_{k-1})$. 因而存在 $u\in V_{k-1}$,$x_k\in\bar{V}_{k-1}$使 $e_k=ux_k$. 令 $V_k=V_{k-1}\cup\{x_k\}$,$T_k=T_{k-1}+e_k$.
3. 若 $k<\nu-1$,则转 2;若 $k=\nu-1$,则停止.

这个算法是可行的,因为每步构造出的是顶点集为 V_k 的子树 T_k. 由于 G 是连通的,所以该算法必停止于 $V_{\nu-1}=V(G)$和 G 中一棵支撑树 T_ν. Prim 推广了上述算法到一般情形.

Prim 算法

1. 任取 $x_0\in V(G)$,$l(x_0)=0$,$l(x)=\infty(x\neq x_0)$,$V_0=\{x_0\}$,$T_0=x_0$ 且 $k=0$.
2. 对 $\forall\, x\in N_G(x_{k-1})\cap\bar{V}_{k-1}$,若 $w(x_{k-1}x)<l(x)$,则用$w(x_{k-1}x)$替代 $l(x)$. 选取 $x_k\in\bar{V}_{k-1}$使 $l(x_k)=\min\{l(x):x\in\bar{V}_{k-1}\}$. 设 $e_k=ux_k$,$u\in V_{k-1}$使 $w(e_k)=l(x_k)$. 令 $V_k=V_{k-1}\cup\{x_k\}$,$T_k=T_{k-1}+e_k$.
3. 若 $k<\nu-1$,则转 2;若 $k=\nu-1$,则停止.

Prim 算法的执行过程是最小树的增长过程.

例 2.5.1 考虑图 2.13(a)所示的加权图(G,w). 按 Prim 算法构造最小树 $T_{\nu-1}$的过程图解在图 2.13 中,其中(b)所示的是算法的第 1 步;而(c)到(h)所示的是算法第 2 步的 6 次迭代,每次迭代后得到一个新顶点 x_k 和一条新边 e_k(图中粗边所示). 最后得到的最小树 $T_{\nu-1}$ 如图 2.13(h)所示(粗边). $w(T_{\nu-1})=21$ (即各顶点标号 $l(x)$之和). □

下述定理确保了由 Prim 算法求出的 $T_{\nu-1}$ 是 G 的最小树.

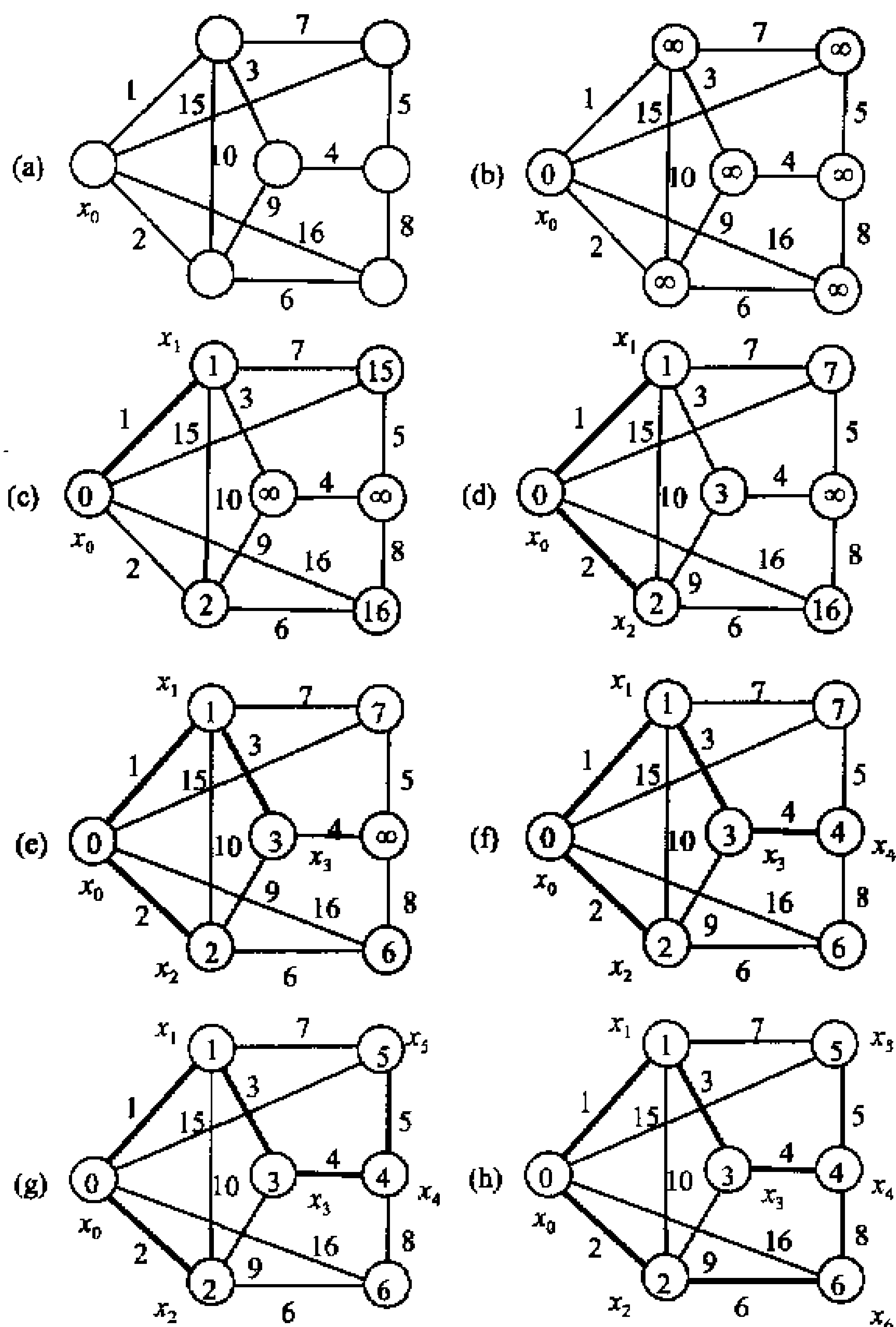


图 2.13　Prim 算法的应用

定理 2.10　按 Prim 算法求出的 $T_{\nu-1}$ 是加权连通图 (G,w) 的最小树.

证明　我们只须证明 T_k 是 G 中某株最小树的子图. 对 $k\geqslant 0$ 用归纳法. 当 $k=0$ 时,结论显然成立. 假设结论对 $k-1$ 成立. 考虑 $T_k=T_{k-1}+e_k$.

我们先证 T_k 是树. 由归纳假设 T_{k-1} 是树. 由于 $V(T_{k-1})=V_{k-1}$ 且 $e_k\in E_G[V_{k-1},\overline{V}_{k-1}]$(习题 1.5.4(a)保证了 e_k 的存在性),所以 T_k 是连通的. 又因为 $e_k=ux_k,u\in V_{k-1},x_k\in\overline{V}_{k-1}$,所以顶点 x_k 是 T_k 中 1 度点,即 $T_k=T_{k-1}+e_k$ 无圈,

因而 T_k 是树.

下面证明 T_k 是 G 中某株最小树的子图. 由归纳假设 T_{k-1} 是 G 中最小树 T^* 的子图. $T_k=T_{k-1}+e_k$. 若 $e_k\in T^*$，则 T_k 是 T^* 的子图. 若 $e_k\notin T^*$，则由定理 2.5 知 T^*+e_k 含唯一圈 C. 由于 $e_k\in E_G(V_{k-1},\bar{V}_{k-1})$，所以存在 $e'_k\in C$ 并且 $e'_k\in E_G(V_{k-1},\bar{V}_{k-1})$，$e'_k\neq e_k$. 令 $T'=(T^*+e_k)-e'_k$，则 $T_k\subseteq T'$. 于是我们只须证明 T' 也是 G 的最小树. 由于 T' 是连通的，并且 $\varepsilon(T')=\nu-1$，所以由定理 2.3 知 T' 是 G 的另一株支撑树，并且

$$w(T')=w(T^*)+w(e_k)-w(e'_k). \tag{2.10}$$

在 Prim 算法中选取的边 $e_k\in E_G(V_{k-1},\bar{V}_{k-1})$ 且具有最小的权，所以

$$w(e_k)\leqslant w(e'_k). \tag{2.11}$$

结合(2.10)式和(2.11)式，有 $w(T')\leqslant w(T^*)$，即 T' 也是 G 的最小树. 由归纳原理，定理得证. □

现在，我们估计利用 Prim 算法求最小树最多需要计算的次数. 执行第 1 步需要 $\nu+3$ 次，第 3 步需要执行 $\nu-1$ 次. 第 2 步需要执行 $\nu-1$ 次. 第 k 次执行第 2 步中"用 $w(x_{k-1}x)$ 替代 $l(x)$"时，检查 $N_G(x_{k-1})\cap\bar{V}_{k-1}$ 中顶点标号 $l(x)$，最多需要 $|\bar{V}_{k-1}|=\nu-k+1$ 次替代；而执行"选取 $x_k\in\bar{V}_{k-1}$ 使 $l(x)=\min\{l(x):x\in\bar{V}_{k-1}\}$"时最多需要做 $\nu-k$ 次比较；在执行"$e_k=ux_k$，$u\in V_{k-1}$ 使 $w(e_k)=l(x_k)$"时，$u\in N_G(x_k)\cap V_{k-1}$，故最多需要 $k-1$ 次比较，再加上两次赋值于 V_k 和 T_k. 因此第 2 步最多需要计算次数为

$$\sum_{k=1}^{\nu-1}[(\nu-k+1)+\nu-k+k-1+2]=\frac{3}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu-2.$$

于是该算法共计算次数最多为

$$(\nu+3)+(\nu-1)+\frac{3}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu-2=\frac{3}{2}\nu^2+\frac{5}{2}\nu.$$

稍加修改 Prim 算法的第二步，就可以用来求有向加权图中根在 x_0 的最小支撑树形图(如果该图存在根在 x_0 的支撑树形图的话)，留给读者自习之(习题 2.5.5).

一个图论算法称为**有效的**(**efficient**)或**好的**(**good**)，如果在任何图上执行这个算法所需要的计算次数都可由 ν 和 ε 的多项式(例如 $3\nu^2\varepsilon$)为其上界. 这个上界，习惯上称为**计算复杂度**，简称为**复杂度**(**complexity**). 例如，Prim 算法的复杂度为 $\frac{3}{2}\nu^2+\frac{5}{2}\nu$，记为 $O(\nu^2)$. 一个算法的复杂度若为指数(例如 2^ν)或 $\nu!$，则当 ν 较大时，该算法是无效的. 一个问题 T，如果存在一个有效算法来求解，则称 T 为 P 问题. Prim 算法的复杂度为 $O(\nu^2)$，所以该算法是一个有效算法，即最小连接问题是 P 问题. 有一类问题被称为 NP 问题. Cook(1970)发现 NP 问题中有

一类问题，若能判断其一是P问题，则这类问题中都是P问题. 这类问题称为NP完全(**non-deterministic polynomial complete**)问题，简称NPC问题.

图论中有许多问题属于NPC问题. 欲作进一步了解的读者可参阅Garey & Johnson (1979)、Gibbons (1985)著作的第八章和王树禾(1990)著作的第十五、十六章以及谢政和李建平(1995)著作的第十一章.

习 题

2.5.1 利用Prim算法求下列加权图中的最小树.

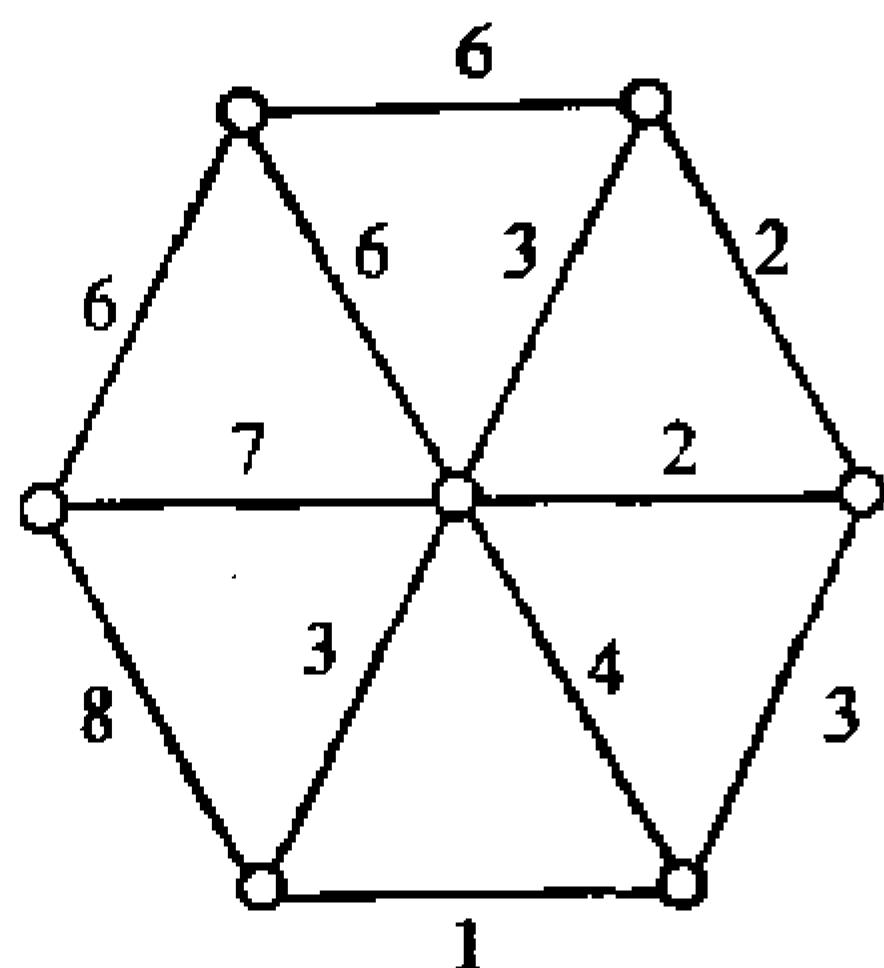
2.5.2 证明：若加权连通简单图G中每条边的权不同，则由Prim算法求得的最小树是唯一的.

2.5.3 求加权连通简单图(G,w)中最小树的**Kruskal**算法如下：

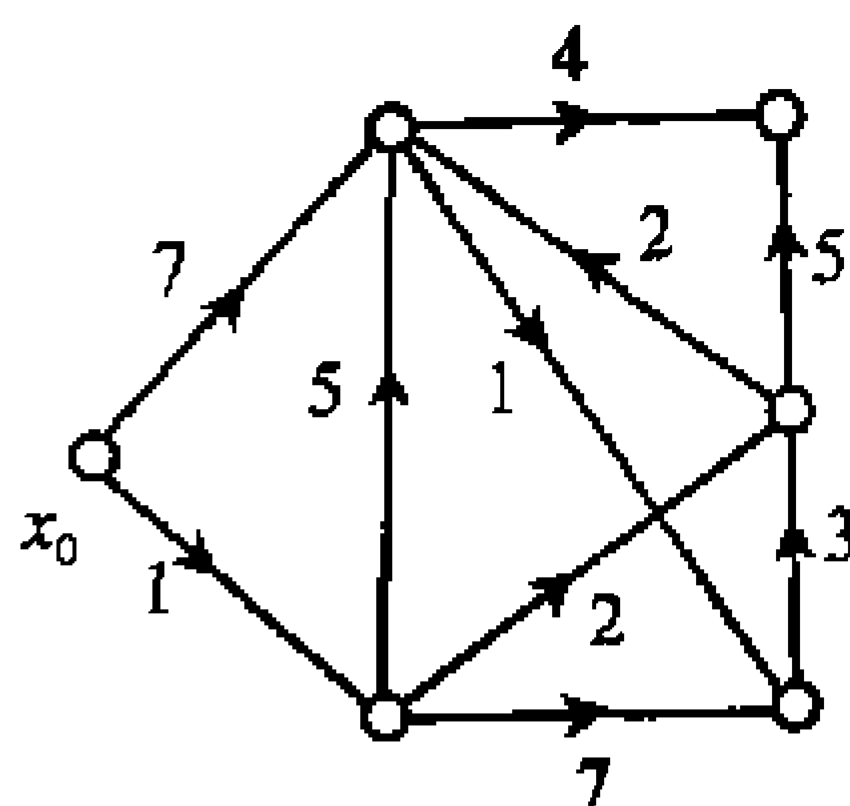
1. 选取$e_1\in E(G)$使$w(e_1)$尽可能小，
2. 若$e_1,e_2,\cdots,e_i$选定，则取$e_{i+1}\in E(G)\setminus\{e_1,\cdots,e_i\}$使$G[\{e_1,\cdots,e_i,e_{i+1}\}]$不含圈而且$w(e_{i+1})$尽可能地小，
3. 若$i<\nu-1$，则转2；若$i=\nu-1$，则停止.

(a)证明：由Kruskal算法构作G的子图必是G的最小树.

(b)利用Kruskal算法求出下图中最小树.



(习题2.5.1和习题2.5.3)



(习题2.5.5)

2.5.4 Prim算法和Kruskal算法是否可以用来求加权连通简单图中的最大权和支撑树？若可以，怎样实现？

2.5.5 求加权简单有向图(D,w)中根在x_0的最小支撑树形图的Prim算法(如果该图存在根在x_0的支撑树形图的话)：

1. 令$l(x_0)=0$，$l(x)=\infty(x\neq x_0)$，$V_0=\{x_0\}$，$T_0=x_0$且$k=0$.
2. 设$x\in N_D^+(x_{k-1})\cap\overline{V}_{k-1}$. 若$w((x_{k-1},x))<l(x)$， 则用$w((x_{k-1},x))$替代$l(x)$. 选取$x_k\in\overline{V}_{k-1}$使$l(x_k)=\min\{l(x):x\in\overline{V}_{k-1}\}$. 设$a_k=(u,x_k)$，$u\in V_{k-1}$使$w(a_k)=l(x_k)$. 令$V_k=V_{k-1}\cup\{x_k\}$，$T_k=T_{k-1}+a_k$.
3. 若$k=\nu-1$，则停止；若$k<\nu-1$，则用$(k+1)$替代k转入第二步.

(a)证明:由此算法构作的子图必是 D 中根在 x_0 的最小支撑树形图.

(b)利用此算法求出上图中根在 x_0 的最小支撑树形图.

(c)证明:此算法可以用来检验任何有向图是否存在根在 x_0 的支撑树形图.

2.6 最短路问题

设有一个铁路系统连接着若干个城市,x_0 是该系统中的一个固定城市(比如是首都或者省会城市). 在该系统中试求从 x_0 到其他各城市的最短路线. 这个问题称为**最短路问题(shortest path problem)**.

我们用一个加权简单无向图(G,w)来表示这个铁路系统,其中 $w\in\mathscr{E}(G)$. 边 $e=xy$ 上的值 $w(e)$表示城市 x 和城市 y 之间的铁路里程. 于是最短路问题就归结为在加权图(G,w)中找出从顶点 x_0 到其他顶点 y 且具有最小权的 x_0y 的路.

更一般的最短路问题的提法是:设(D,w)是有正值加权简单有向图,x_0 是 D 中的一个固定顶点. 寻找从 x_0 到其他顶点 y 且具有最小权的有向路.

显然,最短路问题有解的一个必要条件是 D 中存在根在 x_0 的支撑树形图. 反之,若 D 中存在根在 x_0 的支撑树形图,则最短路问题一定有解. 以下我们假定 D 中存在根在 x_0 的支撑树形图.

乍看起来,最短路问题与最小连接问题很相似,其实不然. 即使是对于无向图中最短路问题,Prim 算法也无能为力. 例如,图 2.13(h)中粗边所示的是用 Prim 算法求出的支撑树 T. 由习题2.5.2知,T 是唯一的最小树. 沿着 T 的边,从 x_0 到 x_5 的路 P 的长度为 13. 但从 x_0 出发,经过 x_1,沿边 x_1x_5 到达 x_5 的路 Q 的长度为 8. 因此,P 不是 G 中最短 x_0x_5 路. 于是,为求解最短路问题,我们必须寻找另外的方法.

下面叙述的算法是 Moore (1957)、Dijkstra (1959)、Dantzig(1960)以及 Whiting & Hillier (1960)各自发现的. 该算法基于习题 1.5.4(d),修改了 Prim 算法第二步. 在整个算法中,试图求出一个函数 $l\in\mathscr{V}(D)$和含 x_0 的顶点子集序列 S_k 以及以 S_k 为顶点集的根在 x_0 的树形图序列 T_k,$k=0,1,\cdots,\nu-1$.

Moore-Dijkstra 算法

1. $l(x_0)=0, l(x)=\infty(x\neq x_0), S_0=\{x_0\}, P_0=x_0, k=0$.
2. 对每个 $x\in N_D^+(x_k)\cap\overline{S}_k$,用 $\min\{l(x),\{l(x_k)+w(x_k,x)\}\}$替代 $l(x)$. 取 $x_{k+1}\in N_D^+(S_k)\cap\overline{S}_k$ 和 $x_j\ (j\leqslant k)\in S_k$ 使$(x_j,x_{k+1})\in E(D)$并且 $l(x_{k+1})=\min\limits_{x\in\overline{S}_k}\{l(x)\}=l(x_j)+w((x_j,x_{k+1}))$. 令 $S_{k+1}=S_k\cup\{x_{k+1}\}$, $P_{k+1}=P_j+(x_j,x_{k-1})$.
3. 若 $k=\nu-1$,则停止. 若 $k<\nu-1$,则用 $k+1$ 替代 k 并转入第二步.

下面举例说明这个算法的应用.

例 2.6.1　我们考虑 2.14(a)所示的加权图(D,w). Moore-Dijkstra 算法执行如下：

1. $l(x_0)=0, l(y_1)=l(y_2)=l(y_3)=l(y_4)=l(y_5)=\infty$. $S_0=\{x_0\}, P_0=x_0$, $k=0$(见图 2.14(b)).
2. ①$N_D^+(x_0)\cap\overline{S}_0=N_D^+(S_0)\cap\overline{S}_0=\{y_1,y_2\}$.
   $l(y_1)=\min\{\infty, l(x_0)+w((x_0,y_1))\}=\min\{\infty,0+7\}=7$,
   $l(y_2)=\min\{\infty, l(x_0)+w((x_0,y_2))\}=\min\{\infty,0+1\}=1$.
   令 $x_1=y_2, S_1=S_0\cup\{x_1\}=\{x_0,x_1\}, P_1=P_0+(x_0,x_1), k=1$(见图 2.14(c)).
   ②$N_D^+(x_1)\cap\overline{S}_1=N_D^+(S_1)\cap\overline{S}_1=\{y_1,y_4,y_5\}$.
   $l(y_1)=\min\{l(y_1), l(x_1)+w((x_1,y_1))\}=6$,
   $l(y_4)=\min\{l(y_4), l(x_1)+w((x_1,y_4))\}=3$,
   $l(y_5)=\min\{l(y_5), l(x_1)+w((x_1,y_5))\}=8$.
   令 $x_2=y_4, S_2=S_1\cup\{x_2\}=\{x_0,x_1,x_2\}, P_2=P_1+(x_1,x_2), k=2$(见图 2.14(d)).
   ③$N_D^+(x_2)\cap\overline{S}_2=\{y_1,y_3\}$，而 $N_D^+(S_2)\cap\overline{S}_2=\{y_1,y_3,y_5\}$.
   $l(y_1)=\min\{l(y_1), l(x_2)+w((x_2,y_1))\}=5$,
   $l(y_3)=\min\{l(y_3), l(x_2)+w((x_2,y_3))\}=8$,
   $l(y_5)=8$.
   令 $x_3=y_1, S_3=S_2\cup\{x_1\}=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}, P_3=P_2+(x_2,x_3), k=3$(见图 2.14(e)).
   ④$N_D^+(x_3)\cap\overline{S}_3=\{y_5\}$，而 $N_D^+(S_3)\cap\overline{S}_3=\{y_3,y_5\}$.
   $l(y_5)=\min\{l(y_5), l(x_3)+w((x_3,y_5))\}=6$,
   $l(y_3)=8$.
   令 $x_4=y_5, S_4=S_3\cup\{x_4\}=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\}, P_4=P_3+(x_3,x_4), k=4$(见图 2.14(f)).
   ⑤$N_D^-(x_4)\cap\overline{S}_4=\varnothing$，而 $N_D^-(S_4)\cap\overline{S}_4=\{y_3\}$.
   　$l(y_3)=8$.
   令 $x_5=y_3, S_5=S_4\cup\{x_5\}=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}, P_5=P_2+(x_2,x_5), k=5$(见图 2.14(g)).
3. $k=5=6-1$，停止. 最后，我们得到一棵根在 x_0 的树形图，如图 2.14(h)所示. □

Moore-Dijkstra 算法的执行过程如图 2.14 所示. 每一步已确定的最短$(x_0,$

x_i)路用粗边表示．我们将证明图中顶点 x_i 的标号 $l(x_i)$ 就是 D 中从 x_0 到 x_i 的距离 $d_D(x_0,x_i)$．从图 2.14 可以看出，Moore-Dijkstra 算法执行过程实际上是 D 中根在 x_0 的支撑树形图的生长过程．

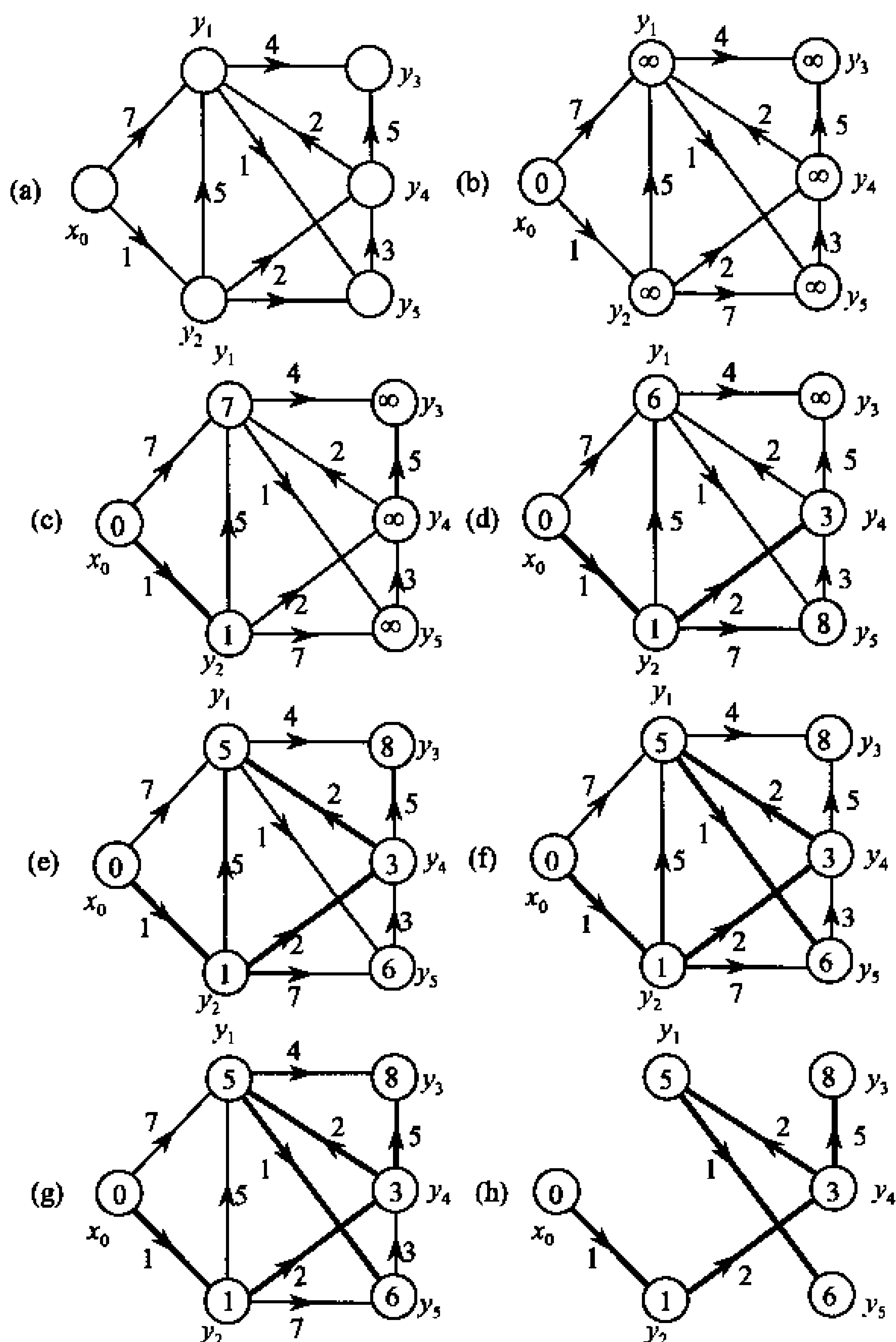


图 2.14　最短路算法的应用

Moore-Dijkstra 算法结束时构作的子图 T 是 ν 个顶点，$\nu-1$ 条边，无圈且连通，因而 T 是 D 的支撑树．又由于 $d_T^-(x_0)=0$，$d_T^-(x_i)=1(i\neq0)$，所以(由习题 2.1.1)，T 为树形图．下述定理确保了 T 中 (x_0,x_i) 路是 D 中最短 (x_0,x_i) 路．

定理 2.11 设 T 是 (D,w) 中由 Moore-Dijkstra 算法求出的根在 x_0 的支撑树形图，则对每个 $x\in V(D)$，T 中 (x_0,x) 路是 D 中最短 (x_0,x) 路.

证明 只须证明对每个 $x\in V(D)$，均有 $d_D(x_0,x)=l(x)$.

一方面，由 T 的构造知，T 中存在一条长为 $l(x)$ 的 (x_0,x) 路 P. 因此 $d_D(x_0,x)\leqslant l(x)$，而且存在 k，$x_j\in V(T)$ 和 T 中一条 (x_0,x_j) 路 P_j 使 $x\in\bar{S}_k$，$x_j\in S_k$ 且 $P=P_j+(x_j,x)$. 另一方面，设 Q 是 D 中一条最短 (x_0,x) 路，并设 Q 与 $\bar{S}_k$ 第一个公共顶点为 y. 于是 y 将 Q 分成长度分别为 l_1 和 l_2 的两段 $Q(x_0,y)$ 和 $Q(y,x)$. 由于 $y\in\bar{S}_k$，所以 $l_1\geqslant l(y)\geqslant l(x)$，$l_2\geqslant 0$. 故 Q 的长度 $=d_D(x_0,x)=l_1+l_2\geqslant l(x)$. 这就证明了 $d_D(x_0,x)=l(x)$. □

Moore-Dijkstra 算法是个好算法，其复杂度为 $O(\nu^2)$，留给读者作为习题（见习题 2.6.1）.

Moore-Dijkstra 算法求出从 x_0 到任何另外顶点 x 的最短路和距离 $l(x)$. 由于 x_0 是任意取定的顶点，所以当 x_0 取遍图中所有顶点时，即 Moore-Dijkstra 算法重复执行 ν 次以后就能求出图 D 的直径 $d(D)$.

例如，在图 2.15 所示的加权有向图 (D,w) 上执行 6 次后求出 D 中根在 x_i $(i=0,1,2,3,4,5)$ 的支撑树形图如图 2.15 所示，其中根在 x_0 的支撑树形图如图 2.14(h) 所示. 对于每棵根在 x_i 的支撑树形图 T_{x_i} $(0\leqslant i,j\leqslant 5)$，顶点 x_j 上的标号即为距离 $d_D(x_i,x_j)$. 以 $d_D(x_i,x_j)$ 作为 (i,j) 元素所构成的 6 阶方阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 12 & 0 & 2 & 4 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 13 & 14 & 3 & 5 & 0 & 8 \\ 17 & 18 & 13 & 9 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

称为**距离矩阵(distance matrix)**. 比较矩离矩阵中的元素，即得 D 的直径 $d(D)=\max\{d_D(x_i,x_j):0\leqslant i,j\leqslant 5\}=18$.

由于求 $d(D)$ 需重复执行 Moore-Dijkstra 算法 ν 次，然后对矩离矩阵中 ν^2 个元素比较，所以该算法求直径的计算复杂度为 $O(\nu^3)$.

最后，我们解一个民间流传甚广的趣味游戏题.

例 2.6.2 设有 A、B、C 3 只水桶，容积分别为 12 升、9 升和 5 升，A 中盛满 12 升水. 试问：如何利用空桶 B 和 C 来把 A 中的水分成两半？

这个问题看起来很简单，解起来却不容易. 任何人都不会用这 3 只桶翻来覆去地倾倒来做试验，而是把所需要做的试验步骤制成一张表. 如下表：

A(12)	7	7	2	2	11	11	6	6
B(9)	0	5	5	9	0	1	1	6
C(5)	5	0	5	1	1	0	5	0

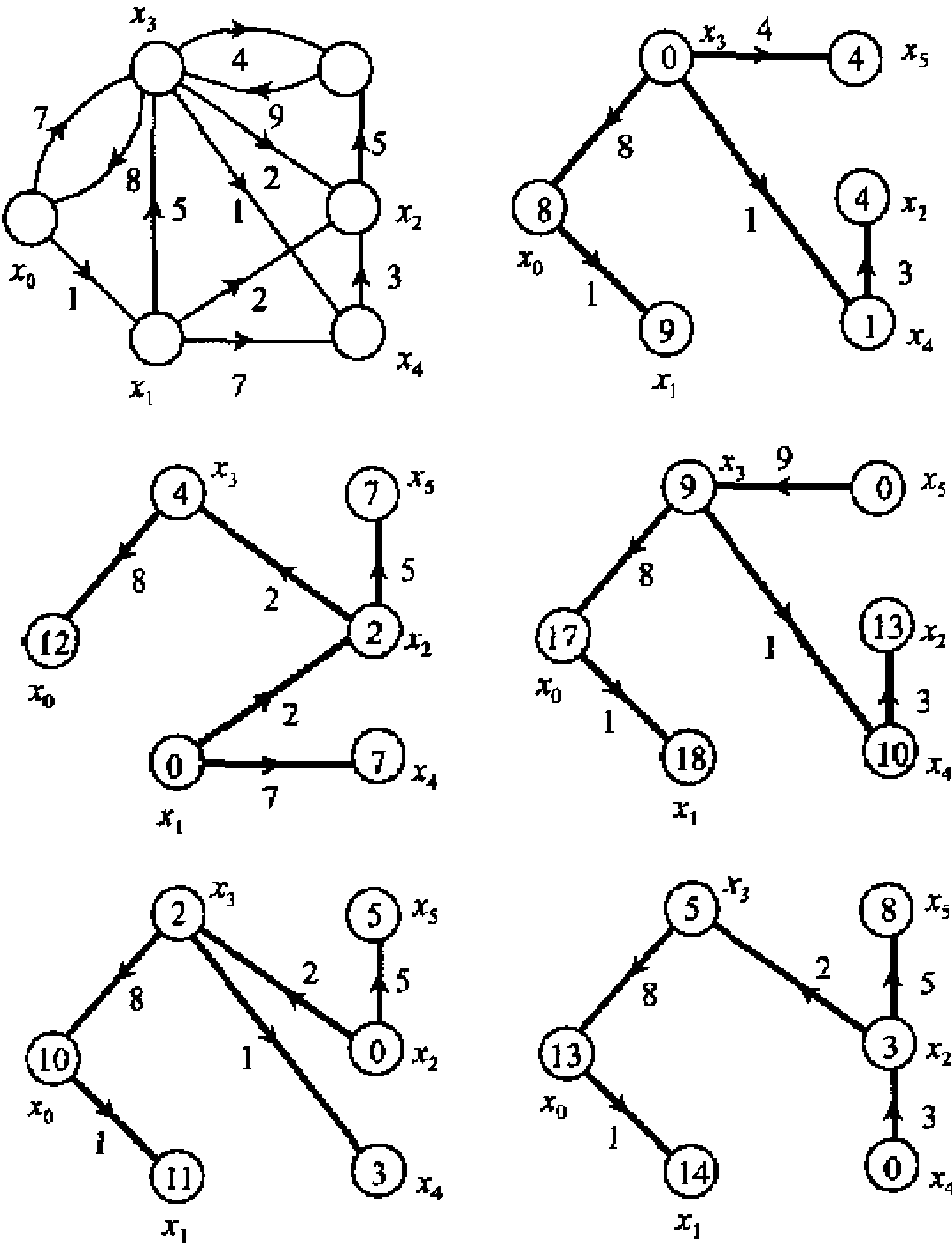


图 2.15 根在 $x_i(i=1,2,3,4,5)$的支撑树形图

按表中 1,2,…,8 列的顺序依次倾倒. 例如:

第一步(列):把 C 装满,B 空着,A 中剩下 7 升水;

第二步(列):把 C 中 5 升水倒入 B 中,C 空着,A 中仍有 7 升水;

第三步(列):从 A 中倒出 5 升水到 C 中,此时 B 和 C 中均有 5 升水,A 中剩下 2 升水;

第四步(列):将 C 中水把 B 灌满,此时 B 中有 9 升水,C 中有 1 升水,A 中

有 2 升水；

第五步(列)：将 B 中 1 升水倒入 A 中，此时 A 中有 11 升水，C 中有 1 升水，B 空着；

第六步(列)：将 C 中 1 升水倒入 B 中，此时 A 中有 11 升水，B 中有 1 升水，C 空着；

第七步(列)：将 A 中水把 B 灌满，此时 A 中有 6 升水，B 中有 1 升水，C 中有 5 升水；

第八步(列)：将 C 中 5 升水倒入 B 中，此时 C 是空的，A 和 B 中各有 6 升水.

上述表格是一系列试验得出的结果，并没有一般的规律可循. 是否存在少于 8 次倾倒的解？我们通过求图中最短路来给出此类游戏的一般解法.

用有序数值 (b,c) 表示桶 B 和桶 C 中水的数量分布. 例如，(0,0) 表示 B 和 C 都是空的；(6,0) 表示 B 中有 6 升水，而 C 是空的，等等. 由于 b 和 c 都是非负整数且 $b+c\leqslant 12$，所以 (b,c) 只有以下 26 种取值：

(0,0)，(1,0)，(2,0)，(3,0)，(4,0)，(5,0)，(6,0)，
(7,0)，(8,0)，(9,0)，(0,1)，(0,2)，(0,3)，(0,4)，
(0,5)，(1,5)，(2,5)，(3,5)，(4,5)，(5,5)，(6,5)，
(7,5)，(8,4)，(9,1)，(9,2)，(9,3).

用 26 个顶点 x_{bc} 代表这 26 个分布 (b,c)，顶点 x_{bc} 和 $x_{b'c'}$ 之间有一条边相连 $\Leftrightarrow$ 分布 (b,c) 和 (b',c') 之间可以通过一次倾倒而相互得到. 例如对于分布 (3,5)，将 C 中 5 升水倒入 B 中，则得分布 (8,0)；反之，对于分布 (8,0)，用 B 中水灌满 C 便得到分布 (3,5). 于是，代表这两个分布的两个顶点 x_{35} 和 x_{80} 之间连一条边. 这样得到一个 26 阶简单无向图 G，如图 2.16 所示.

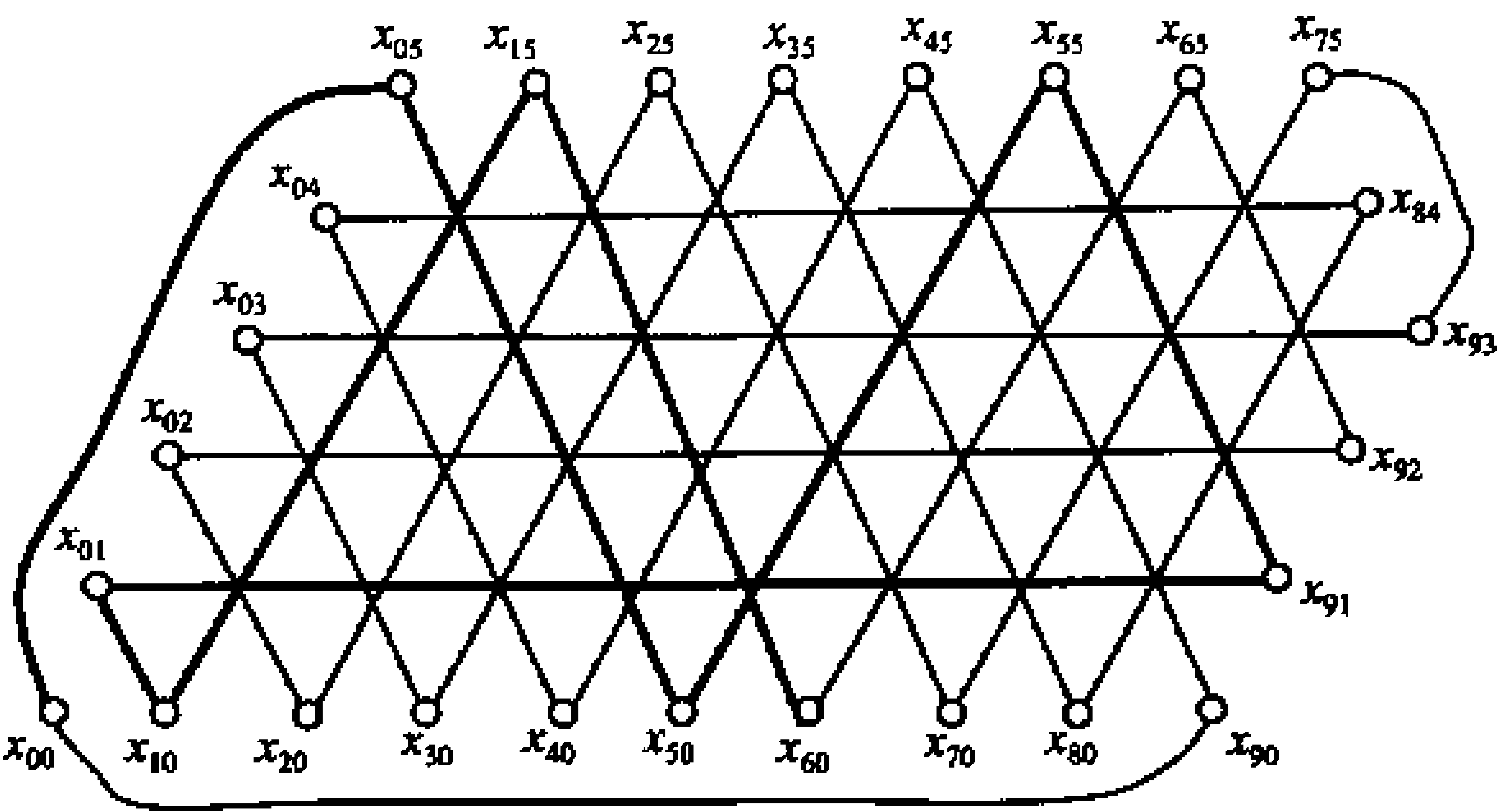


图 2.16

由于从分布(b,c)到分布(b',c')是通过将 B 和 C 之一中的水倒空或者灌满,所以,G 是 2 正则的. 于是,问题归结为在这样的 2 正则简单 G 中求一条从 x_{00} 到 x_{60} 的最短路. 由 Moore-Dijkstra 算法求出这样一条最短(x_{00},x_{60})路(图 2.16 中粗边所示):

$$P=(x_{00},x_{05},x_{50},x_{55},x_{41},x_{01},x_{10},x_{15},x_{60}).$$

这条路所示的方法就是前面表中所述的倾倒方法. 由此也说明:至少需要 8 次倾倒才能把 A 中的水分成两半.

在同样的问题中,若将 C 的容积改为 7 升,其余的不变,则不可能将 A 中的水分成两半. 这是因为对应的 2 正则图不连通,而且 x_{00} 与 x_{06},x_{60} 或 x_{66} 不在同一个连通分支中. 事实上,x_{06},x_{60} 和 x_{66} 所在的分支是由这 3 个点组成的三角形.见图 2.17 所示. □

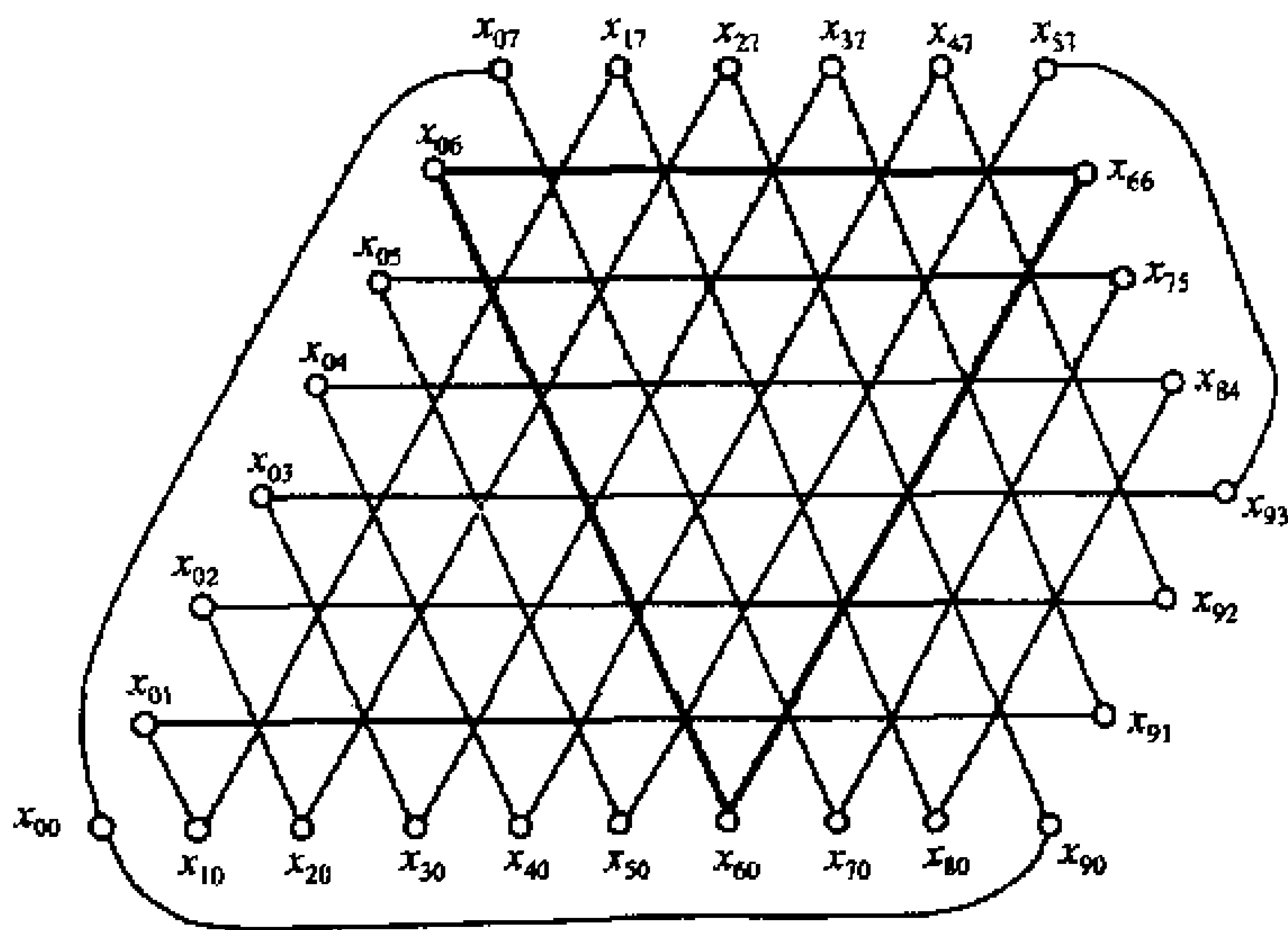


图 2.17

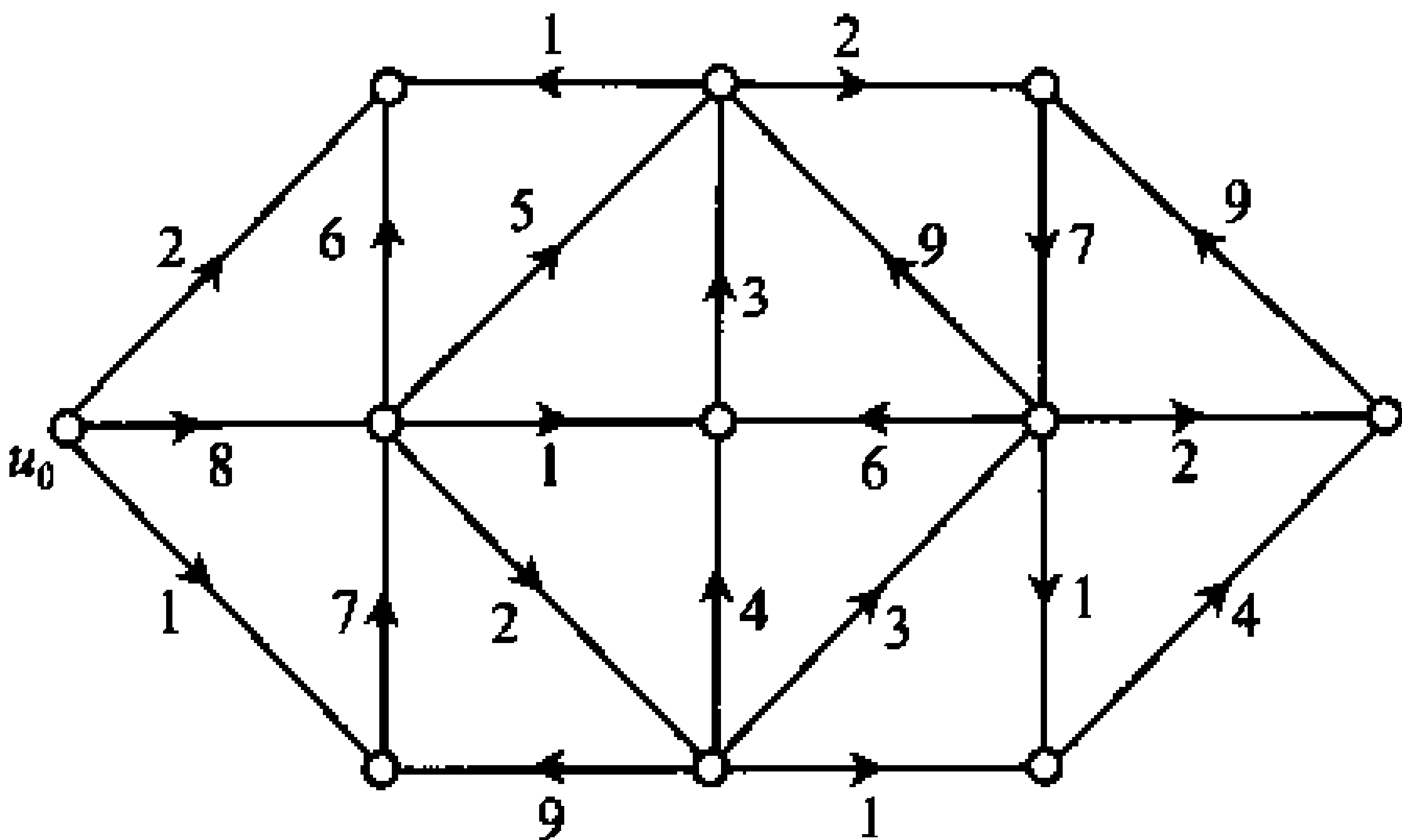
习 题

2.6.1 证明:Moore-Dijkstra 算法的复杂度为 $O(\nu^2)$.

2.6.2 在下边的加权图中找出从 u_0 到所有其他点的最短有向路.

2.6.3 某公司在 6 个城市 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 中都设有分公司. 从 x_i 到 x_j 的直接航程票价由下列矩阵的第(i,j)元素给出(∞表示无直达航线). 试为该公司制作一张任意两城市之间的最廉价路线表.

$$\begin{vmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{vmatrix}$$



（习题 2.6.2）

2.6.4　一只狼、一头山羊和一箩卷心菜都在河的同一侧. 一个摆渡人要将它们运过河对岸. 摆渡人每次只能载一样东西过河. 显然，不管是狼和山羊，还是山羊和卷心菜，都不能在无人监视的情况下留在一起. 问摆渡人怎样把它们运过河去？试为这位摆渡人设计一个最佳的运送方案.

2.6.5　有一只容积为 8 升的桶盛满了水，还有两只容积分别为 5 升和 3 升的空桶. 试问：

(a) 能否利用这两只空桶平分 8 升水？若能，平分水的最简单方法应当怎样？

(b) 能否利用两只容积分别为 5 升和 7 升的空桶来平分 8 升水？

2.7　电网络方程

1847 年，Kirchhoff 发表了一篇经典的报告，其中以公式形式总结了电网络理论中两条最重要的定律，即：

Kirchhoff 电流定律(KCL)：电网络中每个节点上各支路电流代数和为零.

Kirchhoff 电压定律(KVL)：电网络中每一圈路内各支路电压代数和为零.

根据这两个定律可以列出一组电网络方程，但是这些方程并不都是独立的. 当网络已知，如何确定独立方程数目？如何列出这些独立方程？Kirchhoff (1847)把电网络与图联系起来，利用树的概念回答了上述问题. 他的这一伟大创举被认为是图论发展的一个重要标志. 他所创立的这一分析方法至今仍是电网络中一个基本的分析方法.

一个电网络可以抽象成一个加权图(D,w). 节点视为顶点，支路视为边，其

方向与电流(或电压)方向一致,支路上电流(或电压)视为对应边的权. 显然 D 是连通的. 例如,图 2.18 中所示的是电网络和对应的有向图 D.

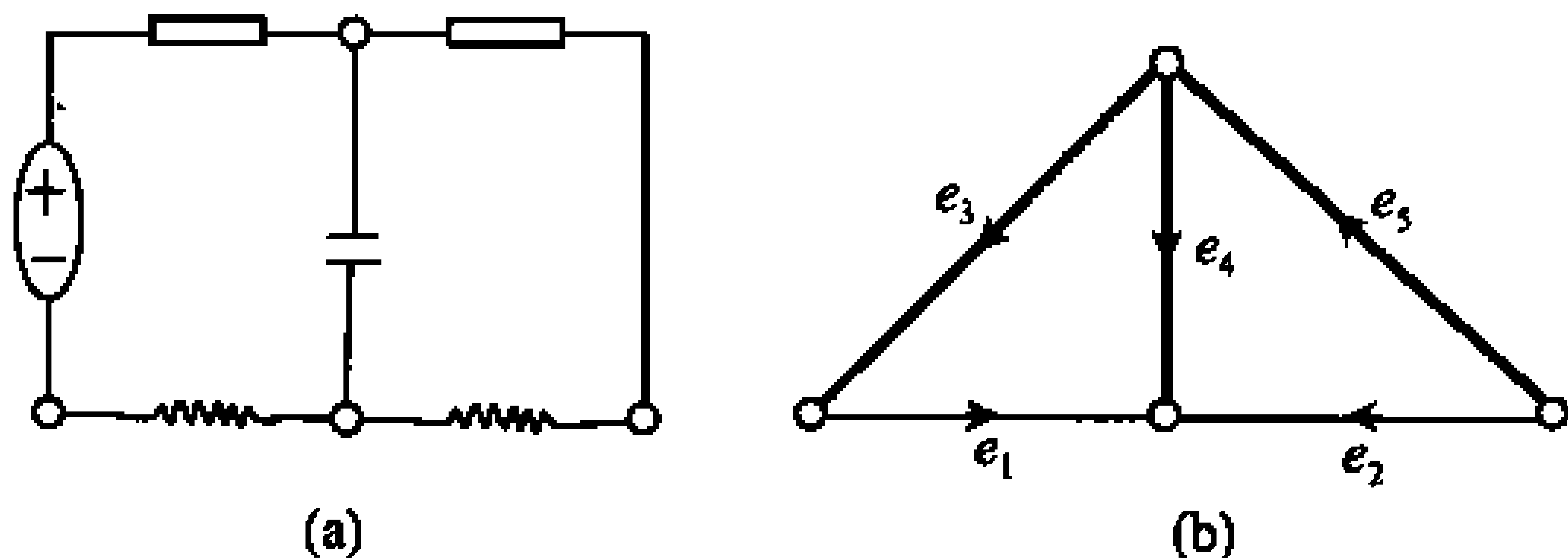


图 2.18 电网络和对应的有向图

用图论语言,KCL 和 KVL 可以分别表达为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{O}. \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}. \tag{2.13}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为 D 的关联矩阵,$\boldsymbol{w}\in\mathscr{E}(D)$ 称为电流列向量,而 $\boldsymbol{C}$ 为以 $\mathscr{C}(D)$ 中所有向量为行组成的矩阵,$\boldsymbol{u}\in\mathscr{E}(D)$ 称为电压列向量.

设 T 是 D 的支撑树,并给 $E(D)$ 中元素适当标号使 $\mathscr{B}(D)$ 中对应于 T 的基矩阵 $\boldsymbol{B}_T=(\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{I}_{\nu-1})$,$\mathscr{C}(D)$ 中对应于 T 的基矩阵 $\boldsymbol{C}_T=(\boldsymbol{I}_{\varepsilon-\nu+1} \quad \boldsymbol{C}_2)$. 令

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_c \\ \boldsymbol{w}_t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_c \\ \boldsymbol{u}_t \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{w}_c=\boldsymbol{w}\,|\,\overline{T}, \qquad \boldsymbol{w}_t=\boldsymbol{w}\,|\,T,$$

$$\boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{u}\,|\,\overline{T}, \qquad \boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}\,|\,T.$$

由于 rank $\boldsymbol{M}=\nu-1$,所以,(2.12)中的方程只有 $\nu-1$ 是独立的,并且与方程组

$$\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{w}=\boldsymbol{O}$$

同解,故有

$$\boldsymbol{w}_t=-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}_c.$$

这说明支撑树 T 各边上的电流可以用余树 $\overline{T}$ 各边上的电流表示出来.

另一方面,由于满足(2,12)式的列向量 $\boldsymbol{w}$ 的转置 $\boldsymbol{w}^T$ 是 $\mathscr{E}(D)$ 中的圈向量,所以 $\boldsymbol{w}^T\in\mathscr{C}(D)$. 因此 $\boldsymbol{w}^T$ 可以表示成 $\boldsymbol{C}_T$ 中行向量的线性组合,并且(由习题 2.3.6),

$$\boldsymbol{w}^T=(\boldsymbol{w}_c)^T\boldsymbol{C}_T,$$

即

$$\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{C}_T)^T\boldsymbol{w}_c.$$

这说明 D 中各边上的电流可以用余树 $\overline{T}$ 各边上的电流表示出来.

同样地,方程组(2.13)与 $\varepsilon-\nu+1$ 个独立方程组

$$\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{O}$$

同解,并有

$$\boldsymbol{u}_c=-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{u}_t.$$

这说明余树 $\overline{T}$ 各边上的电压可以用支撑树 T 各边上的电压表示出来.

另一方面，由于满足(2.13)式的列向量 $\boldsymbol{u}$ 的转置 $\boldsymbol{u}^T$ 与 $\mathscr{C}(D)$ 中任何向量都正交，所以 $\boldsymbol{u}^T\in\mathscr{B}(D)$. 因此 $\boldsymbol{u}^T$ 可以表示成 $\boldsymbol{B}_T$ 中行向量的线性组合，并且(由习题 2.3.6)

$$\boldsymbol{u}^T=\boldsymbol{u}_t^T\boldsymbol{B}_T,$$

即

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{B}_T)^T\boldsymbol{u}_t.$$

这说明 D 中各边上的电压可以用支撑树 T 各边上的电压表示出来.

例 2.7　考虑如图 2.18 所示的电网络和对应的有向图 D. D 中支撑树 T 为由 $\{e_3,e_4,e_5\}$ 导出的子图. $\mathscr{C}(D)$ 和 $\mathscr{B}(D)$ 中对应于 T 的基矩阵 C_T 和 B_T 分别为:

$$\boldsymbol{C}_T=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&0&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_T=\begin{bmatrix}-1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

电流和电压列向量分别为:

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\end{bmatrix}\text{和 }\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix}.$$

对应的 KCL 和 KVL 独立方程分别为:

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\\w_5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-w_1+w_3\\w_1+w_2+w_4\\w_2+w_5\end{bmatrix},$$

和

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 + u_3 - u_4 \\ u_2 - u_4 - u_5 \end{pmatrix}.$$

而且

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{C}_T)^T \boldsymbol{w}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_1 \\ -w_1 - w_2 \\ -w_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{B}_T)^T \boldsymbol{u}_t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_3 + u_4 \\ u_4 + u_5 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

本书不考虑电网络方程的具体解法，有兴趣的读者可参见陈树柏主编的《网络图论及其应用》一书.

习 题

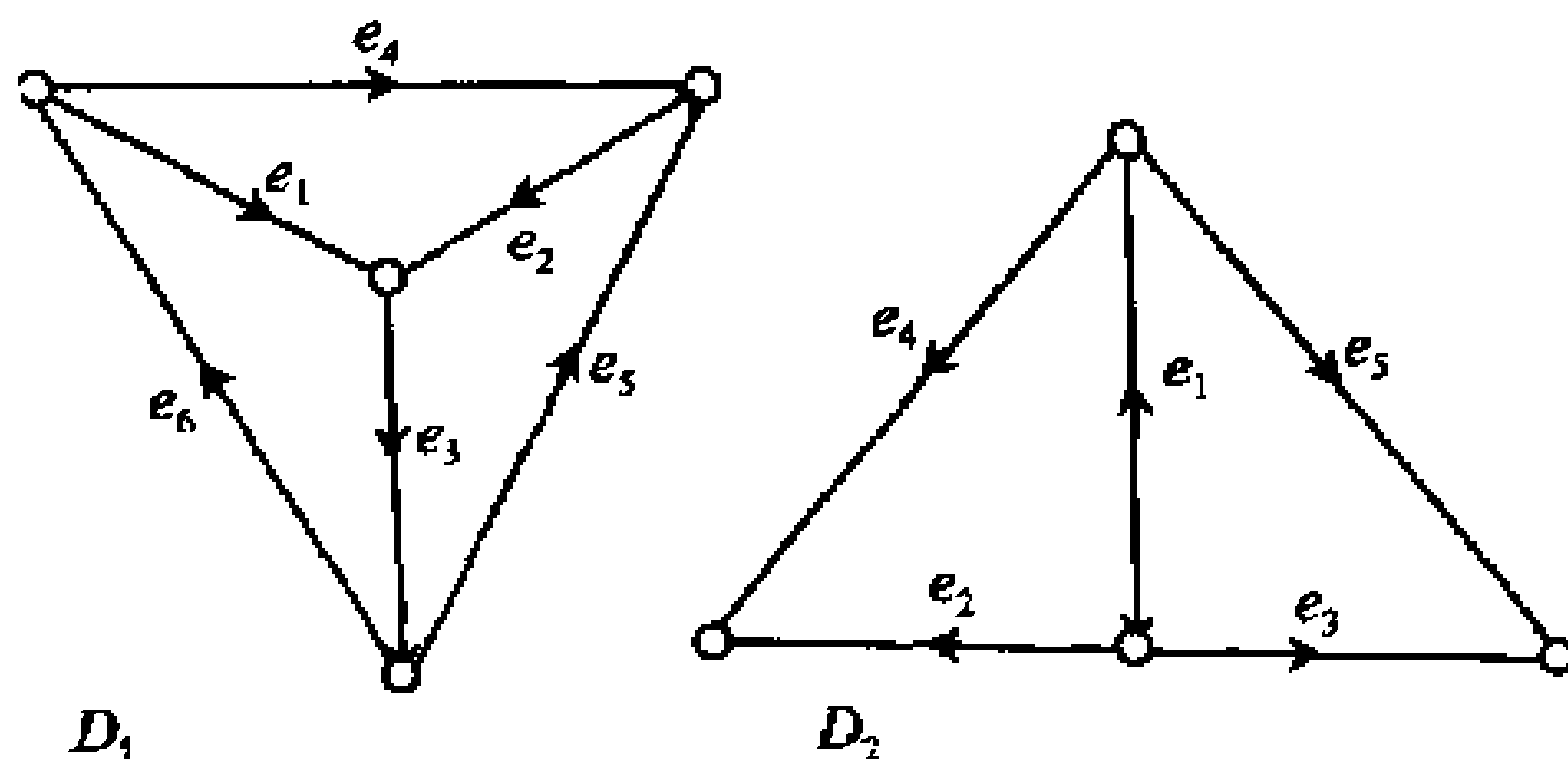
2.7.1 设 $T=\{e_1,e_2,e_3\}$ 是下列有向图 D_1 和 D_2 中的支撑树. 分别写出：

(a) KCL 的独立方程；

(b) KVL 的独立方程；

(c) $\boldsymbol{w}$ 关于 $\boldsymbol{w}_c$ 的表达式；

(d) $\boldsymbol{u}$ 关于 $\boldsymbol{u}_t$ 的表达式.



(习题 2.7.1)

2.7.2 证明 Tellegen 定理：若两电网络 N 和 $\overline{N}$ 对应同一有向图 D，并用 $\boldsymbol{u}$、$\overline{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{w}$、$\overline{\boldsymbol{w}}$ 分别表示 N 和 $\overline{N}$ 的支路电压和电流列向量，则

(i) $\boldsymbol{u}^T \overline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{O}$；

(ii) $\boldsymbol{w}^T \overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{O}$.

小结与参考文献

在这一章，我们的兴趣是树．它是一类最简单而又最重要的图．树的概念及其理论是 Kirchhoff 在 1847 年为解电网络中一类线性方程组而提出且发展起来的．1857 年，Cayley 在从事于计数有给定碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构物（习题 2.1.8）时也发现了树，并提出树的计数问题．后来，Jordan 作为一个纯数学的对象于 1869 年也独立地发现了树．

在这一章，我们介绍了树的基本理论．支撑树是图的重要概念．我们借助于线性代数中线性空间的理论引进了图空间概念，并利用线性代数的分析方法深入讨论了割边集与圈集以及割空间与圈空间之间的密切联系，并由此导出了求支撑树的计数公式．从这些讨论中，我们已看到支撑树对研究图的结构起了一个重要作用．以后，我们还要继续介绍支撑树的应用．割边集和圈集之间的密切联系将在 3.3 节作进一步的讨论．

也许图论中没有哪一个问题像求最短路问题那样引人注目．我们可以从各个不同的角度提出最短路问题，但每种情形都存在一个有效的算法．读者可参阅 Dreyfus(1969)的一篇综述文章．本章介绍的 Moore-Dijkstra 算法可以适用加权（非负）有向图或无向图．Burns & Haff(1976)给出的算法可以将全部支撑树按权的大小依次列出．

关于最小连接问题的历史综述见 Graham 和 Hell(1985)．最小连接问题的推广是所谓的 Steiner 树问题，即求连接加权图各顶点和（如果必要的话）某些另外顶点的最小权支撑树．它已被证明是 NPC 问题，一个近似解的有效算法见 Chang(1976)．一篇综述文献见刘振宏和马仲蕃(1991)．

图论已成为电路分析的重要工具，欲作进一步了解的读者可参阅陈树柏等所著《网络图论及其应用》(1982)．

化学被公认为图论的发源地之一．图论在化学领域中有着广泛的应用并日益发挥着重要作用．本节除习题 2.1.8 外，没有提及这方面的应用．有兴趣的读者可参阅 Balaban(1976)主编的专著和许禄、胡昌玉的《应用化学图论》(2000)．

1　Balaban A T. *Chemical Applications of Graph Theory*. London: Academic Press, 1976（中译本：巴拉班 A T 著，金晓龙，陈志鹤译．图论在化学中的应用．北京：科学出版社，1983）

2　Bondy J A and Mutry U S R. *Graph Theory with Applications*. London and Basingstoke: Mac Milian Press, 1976（中译本：邦迪 J A，默蒂 U S A 著，吴望名等译．图论及其应用．北京：科学出版社，1984）

3 Burns R N and Haff C E. A combinatorial raking problem. *Acquationes Math*, 1976, **14**: 351～355

4 Cayley A. On the theory of the analytical forms called trees. *Philos Mag*, 1857, **13**: 172～176. *Mathematical Papers*, Cambridge 1891, **3**: 242～246

5 Cayley A. A theorem on trees. *Quart J Pure Appl Math*, 1889, **23**: 376-378

6 Chang S K. The generation of minimal trees in a Steiner topology. *JACM*, 1976, **19**: 699～711

7 陈树柏等. 网络图论及其应用. 北京:科学出版社, 1982

8 Cook S. The complexity of theorem-proving procedure. *Conference Record of Third ACM Symposium on Theory of Computing*, 1970. 151～158

9 Dantzing G B. On the shortest route through a network. *Management Sci*, 1960, **6**: 187～190

10 Dijkstra E W. A note on two problems in connection with graphs. *Numer Math*, 1959, **1**: 269～271

11 Dreyfus S E. An appraisal of some shortest path algorithms. *J Oper Res*, 1969, **17**: 395～412

12 Gibbons A. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

13 Gondran M and Minoux M. *Graphs and Algorithms*. John Wiley & Sons, 1984

14 Graham RL and Hell P. On the history of the minimum spanning tree problem. *Ann Hist Comput*, 1985, **7**(1): 43～57

15 Grarey M R and Johnson D S. *Computers and Intractability, A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, 1979. (中译本: 加里 M R, 约翰逊 DS 著, 张立昂等译. 计算机和难解性——NP 完全性理论导引. 北京:科学出版社, 1987)

16 Jordan C. Sur les assemblages de lignes. *J Reine Angew Math*, 1869, **70**: 185～190

17 Kirchhoff G R. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann Phys Chem*, 1847, **72**: 497～508. English translation, *IRE Trans. On Circuit Theory*. 1958, CT-**5**(1): 4～7

18 Kruskal J B Jr. On the shortest spanning subtree of a graph and the salesman problem. *Proc Amer Math Soc*, 1956, **7**: 48～50

19 李炯生, 查建国. 线性代数. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1989

20 刘振宏, 马仲蕃. 关于 Steiner 最小树问题. 运筹学杂志, 1991, **10**(2): 1～11

21 Moore E F. The shortest path through a maze. *In*: *Proc. International Symposium on the Theory of Switching*, Part Ⅱ. Cambridge Mass: Harward Univ Press, 1957. 285～292

22 Prim R C. Shortest connection networks and some generations. *Bell System Tech J*, 1957, **36**: 1389～1401

23 Prüfer H. Neure Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch Math Phys*, 1918, **27**:

142～144

24 Tutte W T. Lectures on matroids. *J Res Nat Bur Standards sect*, B,1965,**69**:1～47

25 王树禾. 图论及其算法. 合肥:中国科学技术大学出版社,1990

26 Whiting P D and Hillier J A. A method for fiding the shortest route through a road network. *Operational Res Quart*,1960,**4**:37～40

27 谢政,李建平. 网络算法与复杂性理论. 长沙:国防科技大学出版社,1995

28 许禄,胡昌玉. 应用化学图论. 北京:科学出版社,2000

第3章 平图与平面图

在第 2 章,我们已讨论了一类最简单的图——林和树. 我们所看到的林和树的图形表示都是画在平面上,使其边仅在端点处相交,而且每条边都可以画成直线段. 这个事实对任何图都成立吗? 本章讨论并回答这个问题.

若图 D 存在一个平面图形表示使得它的边仅在端点处相交,则称 D 为平面图. D 的这种图形表示亦称为平图. 平面图或者平图是一类非常重要的图. 它不仅是图论研究中最早的领域之一,而且还留下许多诱人的至今尚未解决的难题.

在这一章,我们主要研究平图或平面图的性质和图的平面性的判定准则,其中包括描述平图的顶点数、边数与面数之间关系的 Euler 公式和平面图判定准则的 Kuratowski 定理. 两个非常重要的非平面图 K_5 和 $K_{3,3}$在刻画平面图特征上起了一个重要作用(见 Kuratowski 定理). 我们介绍 Kuratowski 定理的最简单证明. 我们将利用圈空间和割空间的理论刻划平面图的另一个特征和平面图的对偶. 我们还将介绍一个好算法,利用这个算法,可以判定任何一个图是否是平面图.

图的平面性问题,除了它的理论意义外,有许多实际应用. 例如,在印刷电路的布线板中,一个特定的电网络是否可以嵌入该平面板中而使线路不交叉. 本章介绍的算法将有效地解决此问题. 在应用部分中,我们还将利用 Euler 多面体公式来证明"仅有 5 个正多面体"这个古希腊人早在两千多年前就知道的结果.

3.1 平图与 Euler 公式

设 S 是一个给定的曲面,比如平面、球面、双环面等等. 如果图 D 能画在曲面 S 上使得它的边仅在端点处相交,则称 D **可嵌入曲面**(**embeddable in the surface**)S. D 在 S 上的这种画法 $\tilde{D}$ 称为 D 在 S 上的**表示**(**representation**). 由于图是否能嵌入曲面 S 与图中边的方向无关,所以,我们只须考虑无向图 G 的嵌入问题。本章只讨论 S 是平面或球面的情形. 事实上,我们有下列结论.

定理 3.1 图 G 可嵌入球面 $S\Leftrightarrow G$ 可嵌入平面 P.

证明 考虑球极平面射影(见图 3.1). 球面 S 与平面 P 相切,过切点的直

径的另一端点为 z. 定义映射 $\varphi: S \to P$ 如下：对任意点 $s \in S \setminus \{z\}$ 和点 $p \in P \setminus \{\infty\}$，当且仅当 z,p,s 共线时，$\varphi(s)=p$ 并且 $\varphi(z)=\infty$. 易知 φ 是双射.

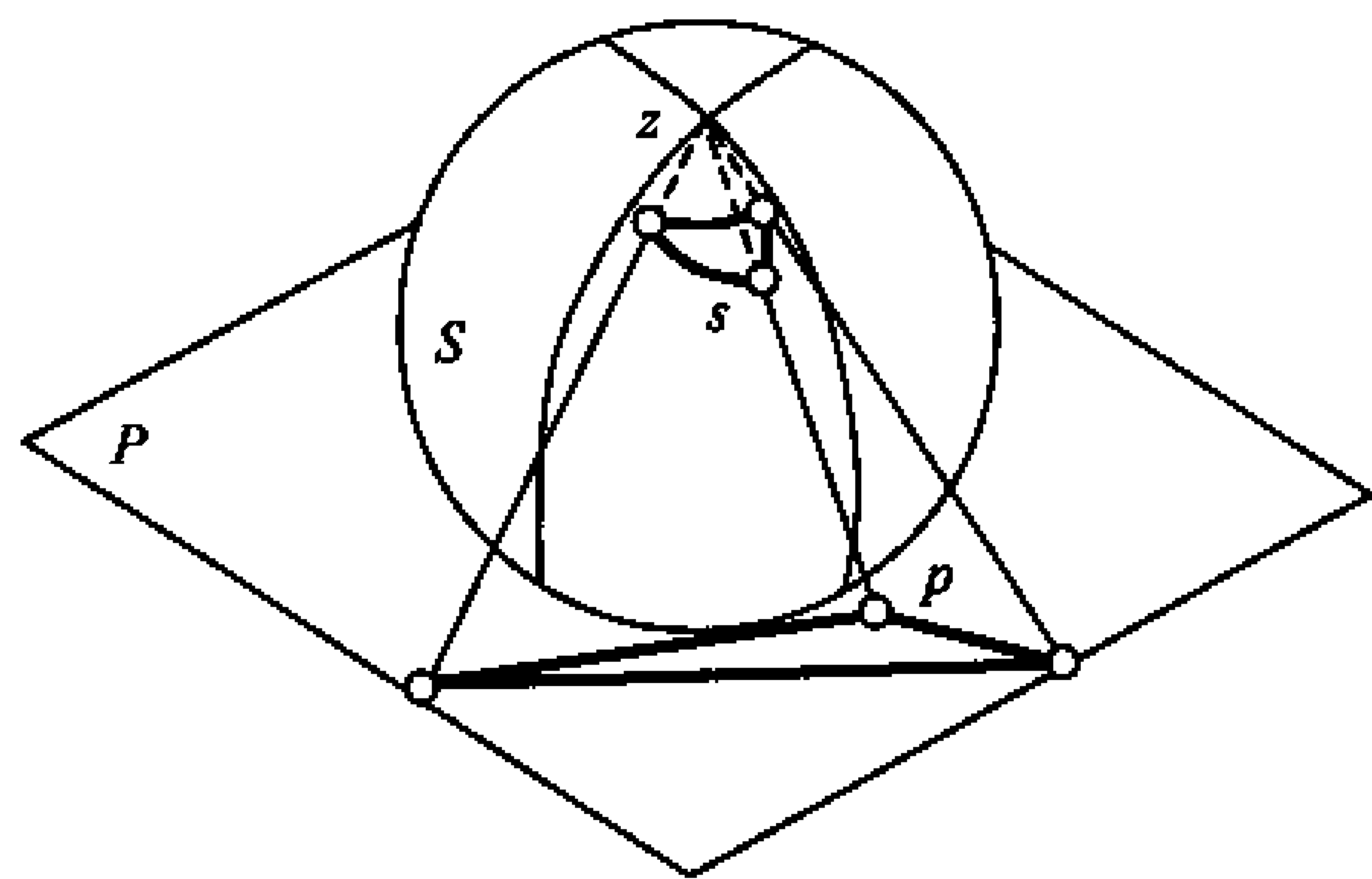


图 3.1　球极平面射影

设 G 可嵌入平面 P，$\tilde{G}$ 是 G 在 P 上的表示，则 $\varphi^{-1}(\tilde{G})$ 就是 G 在球面 S 上的表示. 反之，设 $\tilde{G}'$ 是 G 在 S 上的表示. 不妨设 z 不在 $\tilde{G}'$ 的顶点上，也不在 $\tilde{G}'$ 的边上，则 $\varphi(\tilde{G}')$ 即为 G 在 P 上的表示. 因此 G 可嵌入球面 $S \Leftrightarrow G$ 可嵌入平面 P.

□

由定理 3.1 知，图可嵌入平面与球面是一回事. 以下我们只须讨论图的平面嵌入.

若图 G 可嵌入平面(或球面)，则称 G 是**平面图(planar graph)**. 不能嵌入平面(或球面)的图称为**非平面图(nonplanar graph)**. G 的平面表示用 $\tilde{G}$ 来表示. $\tilde{G}$ 本身可看作是同构于 G 的图. $\tilde{G}$ 称为**平图(plane graph)**.

图 3.2 所示的是平面图 G 和它的平面表示 $\tilde{G}$，其中 $G=K_{3,3}^-$(表示从 $K_{3,3}$ 中除掉任何一条边后而得到的图，这里 $G=K_{3,3}-zw$). $K_{3,3}^-$ 的这种平面表示也可以看成是它在四面体上的一个嵌入，使其顶点和边都在该四面体的棱上. 这种表示将在定理 3.6 的证明中用到.

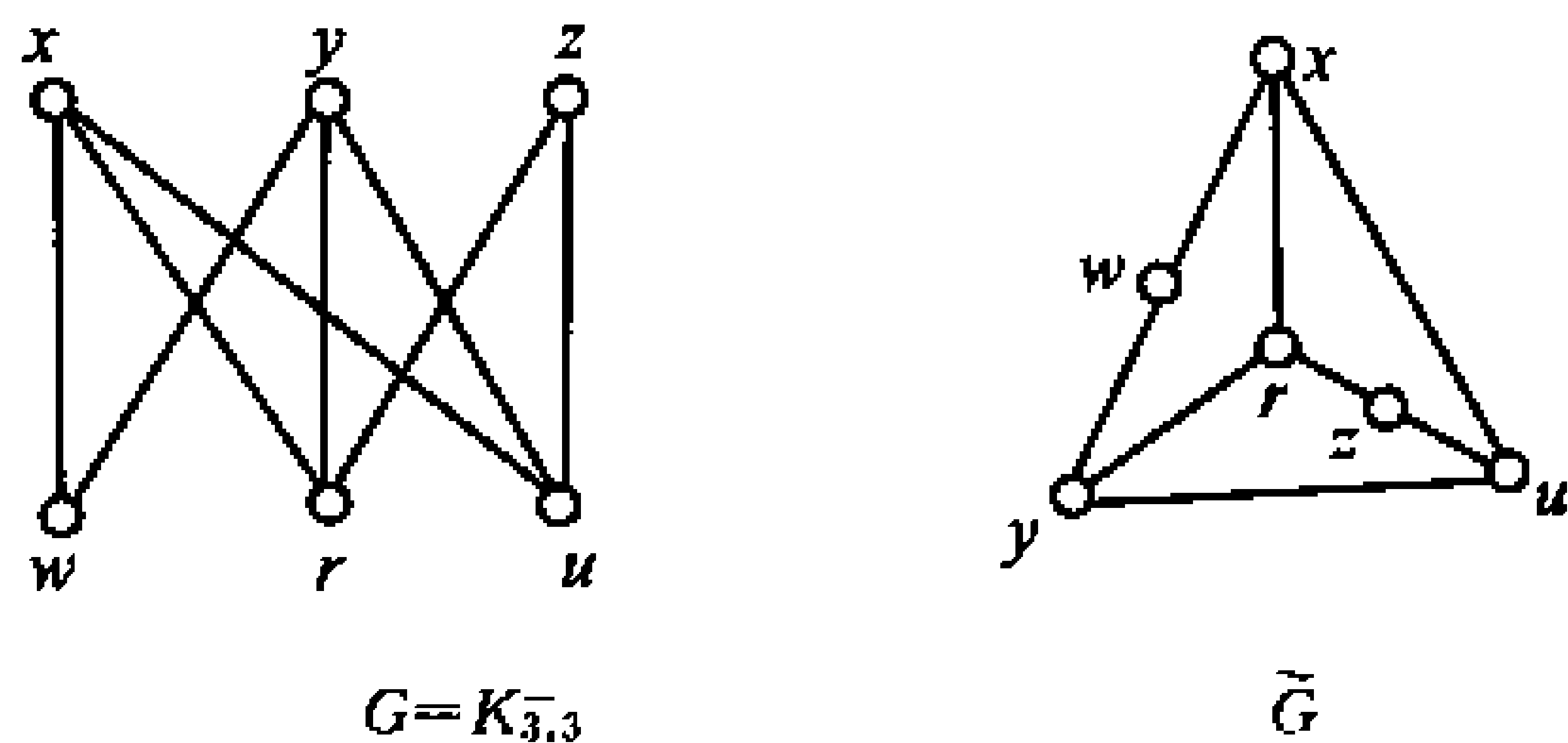


图 3.2　平面图 G 和它的平面表示 $\tilde{G}$

一个非空平图 G 把平面 P 划分成若干个连通区域. 这些区域称为 G 的面

(face). 用 $F(G)$ 和 $\phi(G)$ 分别表示平图 G 的面集和面的数目. 例如,对于图 3.3 所示的平图 G,

$$F(G)=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\},\quad \phi(G)=|F(G)|=6.$$

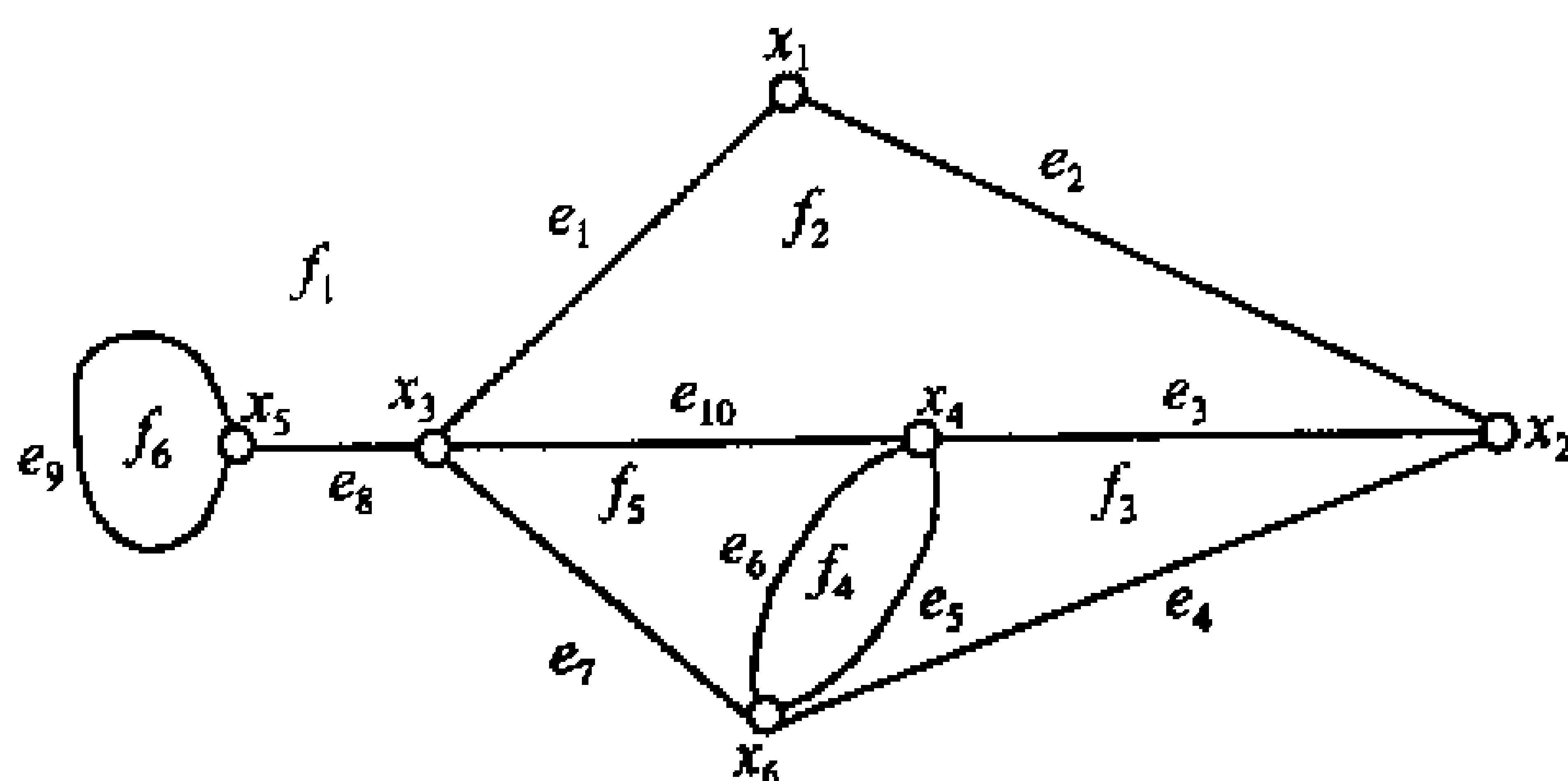


图 3.3 平图的面

易知,对于任何平图 G,均有 $\phi(G)\geqslant 1$,而且 $\phi(G)=1\Leftrightarrow G$ 是林,$\phi(G)\geqslant 2\Leftrightarrow G$ 中含回.

用 $B_G(f)$ 表示平图 G 中面 f 的**边界(boundary)**,它是 G 中若干条边不交闭链之并. 例如图 3.3 所示的平图 G 中面 f_1 的边界

$$B_G(f_1)=x_3\ e_1\ x_1\ e_2\ x_2\ e_4\ x_6\ e_7\ x_3\ e_8\ x_5\ e_9\ x_5\ e_8\ x_3.$$

$B_G(f)$ 中边的数目记为 $d_G(f)$,称为面 f 的**度(degree of a face)**. 如图 3.3 中的图 G,有 $d_G(f_1)=7$,$d_G(f_6)=1$.

平面图 G 的任何平面表示 $\tilde{G}$ 恰有一个含平面 P 中"∞"点的面,该面称为 $\tilde{G}$ 的**外部面(exterior face)**. 例如,在图 3.3 所示的图中,f_1 是外部面. 设 G 是平面图,x 是 G 中任何一个顶点,则不难证明(习题 3.1.2),存在 G 的平面表示 $\tilde{G}$ 使得 x 在 $\tilde{G}$ 的外部面的边界上.

平图 G 的面度 $d_G(f)$ 和边数 $\varepsilon(G)$ 有下列关系:

定理 3.2 对于任何平图 G,均有

$$\sum_{f\in F(G)} d_G(f) = 2\varepsilon(G).$$

证明 若 G 是空图,定理自然成立. 下设 G 非空. 设 e 是 G 的任意一条边,则 e 要么在某两个面的公共边界上(如图 3.3 中 G 的边 e_1 在面 f_1 和面 f_2 的公共边界上),要么在某个面的边界上出现两次(如上例中的边 e_8 在面 f_1 的边界上出现两次). 因此,

$$\sum_{f\in F(G)} d_G(f) = 2\varepsilon(G).$$ □

定理 3.3 (Euler 公式,Euler,1753) **设 G 是连通平图,则**

$$\nu-\varepsilon+\phi=2. \tag{3.1}$$

证明

方法 1　设 G 是连通的平图，并且设 T 是 G 的支撑树，则 $\phi(T)=1$. 由定理 2.3 知 $\varepsilon(\overline{T})=\varepsilon-\nu+1$.

由定理 2.5 知，对任何 $e\in E(\overline{T})$，e 在且仅在 G 的两个不同面的边界上. 另一方面，G 中任何两个不同的面都以 $E(\overline{T})$ 中边为公共边界. 所以 $\phi(G)=\phi(T)+\varepsilon-\nu+1=\varepsilon-\nu+2$，即 Euler 公式(3.1)成立. □

方法 2　对 $\phi\geqslant 1$ 用归纳法. 当 $\phi=1$ 时，G 中无圈，又是连通的，所以由定理 2.3 知 $\varepsilon=\nu-1$，于是结论成立. 假设对面数 $\phi<n$ 的所有连通平图，结论都成立. 设 G 是 $\phi(G)=n\geqslant 2$ 个面的连通平图. 因而 G 含有圈 C. 任取 $e\in E(C)$，则 $G-e$ 是连通平图且 $\phi(G-e)=n-1$. 由归纳假设有

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2.$$

再由关系式

$$\nu(G-e)=\nu(G),$$
$$\varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1,$$
$$\phi(G-e)=\phi(G)-1.$$

就有 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2$. 由归纳原理知定理得证. □

推论 3.3.1　**设 G 是平图，则 $\nu-\varepsilon+\phi=1+\omega$.**

推论 3.3.2　**平面图 G 的所有平面表示 $\tilde{G}$ 都有相同的面数.**

推论 3.3.3　**设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单 2 部分连通平面图，则**

$$\varepsilon\leqslant 2\nu-4.$$

证明　设 $\tilde{G}$ 是 G 的平面表示. 若 $\tilde{G}$ 是树，则由定理 2.3，$\varepsilon=\nu-1\leqslant 2\nu-4$. 下设 $\tilde{G}$ 中含有圈. 由于 $\tilde{G}$ 是 2 部分图，所以 $\tilde{G}$ 不含奇圈. 因此对每个 $f\in F(\tilde{G})$，均有 $d_{\tilde{G}}(f)\geqslant 4$. 由定理 3.2 有

$$4\phi\leqslant\sum_{f\in F(\tilde{G})}d_{\tilde{G}}(f)=2\varepsilon,$$

即 $\varepsilon\geqslant 2\phi$. 于是，由 Euler 公式(3.1)得 $\varepsilon\leqslant 2\nu-4$. □

推论 3.3.4　**$K_{3,3}$ 是非平面图.**

证明　由于 $K_{3,3}$ 是 2 部分图，并且 $\varepsilon(K_{3,3})=9$，$\nu(K_{3,3})=6$，所以若 $K_{3,3}$ 是平面图，则由推论 3.3.3 应有

$$9=\varepsilon(K_{3,3})\leqslant 2\nu(K_{3,3})-4=8.$$

这不可能，故 $K_{3,3}$ 是非平面图. □

设 G 是简单平面图，x 和 y 是 G 中任意两个不相邻的顶点. 若 $G+xy$ 是非平面图，则称 G 为**极大平面图(maximal planar graph)**.

由定义立即可知，任何 $\nu(\geqslant 3)$ 阶极大平面图 G 的任何平面表示 $\tilde{G}$ 的每个面都是三角形. 例如，见图 3.4(a)中所示的是一个极大平面图，(b)中所示的是它的一个平面表示.

极大平面图的平面表示称为**三角剖分平图(triangulation of a planegraph)**，简称**三角剖分图(triangulation)**.

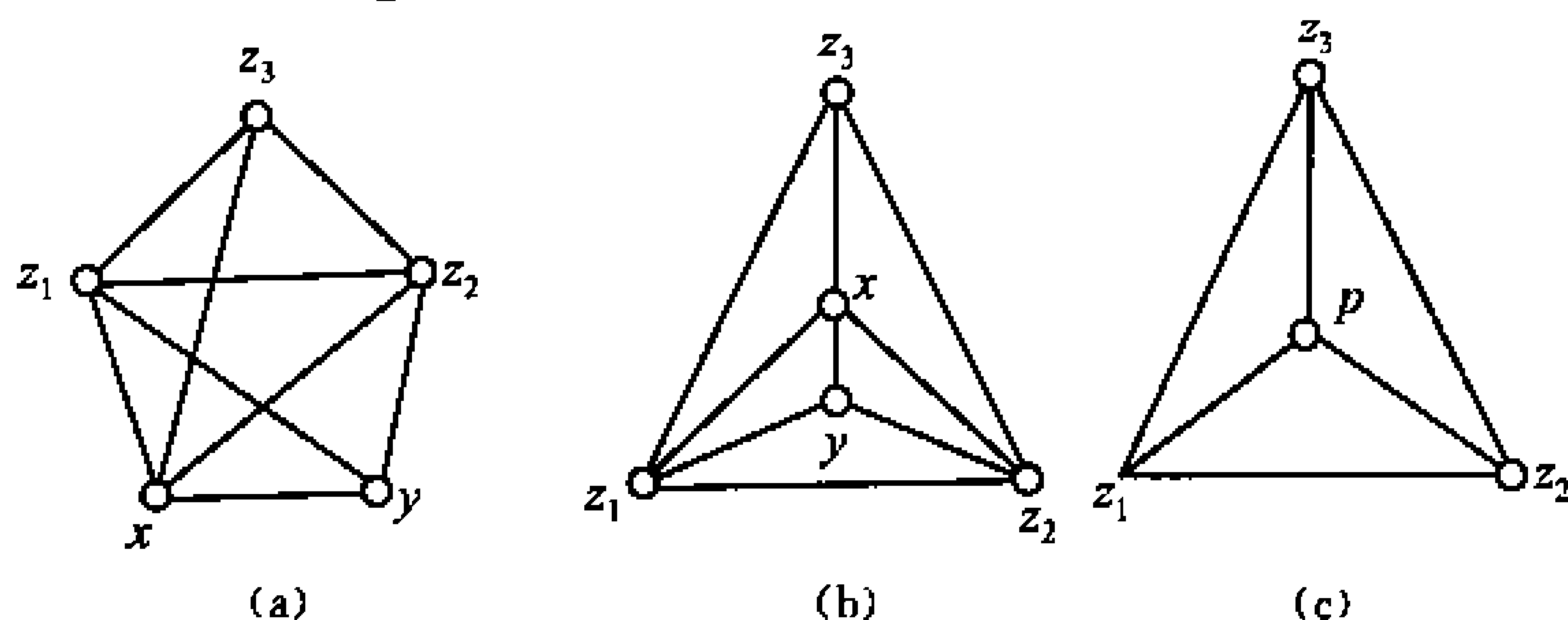


图 3.4

定理 3.4 设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单平面图，则 G 是极大平面图当且仅当 $\varepsilon=3\nu-6$.

证明 由于 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单平面图，所以 G 的平面表示 $\tilde{G}$ 是极大的$\Leftrightarrow$对每个 $f\in F(\tilde{G})$ 均有 $d_{\tilde{G}}(f)=3$. 于是

$$\sum_{f\in F(\tilde{G})} d_{\tilde{G}}(f) = 3\phi.$$

再由定理 3.2 有 $2\varepsilon=3\phi$. 由 Euler 公式得

$$\nu-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2,$$

即有 $\varepsilon=3\nu-6$. □

推论 3.4.1 设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单平面图，则 $\varepsilon\leqslant 3\nu-6$.

推论 3.4.2 设 G 是简单平面图，则 $\delta\leqslant 5$.

证明 当 $\nu=1,2$ 时，结论成立是显然的. 若 $\nu\geqslant 3$，则由推论 1.1.1 和推论 3.4.1 有

$$\delta\nu \leqslant \sum_{x\in V} d_G(x) = 2\varepsilon \leqslant 6\nu - 12,$$

即得 $\delta\leqslant 5$. □

推论 3.4.3 K_5 是非平面图.

证明 若 K_5 是平面图，则由推论 3.4.1 应有

$$10=\varepsilon(K_5)\leqslant 3\nu(K_5)-6=9.$$

矛盾，所以 K_5 是非平面图. □

平面图的下列特征是 Wagner(1936)和 Fáry(1948)独自发现的.

定理 3.5 设 G 是简单平面图，则 G 有平面表示 $\tilde{G}$ 使 $\tilde{G}$ 中每条边都是直线段.

证明 只要对极大平面图 G 来证明定理成立就可以了. 对阶数 $\nu(\geqslant 3)$ 用归纳法. 当 $\nu=3$ 时，G 是三角形，定理显然成立. 假设定理对所有阶数小于 ν 的极

大平面图都成立，并设 G 是 $\nu(\geq 4)$ 阶极大平面图．不妨设 G 是三角剖分图．选取 $x \in V(G)$ 使 x 不是外部面边界上的点．取 $y \in N_G(x)$．于是 xy 仅是某两个内部三角形的公共边．不妨设这两个三角形分别为 (z_1, x, y, z_1) 和 (z_2, x, y, z_2)（见图 3.4(b)）．考虑边 xy 的收缩图 $G \cdot xy$．令 $G \cdot xy$ 中 x 和 y 收缩为点 p，并令 G' 为 $G \cdot xy$ 中删去重边后得到的图（见图 3.4(c)）．显然 G' 是平面图，而且由定理 3.4 有

$$\varepsilon(G') = \varepsilon(G) - 3 = 3(\nu(G) - 1) - 6 = 3\nu(G') - 6.$$

再由定理 3.4 知 G' 是 $(\nu - 1)$ 阶极大平面图．由归纳假设，G' 有平面表示 $\tilde{G}'$ 使 $\tilde{G}'$ 的每条边都是直线段．

考虑 $\tilde{G}'$ 中边 pz_1 和 pz_2．将它们分裂成两个三角形（见图3.4(c)和(b)）．这样得到的图 $\tilde{G}$ 就是 G 的平面表示，而且每条边都是直线段．由归纳原理，定理得证． □

图 3.5(a)中图的一个平面直线段表示如图 3.5(b)所示．

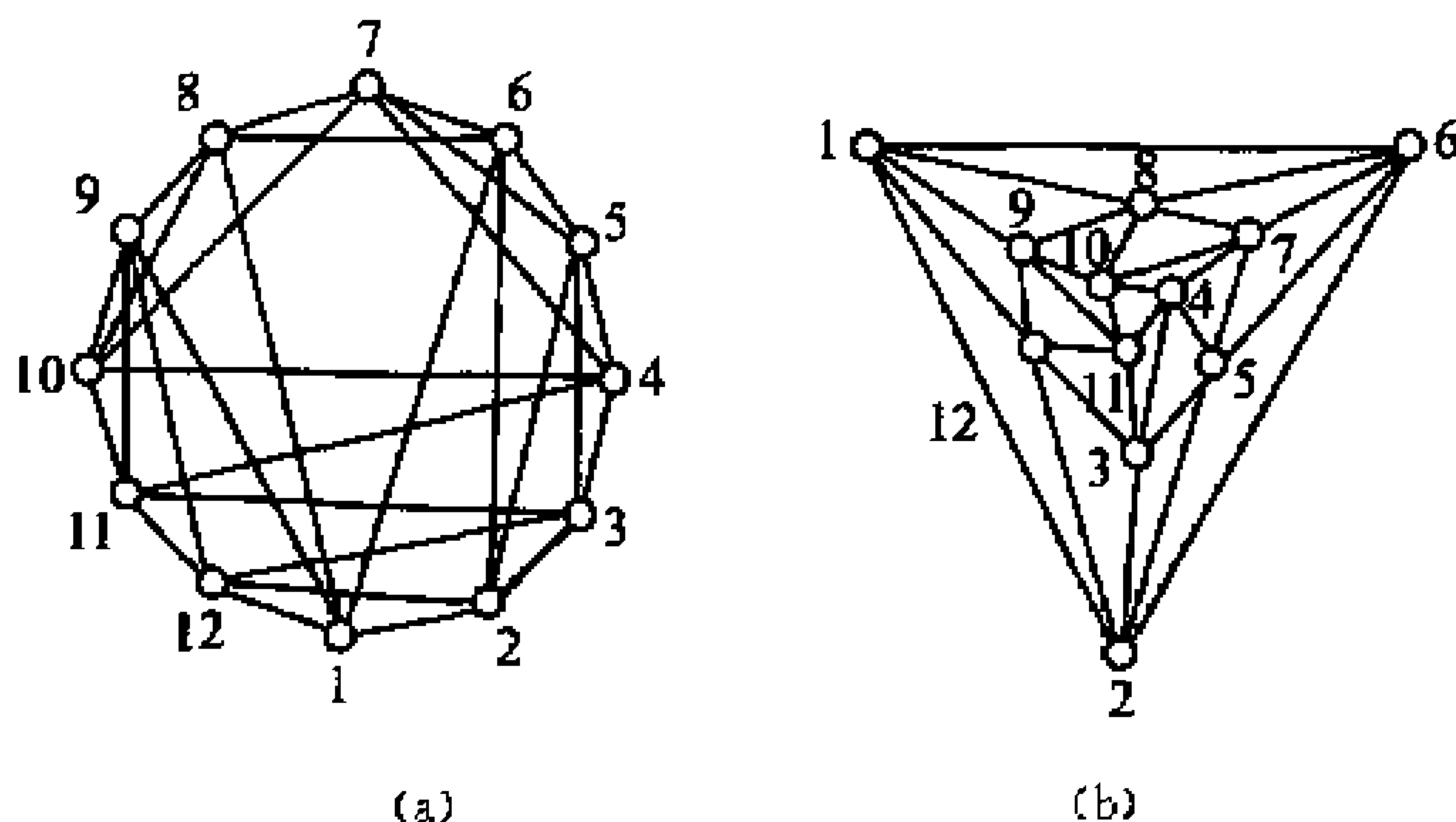


图 3.5　平面图和它的平面直线段表示

习　题

3.1.1　证明：

(a) G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 的每个连通分支都是平面图；

(b) 若 G 是平图，则 $\nu - \varepsilon + \phi = \omega + 1$．

3.1.2　(a) 设 G 是平面图，$x \in V(G)$ 或者 $e \in E(G)$．证明：存在 G 的一个平面表示 $\tilde{G}$ 使得 x（或者 e）在 $\tilde{G}$ 的外部面的边界上．

(b) 证明：G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 中每个块都是平面图．

3.1.3　证明：每个简单平图都是某三角剖分图 $(\nu \geq 3)$ 的支撑子图．

3.1.4　设 G 是 $\nu(\geq 4)$ 阶图，ν_i 表示 G 中 i 度点数目．证明：

(a) 若 G 是三角剖分图，则

$$3\nu_3+2\nu_4+\nu_5=\nu_7+2\nu_8+\cdots+(\Delta-6)\nu_\Delta+12;$$

(b)若 G 是树,则 $\nu_1=\nu_3+2\nu_4+3\nu_5+\cdots+(\Delta-2)\nu_\Delta+2$.

3.1.5 证明:若连通的平图 G 的每个面都是 4 度面,则 $\varepsilon=2\nu-4$.

3.1.6 设 G 是连通的 3 正则平图,ϕ_i 表示面度为 i 的面数. 证明:

(a) $12=5\phi_1+4\phi_2+3\phi_3+2\phi_4-\phi_6-\phi_7-2\phi_8-\cdots$;

(b) G 中存在其面度小于 6 的面.

3.1.7 证明:

(a)若 G 是围长 $g\geqslant 3$ 的连通平面图,则

$$\varepsilon\leqslant g(\nu-2)/(g-2);$$

(b) Petersen 图是非平面图.

3.1.8 (a)证明:若 G 是 $\nu\geqslant 11$ 阶简单平面图,则 G^c 是非平面图(W. T. Tutte (1973)已证明此命题对 $\nu\geqslant 9$ 成立).

(b)找出一个 8 阶简单平面图 G 使 G^c 也是平面图.

3.1.9 设 G 是简单平面图. 证明:

(a)若 $\nu\geqslant 4$,则 G 中至少有 4 个其度$\leqslant 5$ 的顶点;

(b)存在且仅存在一个 4 正则三角剖分图;

(c)若 $\delta(G)=5$,则 G 中至少有 12 个 5 度点.

3.1.10 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是平面上 n 个点的集($n\geqslant 3$),其中任何两点之间距离$\geqslant 1$. 证明:最多有 $3n-6$ 个点对,其距离恰好为 1.

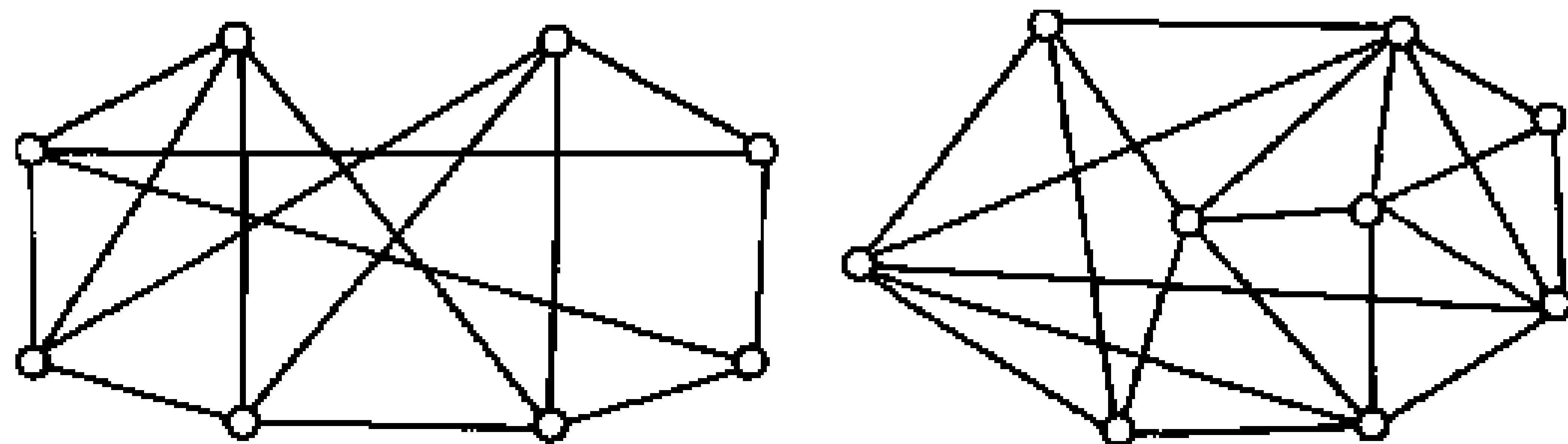
3.1.11 设 G 是简单平面图,且 $\Delta(G)=\nu-1$. 证明:若 $\nu\geqslant 5$,则 G 中存在不相邻两顶点使其顶点度都$\leqslant 3$.

3.1.12 设 G 是非平面图. 若 G 中每个真子图都是平面图,则称 G 为**极小非平面图(minimal nonplanar graph)**. 证明:

(a) K_5 和 $K_{3,3}$ 都是极小非平面图;

(b)极小非平面图必是块.

3.1.13 给出下列 2 图的平面表示,使其所有的边都是直线段.



(习题 3.1.13)

3.1.14 若图 D 可以画在三维空间 R^3 中使得 D 中任何两条边不在非顶点处相交,则称 D 可以嵌入 R^3. 证明:

(a)任何图都可以嵌入 R^3;

(b)任何简单无向图都可以直线段嵌入 R^3.

3.1.15 将 G 表示成 k 个边不交平面图之并,这个 k 的最小值称为 G 的**厚度(thickness)**,记

为 $t(G)$. 于是, $t(G)=1 \Leftrightarrow G$ 是平面图.

(a)设 G 是简单图,证明:当 $\nu \geqslant 3$ 时,

(i) $t(G) \geqslant \left\lceil \frac{\varepsilon}{3\nu-6} \right\rceil$;

(ii) $t(K_n) \geqslant \left\lceil \frac{n(n-1)}{6n-12} \right\rceil$ 并且等号对所有 $n(3 \leqslant n \leqslant 8)$ 成立;

(iii) $t(K_n) \geqslant \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$ (现已证明除 $t(K_9)=t(K_{10})=3$ 外,对所有的 $n(3 \leqslant n, n \neq 9, 10)$ 等号成立).

(b)构作3个9阶平面图 G_1, G_2, G_3 和3个10阶平面图 H_1, H_2, H_3 使

(i) $K_9 = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$;

(ii) $K_{10} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$.

(c)对 $n=3,4,5,6,7,8$,验证(a)中的(ii)和(iii).

3.1.16　将 G 画在平面上,两条边相交的最小数目称为 G 的**交叉数**(**crossing number**),记为 $r(G)$. 于是, $r(G)=0 \Leftrightarrow G$ 是平面图. 证明:

(a) $r(K_5)=1$;

(b) $r(K_{3,3})=1$;

(c) $r(K_6)=3$.

3.2　Kuratowski 定理

在上一节中,我们得到了平面图的若干必要条件. 利用这些必要条件,我们证明了 K_5 和 $K_{3,3}$ 都为非平面图. 在这一节,我们将看到这两个非平面图在刻画平面图的特征中起了重要作用.

先引入边细分的概念. 设 $e \in E(G)$ 且 $\psi_G(e)=xy$. **边 e 的细分**(**subdivision of an edge**)是指从 G 中删去 e 并用一条与 G 内部点不交的长度 $\geqslant 2$ 的路连接 x 和 y. 如图 3.6 所示.

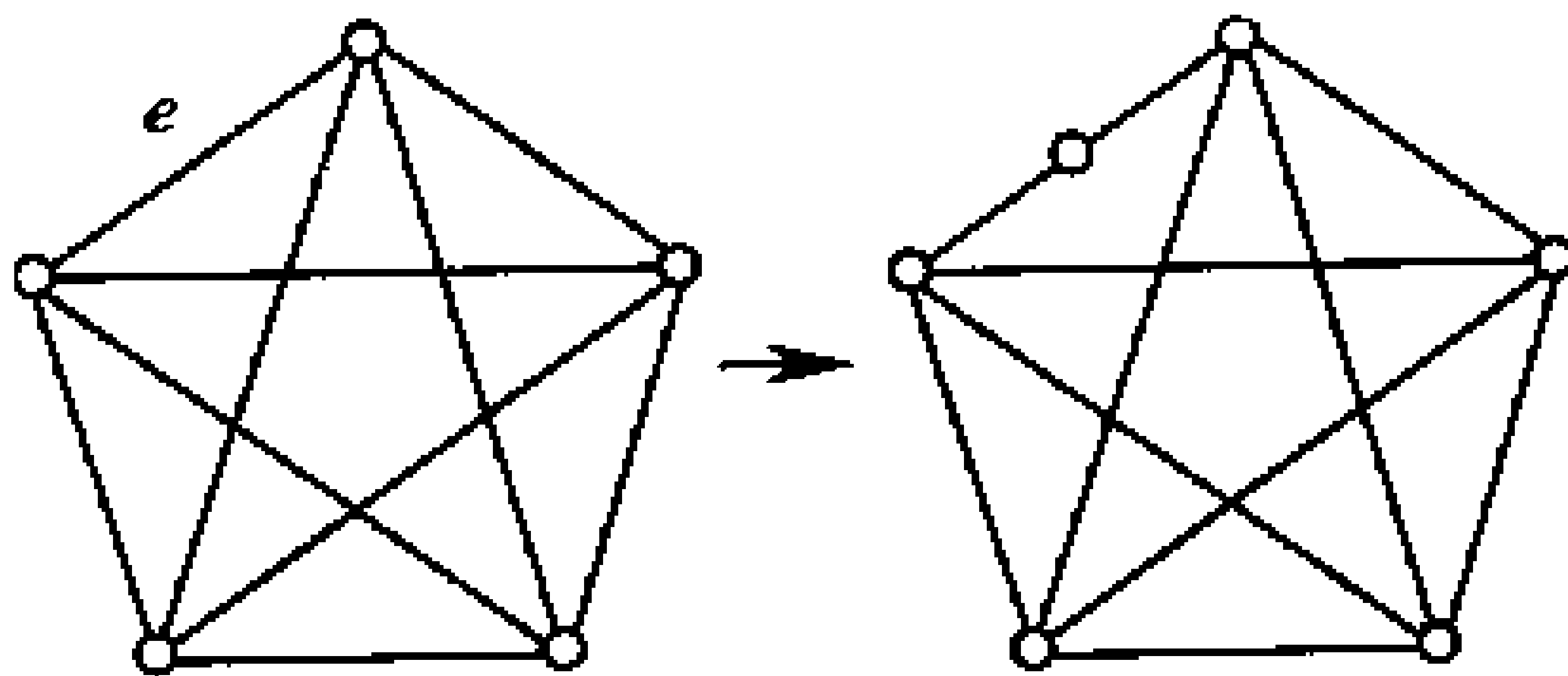


图 3.6　边 e 的细分

图 G 的**细分图**(**subdivision of a graph**)是指把 G 的边进行一系列细分而得到的图. 例如,图 3.7 所示的是 $K_{3,3}$ 的一个细分图. 仍记它的"2部划分"为 $\{X, Y\}$,其中 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$. 图中通过细分边 x_iy_j 而得到的 x_iy_j

路 $P_{x_i y_j}$ 仍记为"边"$P_{x_i y_j}$.

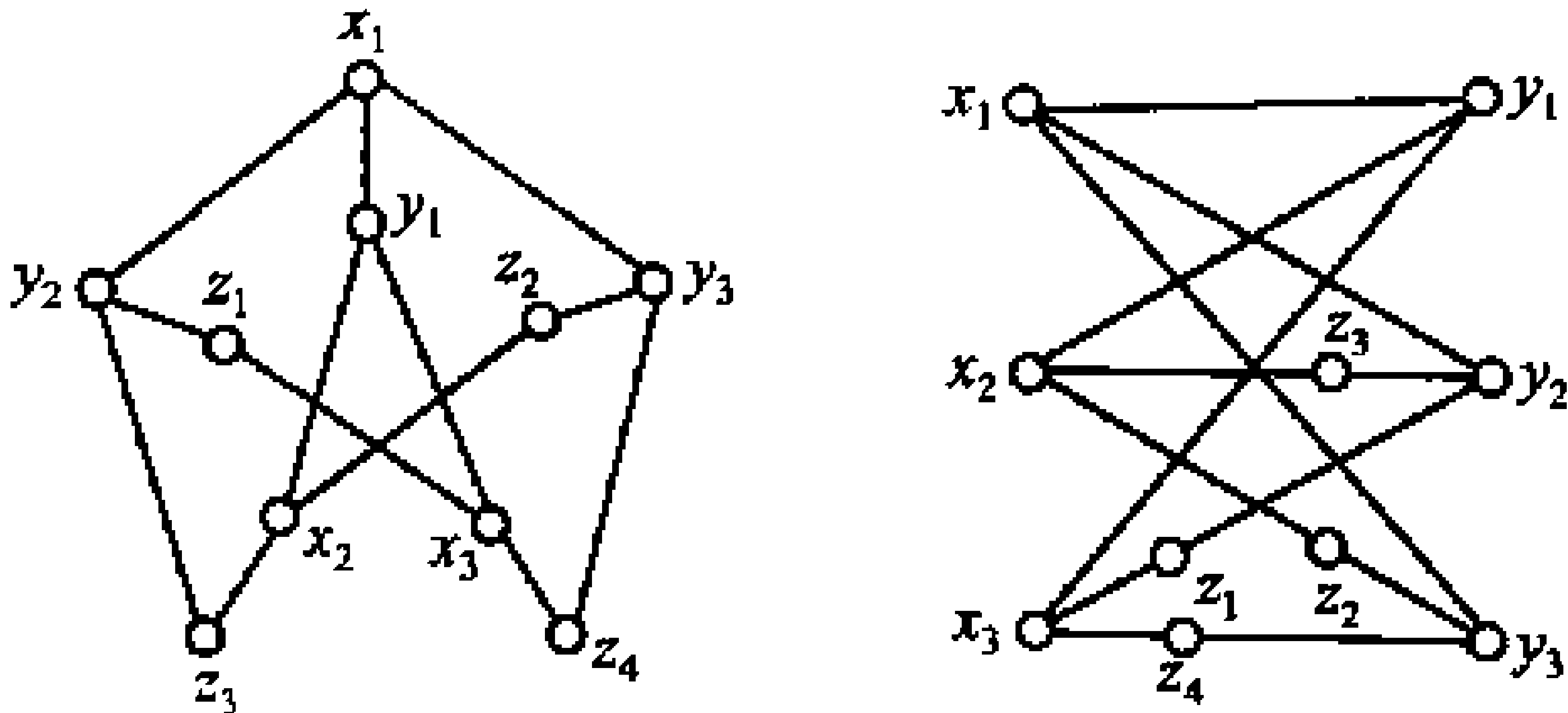


图 3.7 $K_{3,3}$的细分图

我们还需要下述概念. 它不仅用在 Kuratowski 定理的证明中,还将在 3.5 节中用到它们.

设 H 是G 的子图,在 $E(G)\backslash E(H)$上定义关系"$\sim$"如下:

$e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow$在 $G-E(H)$中存在一条链 W 使得

(i) W 的第一条边和最后一条边分别是 e_1 和 e_2;

(ii) W 的内部点与 H 是不交的.

容易验证"$\sim$"是 $E(G)\backslash E(H)$上的等价关系. 由关系"$\sim$"的等价类导出的 $G-E(H)$中的子图 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 称为G 的 H **分支**.

从定义直接推出:若 B 是G 的 H 分支,则 B 是连通的,并且 B 的任何两顶点都由与 H 内部点不交的路连接着,而且任何两个不同的 H 分支是边不交的.

对于G 的 H 分支B,记$V_G(B,H)=V(B)\cap V(H)$,并称 $V_G(B,H)$为 B 和 H 在G 中的**接触点集**.

在图 3.8 所示的图 G 中,子图 H 为圈$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_1)$, B_1, B_2, B_3, B_4 分别是 G 中 4 个 H 分支,$V_G(B_1,H)=V_G(B_2,H)=\{x_1,x_2,x_3\}$, $V_G(B_3,H)=\{x_4,x_6,x_7,x_9\}$,$V_G(B_4,H)=\{x_5,x_8\}$.

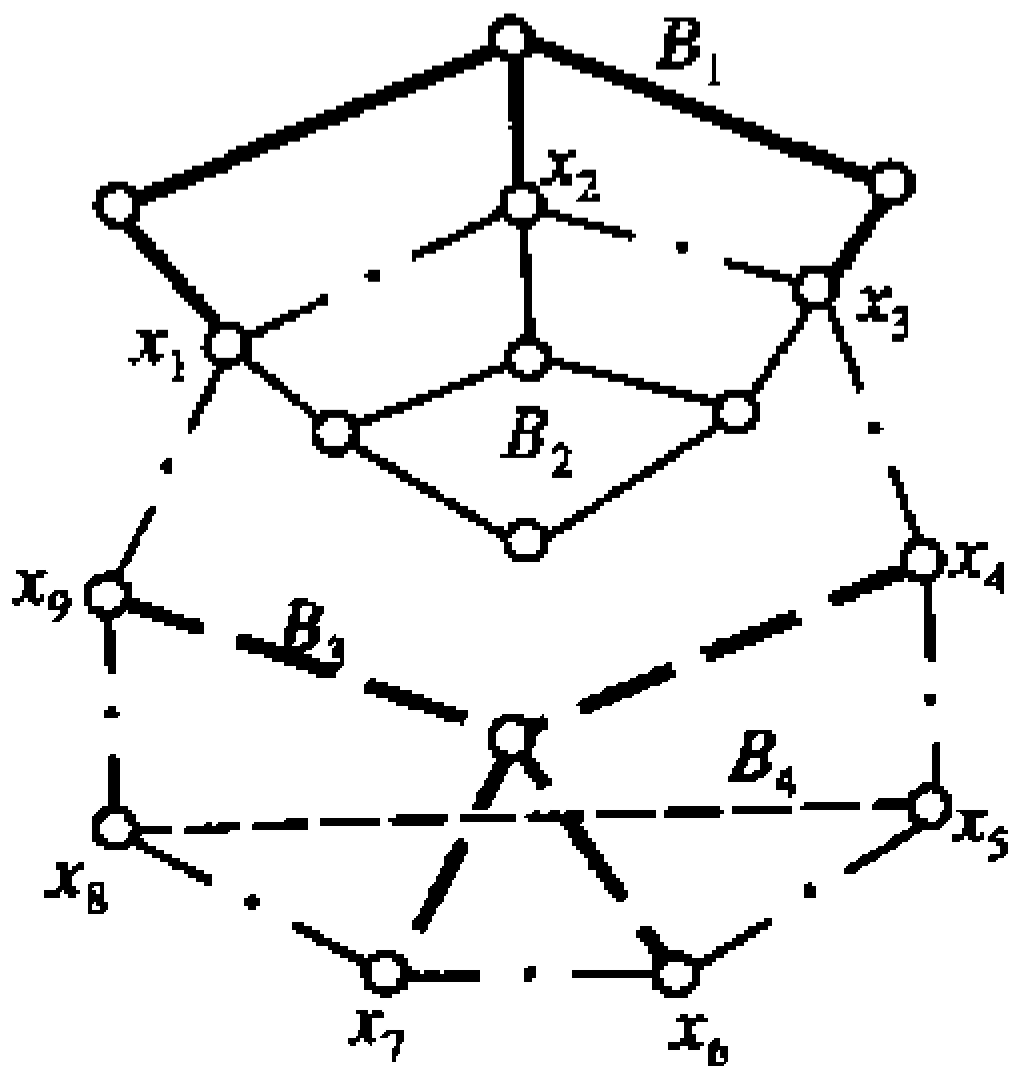


图 3.8

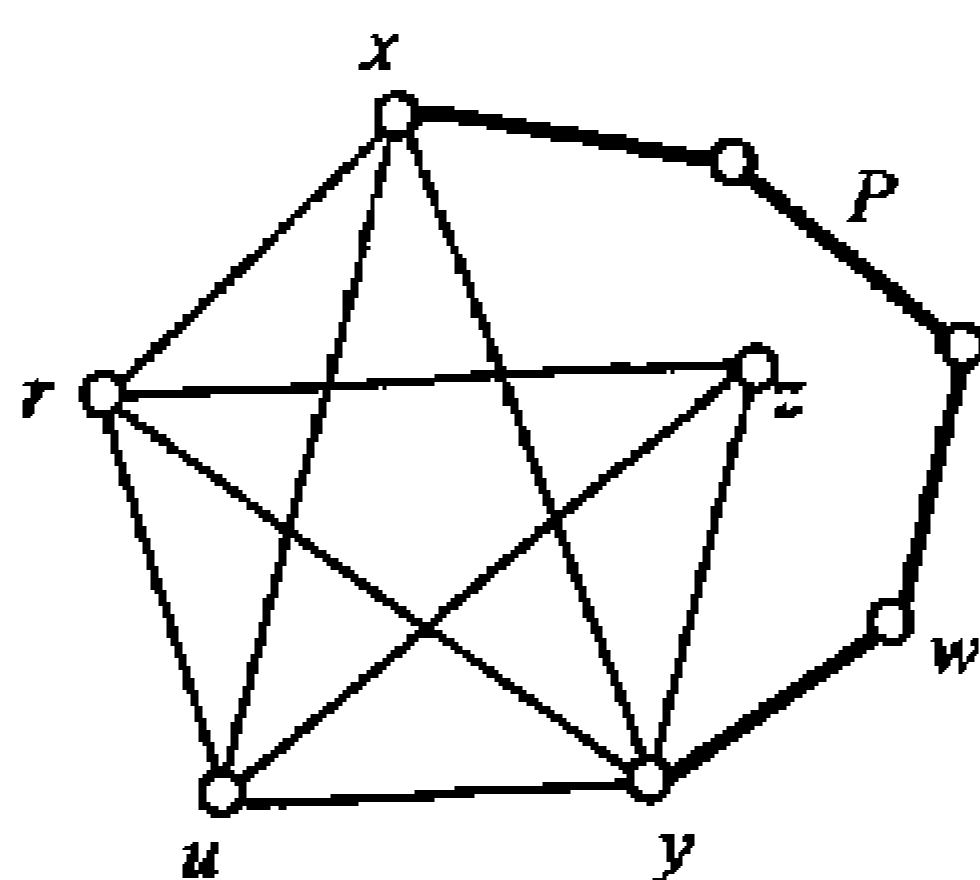
下述定理给出了平面图的一个特征,它是波兰数学家 Kuratowski(1930)和美国数学家 Frink & Smith(1930)独立发现的,但一般文献中都称为 Kuratowski 定理. 这里给出的是 H. Tverberg(1989)的证明.

定理 3.6 (Kuratowski 定理) **图G是平面图$\Leftrightarrow G$不含K_5 或 $K_{3,3}$的细分图.**

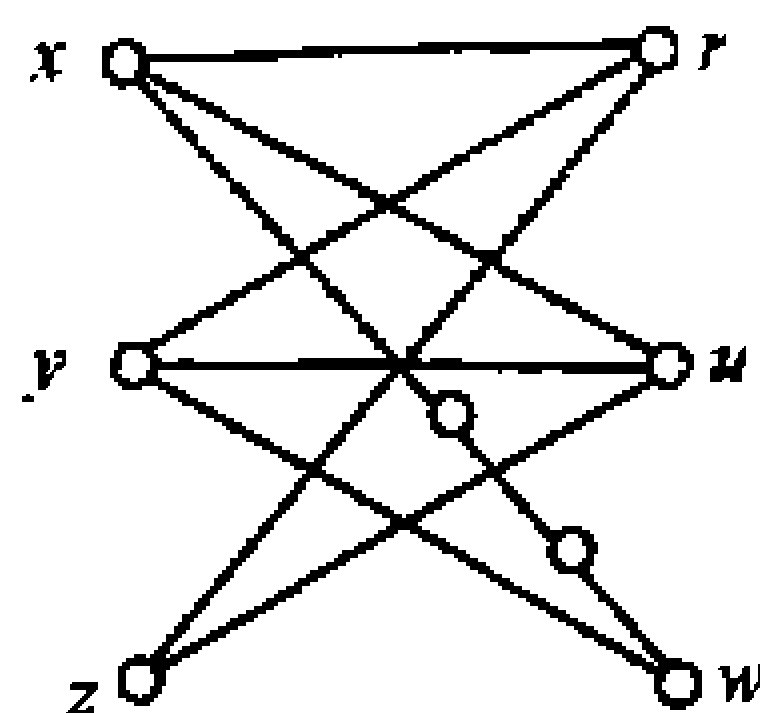
证明 必要性明显(习题 3.2.1). 下证充分性. 显然只需对连通的简单图来证明.

阶数≤5的图，易验证其充分性成立(习题3.2.2).(反证法)下设G是一个阶数$\nu(\geqslant 6)$尽可能小且不含K_5或$K_{3,3}$细分图的极小非平面简单图，则G是块，即G不含割点(习题3.1.12).我们不妨假定G含子图H,其中H是K_5^-(K_5去掉一边)或$K_{3,3}^-$($K_{3,3}$去掉一边)的细分图.

设H是K_5^-的细分图. 由于H是平面图,G是非平面图,所以必存在G的H分支B与H至少有两个接触点x和y(因G不含割点). 设P是B中一条xy路(图3.9(a)中粗边所示),则$xy\in E(H)$(否则G含K_5细分图). 由于G是简单图,所以$\nu(P)\geqslant 3$,且$H\cup P$含$K_{3,3}^-$细分图(见图3.9(b)). 因此,我们不妨假定H是$K_{3,3}^-$的细分图,它的"2部划分"为$\{X,Y\}$,其中$X=\{x,y,z\}$,$Y=\{r,u,w\}$,且不含"边"P_{zu}(参见图3.9(b)).



(a) G中子图$H\cup P$



(b) $H\cup P$中子图$K_{3,3}^-$的细分图

图3.9

考虑到平面嵌入与球面嵌入是等价的,我们试图将G嵌入四面体的表面来导致矛盾. 设四面体T的4个顶点为x,y,r,u,平面图H的顶点除x,y,r,u外全都嵌在T的棱上. 因此,H中至少还有两个顶点,比如w和z被嵌在T的异面棱上. 不妨设w和z分别被嵌在T的棱xy和ru上(见图3.10). 由G的非平面性和$\nu(G)$的最小性知,$d_G(w)\geqslant 3$且$d_G(z)\geqslant 3$,所以w和z都是某些H分支的接触点.

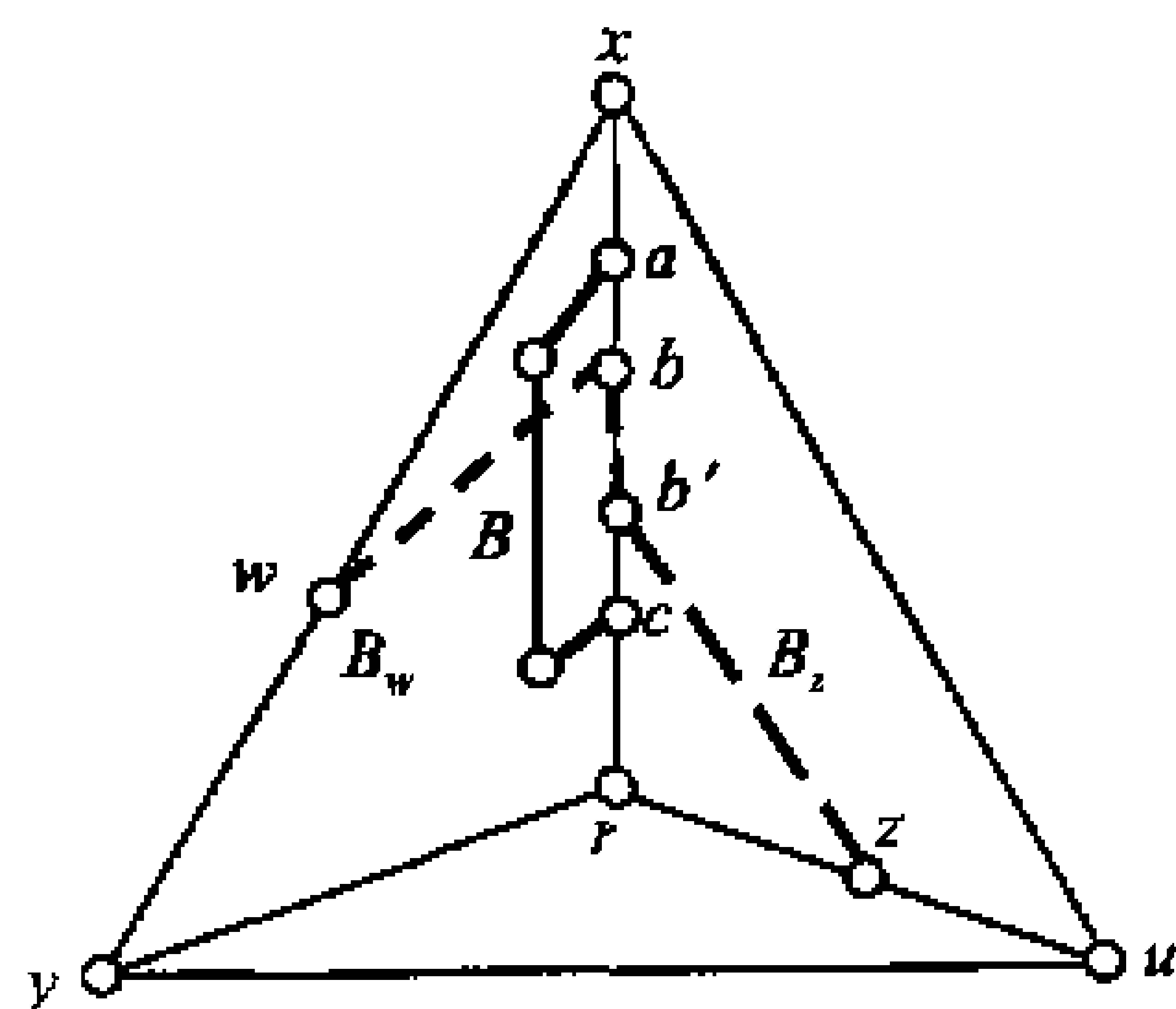


图3.10

设B是H分支. 由于G不含$K_{3,3}$的细分图,所以B与H的接触点不在T的异面边界上. 例如,若点w和z在B上,则G中含$K_{3,3}$的细分图. 于是B与H的接触点或者全在T的一条棱上(此时称B为小分支),或者在T的某个面的2条或3条边界上(此时称B为大分支). 因此G的每个分支都在T的某一个面上.

设 B_w 和 B_z 分别是 H 使其含点 w 和 z 的 H 分支. 由 $\nu(G)$ 的最小性知,$G-w$ 和 $G-z$ 都能嵌入 T. 所以,若 B_w 是小分支,则不影响任何另外分支嵌入 T. 因此,若 G 不能嵌入 T,则 B_w 必是大分支. 同理 B_z 也是大分支. 但由于 B_w 和 B_z 都不影响任何另外大分支的嵌入,所以 B_w 和 B_z 必影响某个小分支 B 嵌入 T. 不妨设 B 与 H 的接触点在 T 的棱 xr 上. 于是在棱 xr 上存在点 a,b,b',c,其中 b,b'(可能有 $b'=b$)在 a 与 c 之间,且 a 与 c 是 B 与 H 的接触点,b 和 b' 分别是 B_w 和 B_z 与 H 的接触点(见图 3.10). 令将 H 中沿 T 的棱 xr 上的 ac 路换成 B 中的 ac 路(图 3.10 中粗边所示)而得到的子图为 H'. 并令 P 是由 B_w 中 wb 路和在 T 中棱 xr 上的 bb' 路以及 B_z 中的 $b'z$ 路的并而得到的 wz 路(图 3.10 中粗虚边所示),则 $H'\cup P$ 为 $K_{3,3}$ 的细分图,矛盾于假定. 充分性得证. □

由 Kuratowski 定理(3.6),我们立刻可以断定所有树都是平面图. 同时也可以断定 Petersen 图不是平面图,因为它含有 $K_{3,3}$ 的细分图,如图 3.7 所示,其中"2 部划分"为 $\{X,Y\}$,$X=\{x_1,x_2,x_3\}$,$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$.

平面图还存在若干个特征,如 Wagner (1937)证明了:图 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 不含边收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

又如 McLane(1937)证明了:图 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 有一个基本圈集,与另一条圈的并正好含 G 中每条边两次.

在下一节,我们将给出平面图的另一个特征.

习 题

3.2.1 证明:

(a)若 G 是非平面图,则 G 的每个细分图也都是非平面图;

(b)若 G 是平面图,则 G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的细分图;

(c)若 G 是平面图,则 G 的每个子图也是平面图.

3.2.2 证明:若 $\varepsilon<9$ 或者 $\nu<5$,则 G 必是平面图.

3.2.3 设 x,y,z 是简单平面图 G 的任意 3 个点. 证明:

$$d_G(x)+d_G(y)+d_G(z)\leqslant 2\nu+2.$$

3.2.4 证明:若 G 是极大平面图,则 G 有一个基本圈集,它与另一条圈的并正好含 G 中每条边两次.

3.2.5 证明:设 G 是平面图且 C 是 G 中圈,则存在 G 的平面表示 $\widetilde{G}$ 使 C 将 $\widetilde{G}$ 的所有面分成两部分,一部分在 C 的内部,而另一部分在 C 的外部.

3.2.6 设 G 是奇阶平图. 证明:若 G 中有 Hamilton 圈,则 G 有偶数($\geqslant 2$)个奇度面.

3.2.7 证明:

(a)设 G 是无环 Hamilton 平图，C 是 G 中任意一条 Hamilton 圈. 则

$$\sum_{i=1}^{\nu}(i-2)(\phi'_i-\phi''_i)=0$$

其中 ϕ'_i 和 ϕ''_i 分别表示包含在 C 内部和外部中度为 i 的面的数目；　(E. Ja. Grinberg, 1968)

(b)Grinberg 图是非 Hamilton 图；

(习题 3.2.7(b) Grinberg 图)

(c)下图中不含连接 x_1 和 x_2 的 Hamilton 路；

(d)Tutte 图是非 Hamilton 图.

(习题 3.2.7(c))　　(习题 3.2.7(d) Tutte 图)

3.3 对 偶 图*

设 G 是平图，$F(G)=\{f_1,f_2,\cdots,f_\phi\}$. 定义图 G^* 如下：$V(G^*)=\{f_1^*,f_2^*,\cdots,f_\phi^*\}$，$f_i^*$ 和 f_j^* 有边 e^* 连接 $\Leftrightarrow G$ 中面 f_i 和面 f_j 的边界有公共边 e. G^* 称为 G 的**几何对偶图**(**geometric dual graph**).

图 3.11 所示的是平图 G(细线所示)和它的几何对偶图 G^* (粗线表示).

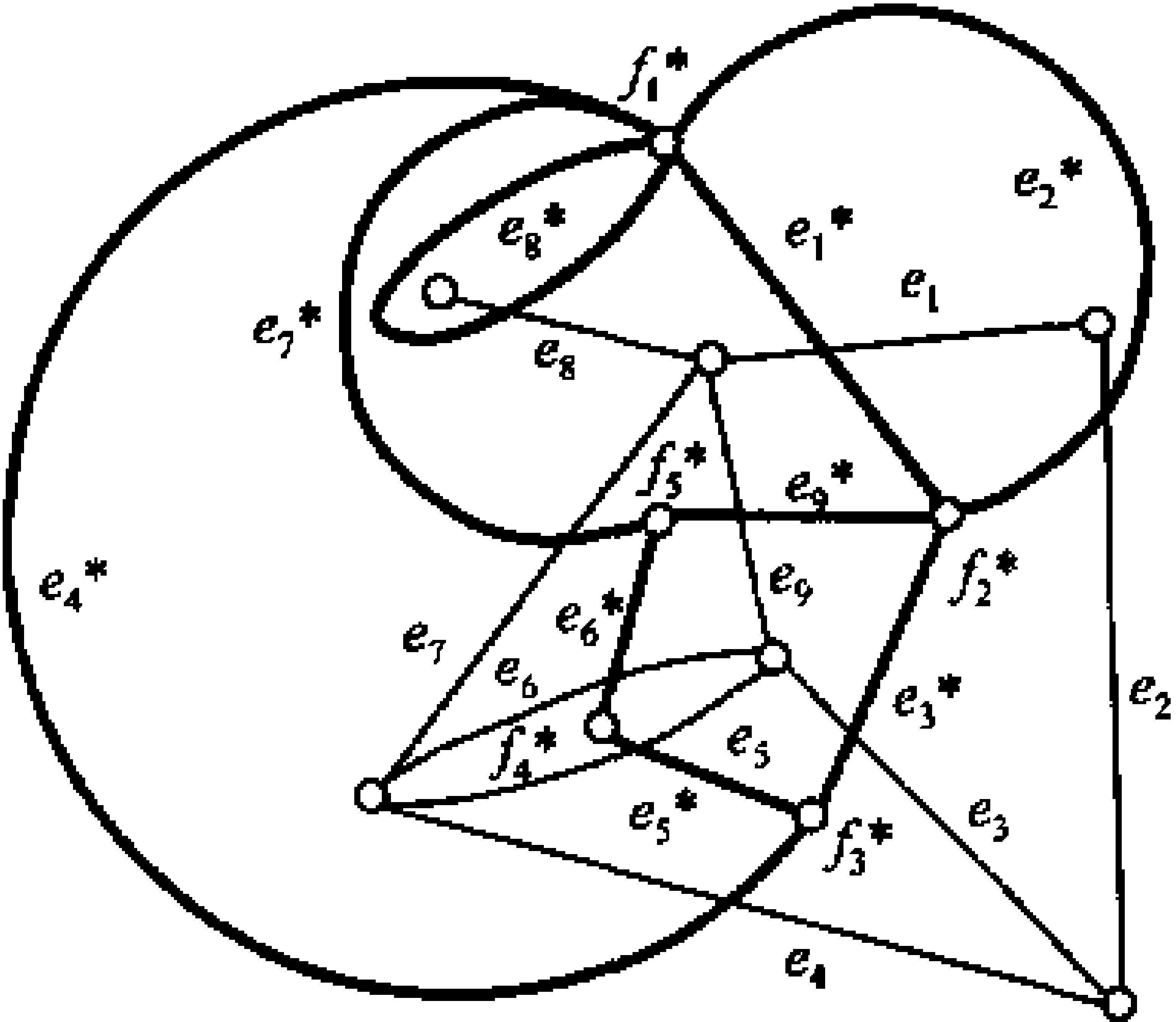


图 3.11　平图 G(细线所示)的几何对偶图 G^* (粗线表示)

容易看出，平图 G 的几何对偶图 G^* 仍是平图(习题 3.3.2).

值得注意的是，同构的平图可以有不同构的几何对偶图. 例如，图3.12中所示的两个平图是同构的，但它们的几何对偶图却不同构. 因为(a)中的图有一个

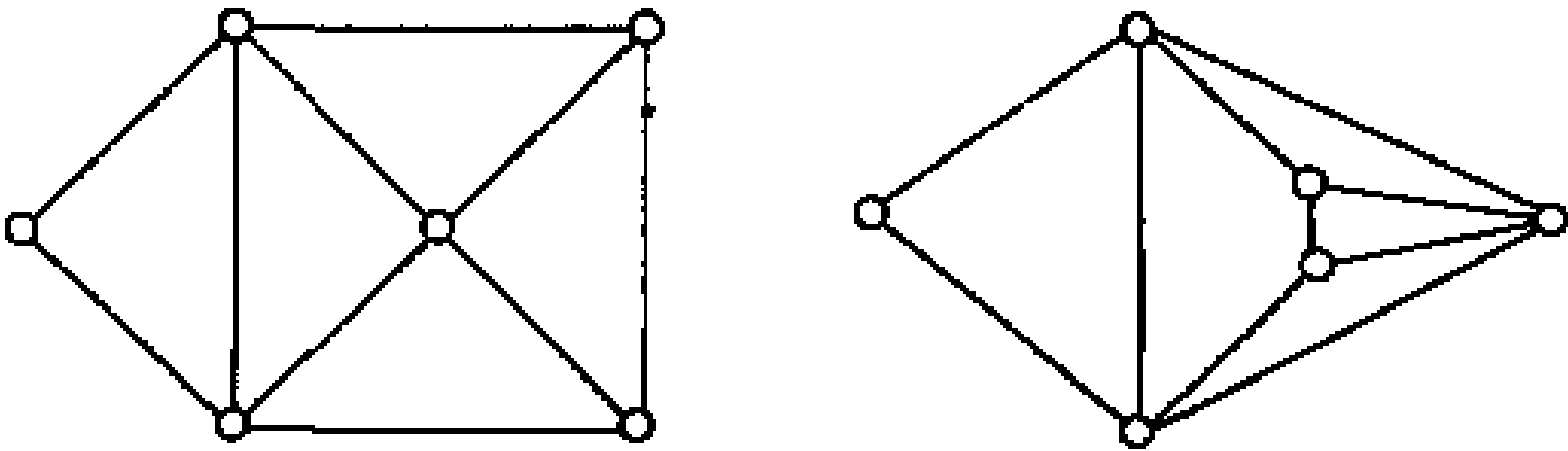


图 3.12　其几何对偶图不同构的两个同构平图

5 度的面，而图(b)中的图则没有这样的面. 因此，几何对偶图的概念仅对平图是有意义的，一般不能推广到平面图上去. 从 G^* 的定义，立即有

$$\begin{cases}\nu(G^*)=\phi(G) \quad \varepsilon(G^*)=\varepsilon(G),\\ d_{G^*}(f^*)=d_G(f), \quad \forall f\in F(G).\end{cases} \tag{3.2}$$

定理 3.7　**设** G **是平图**，G^* **是** G **的几何对偶图**，$B\subseteq E(G)$，$B^*=\{e^*\in E(G^*):e\in B\}$. 则

(i) $G[B]$**是** G **的圈**$\Leftrightarrow B^*$ **是** G^* **的键**；

(ii) B 是 G 的键$\Leftrightarrow G^*[B^*]$是 G^* 的圈.

证明　(i) ($\Leftarrow$)设 B^* 是 G^* 的键,要证明 $G[B]$是 G 中一条圈. 由于 B^* 是 G^* 的键,所以 $V(G^*)$存在两个不交的非空真子集 F_1^* 和 F_2^* 使 $B^*=E_{G^*}[F_1^*,F_2^*]$. 由于$V(G^*)=F(G)$. 所以$G[B]$将 $F(G)$划分成两个不交的非空真子集 F_1 和 F_2,其中 $F_i(i=1,2)$是 G 中对应于F_i^* 的面集. 由习题 2.2.3 知 $G^*[F_i^*]$是连通的. 令 G_i 为 F_i 中面的并$(i=1,2)$. 由于 $F_i\neq\varnothing$,所以 G_1 有边界 H 且 $E(H)=B$. 由于 $G^*[F_1^*]$是连通的,所以 G_1 的外部面边界 $H=G[B]$是连通的. 又由于 H 中每条边是G_1 中面和 G_2 中面的公共边界,所以 $H=G[B]$中顶点都是 2 度点,于是 H 是G 的一条圈.

($\Rightarrow$)设 $G[B]$是 G 中圈,要证明 B^* 是 G^* 中键. 由于 $G[B]$是 G 中圈,所以它将 G 的面集 $F(G)$划分成两个不交的非空真子集 F_1 和 F_2. 令 $F_i^*(i=1,2)$是 G^* 中对应于 F_i 的顶点集. 不妨设 F_1 在$G[B]$的内部. 于是 $G[B]$是 F_1 中面之并的外部面边界,即 B 中任何一条边都在 F_1 中某个面和 F_2 中某个面的公共边界上. 换言之,B 中任何一条边 e 都在$G[B]$的内部面和外部面的公共边界上,因而 e^* 连接 F_1^* 中顶点到 F_2^* 中顶点,即 B^* 是 G^* 割边集$E_{G^*}(F_1^*,F_2^*)$. 由于$G^*[F_1^*]$和$G^*[F_2^*]$都是连通的,所以由习题 2.2.3 知 $B^*=E_{G^*}[F_1^*,F_2^*]$是 G^* 的键.

(ii)的证明类似于(i)的证明,留给读者(习题 3.3.4). □

推论 3.7.1　**设 T 是连通平图 G 的支撑树,$E^*=\{e^*\in E(G^*):\ e\in E(\overline{T})\}$,则 $T^*=G^*[E^*]$是 G^* 的支撑树.**

证明　当 $\phi(G)=1$ 时,$G=T$,$E^*=\varnothing$,结论成立. 下设 $\phi(G)\geqslant 2$. 由于 G 的每个面的边界都含 $E(\overline{T})$中边,所以 G^* 的每个顶点都与 E^* 中边关联,即 T^* 是 G^* 的支撑子图. 若 T^* 中含 G^* 的圈,则由定理 3.7 知$E(\overline{T})$含 G 的键,矛盾于定理2.6(i). 所以 T^* 不含圈. 又由于 $E(\overline{T})$中每条边 e 都在 G 中某两个面的公共边界上,即 $\phi(G-e)=\phi(G)-1$. 所以

$$1=\phi(G-E(\overline{T}))=\phi(G)-\varepsilon(\overline{T})=\nu(G^*)-\varepsilon(T^*).$$

由定理 2.2.3 知 T^* 是 G^* 的支撑树. □

推论 3.7.2　**设 G 是连通平图,则**

(i) $\dim\mathscr{C}(G^*)=\dim\mathscr{B}(G)$;

(ii) $\dim\mathscr{B}(G^*)=\dim\mathscr{C}(G)$.

由定理 3.7,H. Whitney 给出图的组合对偶图定义. 设 G 和G'是两个图,$B\subseteq E(G)$. 若存在双射 $\varphi:E(G)\to E(G')$使 $G[B]$是 G 的圈$\Leftrightarrow\varphi(B)=\{e'\in E(G'):\ \varphi(e)=e'\}$是 G'的键,则称 G'是G 的**组合对偶图(combinatorial dual graph)**.

图 3.13 所示的是图 G 和它的组合对偶图G',其中

$$\varphi: E(G) \to E(G'),$$
$$e_i \to \varphi(e_i) = e'_i, \quad i=1,2,\cdots,9.$$

令 $B=\{e_3,e_5,e_6,e_8\}$，则 $G[B]$ 是 G 的圈. $\varphi(B)=\{e'_3,e'_5,e'_6,e'_8\}$ 是 G' 的键. 当然，验证两个图是否是组合对偶的非常困难，因为它要求验证 G 的每条圈.

组合对偶图定义中没有明言 G 或 G' 是平图，但有下列结果.

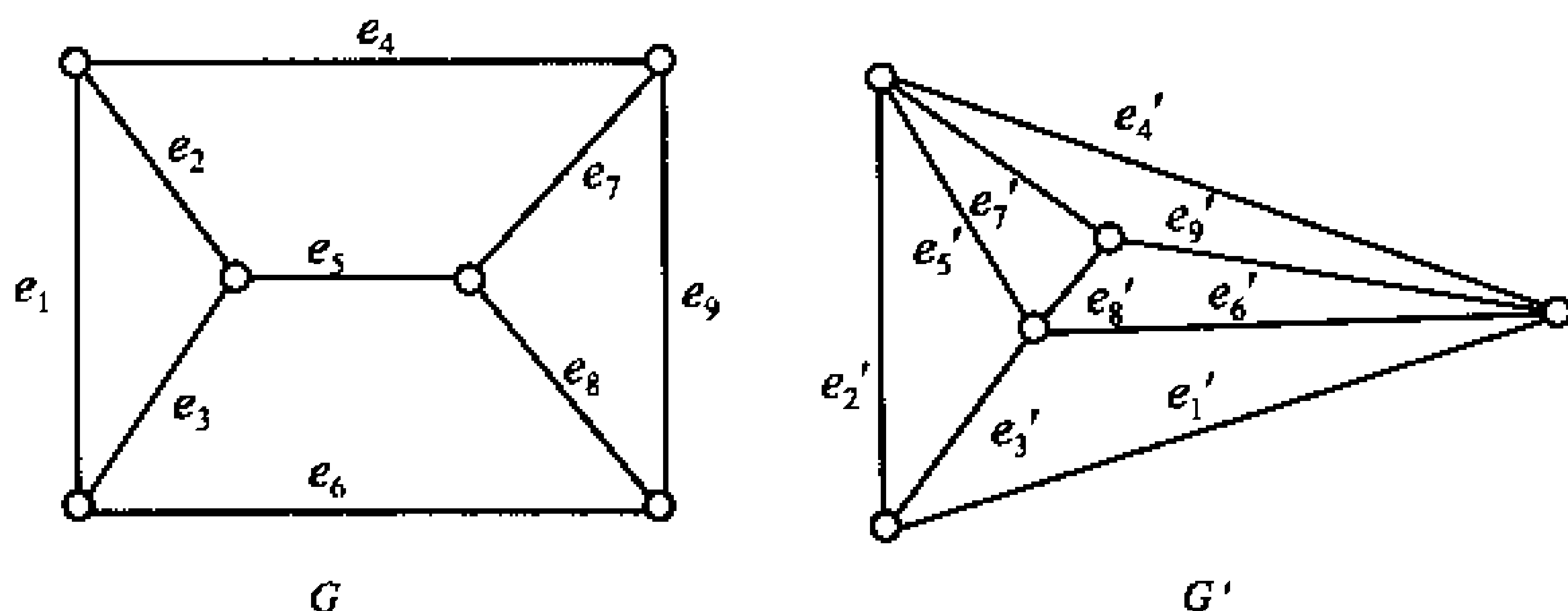


图 3.13 图 G 和它的组合对偶图 G'

定理 3.8 **若 G 是平图，则 G 的几何对偶图 G^* 必是 G 的组合对偶图，而且 G 也是 G^* 的组合对偶图.**

证明 设 G 是平图，G^* 是 G 的几何对偶. 定义一个双射

$$\varphi: E(G) \to E(G^*),$$
$$e \to \varphi(e) = e^*.$$

由组合对偶图的定义和定理 3.7 知该定理成立. □

利用组合对偶，Whitney(1932)给出平面图的下述特征.

定理 3.9 **G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 有组合对偶图.**

证明 ($\Rightarrow$)设 G 是平面图，$\tilde{G}$ 是它的平面表示. 由定理 3.8 知 $\tilde{G}$ 的几何对偶图 $\tilde{G}^*$ 是 G 的组合对偶图.

($\Leftarrow$)设 G 有组合对偶图，要证 G 是平面图. (反证法)设 G 是非平面图. 由 Kuratowski 定理(3.6)，不妨设 G 是 K_5 或 $K_{3,3}$(因为由组合对偶图的定义可知，G 的每个连通分支或者 G 的每个细分图都有组合对偶(见习题 3.3.3)).

(i)若 G' 是 K_5 的组合对偶图，则因为 K_5 有 10 条边，不含长度为 2 的圈，不含 2 条边的键，而且仅含 4 条边和 6 条边的键，所以 G' 有 10 条边，不含度数小于 3 的顶点，不含长度为 2 的圈且仅含长度为 4 和 6 的圈. 因而由推论 1.4.2 知 G' 是简单 2 部分图. 由于阶小于 7 的简单 2 部分图最多只有 9 条边，所以 $\nu(G')\geqslant 7$. 于是 $\varepsilon(G')\geqslant\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3>10=\varepsilon(G')$，矛盾.

(ii)若 G' 是 $K_{3,3}$ 的组合对偶图，则因为 $K_{3,3}$ 不含 2 条边的键，仅含长度为 4 和 6 的圈，所以 G' 不含长度为 2 的圈且不含小于 3 条边的键. 因此，$\delta(G')\geqslant 4$，并

且 $\nu(G')\geqslant 5$. 于是，$9=\varepsilon(K_{3,3})=\varepsilon(G')\geqslant\frac{1}{2}5\cdot 4=10$，矛盾. □

习 题

3.3.1 画出图 3.13 所示平图的几何对偶图 G^*.

3.3.2 设 G 是平图，G^* 是 G 的几何对偶图.

(a)证明：G^* 是连通的平图.

(b)举例说明 G 不一定是 G^* 的几何对偶图.

3.3.3 证明：

(a) G 有几何(组合)对偶$\Leftrightarrow G$ 的每个连通分支有几何(组合)对偶；

(b) G 有几何(组合)对偶$\Leftrightarrow G$ 的每个细分图有几何(组合)对偶.

3.3.4 证明定理 3.7(ii)和定理 3.2.

3.3.5 证明：设 G 是平图且不含奇度点，则 G 的几何对偶是 2 部分图.

3.3.6 设 G 是平图. 证明：$G^{**}\cong G\Leftrightarrow G$ 是连通的.

3.3.7 证明：任何平图均有偶数个奇度面.

3.3.8 若平图 G 和它的几何对偶图 G^* 同构，则称 G 为**自对偶平图(self-dual plane graph)**

(a)证明：若 G 是自对偶平图，则 $\varepsilon=2\nu-2$.

(b)对每个 $n\geqslant 4$，找出 n 阶自对偶平图.

(c)证明：轮 $W_n(=K_1\vee C_{n-1})$是自对偶平图.

3.3.9 设 G 是连通平图，G^* 是 G 的几何对偶图. 证明：$\tau(G)=\tau(G^*)$.

3.3.10 证明：任何平图不存在这样的五个面使它们两两有公共边界.

3.3.11 设 G 是连通图，B 是 G 的键. 若 $G-B$ 的两分支均为树，则称 B 为 G 的 **Hamilton 键**. 证明：

(a) 连通平图 G 含 Hamilton 圈$\Leftrightarrow G$ 的几何对偶 G^* 含 Hamilton 键；

(b) 若 G 含 Hamilton 键 B，则

$$\sum_{i=1}^{\Delta}(i-2)(\nu'_i-\nu''_i)=0,$$

其中 ν'_i，ν''_i 分别是 $G-B$ 两分支 G' 和 G'' 中度为 i(在 G 中)的顶点数.

应 用

3.4 正多面体

平图的理论与凸多面体的研究有着紧密的联系. 事实上，每个凸多面体都对应着一个平图. 设 P 是凸多面体. 以 P 的顶点为顶点，P 的棱为边而得到的

平图$G(P)$称为对应于P的平图. 则易知$G(P)$是连通的而且$\delta(G(P))\geqslant 3$,P的面就是$G(P)$的面,而且$G(P)$的每条边正好在两个面的边界上. 凸多面体P和对应于P的平图$G(P)$如图3.14所示.

习惯上,用V,E,F分别表示凸多面体P的顶点数、棱数和面数,所以Euler公式可以写成

$$V-E+F=2. \tag{3.3}$$

(3.3)式就是著名的Euler **凸多面体公式**.

为方便起见,用V_n和F_n分别表示凸多面体P(或对应的平图$G(P)$)的n度点和n度面的数目. 于是$n\geqslant 3$,并且由推论1.1和定理3.2,有

$$2E=\sum_{n\geqslant 3}nV_n=\sum_{n\geqslant 3}nF_n. \tag{3.4}$$

定理3.10 每个凸多面体中都至少有一个n度面,其中$3\leqslant n\leqslant 5$.

证明 反证法. 设$F_3=F_4=F_5=0$. 则由(3.4),有

$$2E=\sum_{n\geqslant 6}nF_n\geqslant\sum_{n\geqslant 6}6F_n=6\sum_{n\geqslant 6}F_n=6F,$$

即有

$$F\leqslant\frac{1}{3}E. \tag{3.5}$$

另一方面由(3.4)式,有

$$2E=\sum_{n\geqslant 3}nV_n\geqslant 3\sum_{n\geqslant 3}V_n=3V,$$

即

$$V\leqslant\frac{2}{3}E. \tag{3.6}$$

于是,由Euler凸多面体公式(3.3)和不等式(3.5),(3.6)得到下列矛盾:

$$E=V+F-2\leqslant\frac{2}{3}E+\frac{1}{3}E-2=E-2.$$ □

每个面并且每个多面角都相等的凸多面体称为**正多面体(regular polyhedron)**,亦称为**Plato体**. 对应的平图称为Palto图(见图3.14).

下述定理是Euclid(约公元前330年～前275年)的13卷《几何原本》书中的最后一个结果. 我们用Euler凸多面体公式来给出它的证明.

定理3.11 仅有5个正多面体(如图3.14所示).

证明 设P是正多面体且$G(P)$是对应的平图. 由公式(3.3)和(3.4)式,对任何凸多面体,均有

$$\begin{aligned}-8&=4E-4V-4F\\&=2E+2E-4V-4F\end{aligned}$$

$$= \sum_{n\geq 3} nF_n + \sum_{n\geq 3} nV_n - 4\sum_{n\geq 3} V_n - 4\sum_{n\geq 3} F_n$$

$$= \sum_{n\geq 3} (n-4)F_n + \sum_{n\geq 3} (n-4)V_n. \tag{3.7}$$

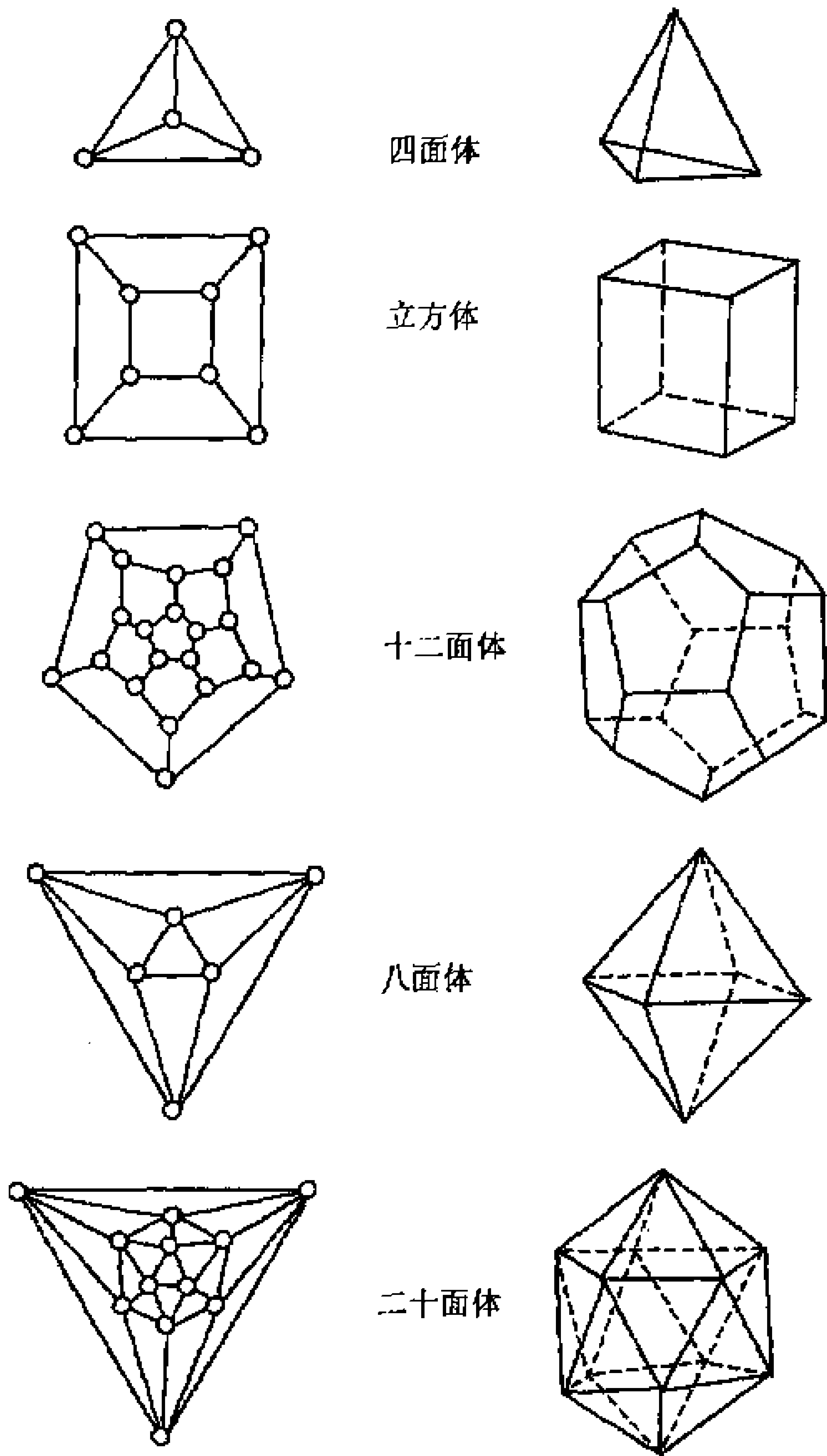


图 3.14　正多面体

因为 P 是正多面体，所以存在两个整数 $h(\geq 3)$ 和 $k(\geq 3)$ 使 $F=F_h$ 且 $V=V_k$. 因此，由(3.7)式，有

$$-8=(h-4)F_h+(k-4)V_k, \tag{3.8}$$

并且由(3.4)式,有 $$hF_h=2E=kV_k. \tag{3.9}$$
由定理 3.10 知 $$3\leqslant h\leqslant 5.$$

分 3 种情形讨论.

情形 1 当 $h=3$ 时,由(3.8)和(3.9)式得
$$12=(6-k)V_k. \tag{3.10}$$
因此有 $3\leqslant k\leqslant 5$. 由(3.10)和(3.8)式,有:

当 $k=3$ 时,$V_3=4$, $F_3=4$,因此 P 是四面体;

当 $k=4$ 时,$V_4=6$, $F_3=8$,因此 P 是八面体;

当 $k=5$ 时,$V_5=12$, $F_3=20$,因此 P 是二十面体.

情形 2 当 $h=4$ 时,由(3.8)式有
$$8=(4-k)V_k.$$
所以 $$k=3,\quad V_3=8,\quad F_4=6,$$
即 P 是立方体.

情形 3 当 $h=5$ 时,由(3.8)和(3.9)式有
$$20=(10-3k)V_k.$$
所以 $$k=3,\quad V_3=20,\quad F_5=12,$$
即 P 是十二面体. □

习 题

3.4.1 证明:不存在这样的凸多面体:它有奇数个面,而且每个面都有奇数条棱.

3.4.2 证明:任何凸多面体至少有 6 条棱.

3.4.3 证明:不存在 7 条棱的凸多面体.

3.4.4 证明:除四面体外,不存在这样一个凸面体:它的每个顶点与其余点之间都有棱相连.

3.4.5 证明:任何凸多面体至少有一个三角形的面或一个三面角的顶点.

3.4.6 证明:任何凸多面体中,发出奇数条棱的点数必为偶数.

3.4.7 证明:任何凸多面体各面角之和是有同样顶点数目的平面凸多边形内角和的二倍.

3.4.8 设 P 是凸多面体,$E=30$,$F=12$. 求 P 各面角之和.

3.5 印刷电路板的设计

当设计和制造印刷电路板时,首先遇到的问题是判定一个给定的电路图是否能被印刷在同一层板上而使导线不发生短路?若能,怎样给出具体的布线方案?

将所要印刷的电路图看成是一个无向图(实际上是简单的连通图)G,其中顶点代表电子元件,而边代表导线. 于是上述问题归结为判定 G 是否是平面图?

若 G 是平面图，则怎样给出它的一个平面表示来？

遗憾的是 Kuratowski 定理并没有提供这样的一个方法．本节介绍一个由 Demoucron，Malgrange & Pertuiset（1964）提供的好算法，简记为 DMP 算法．

在介绍这个算法之前，先对图 G 进行下列预先处理可以大大简化运算量：

(a)若 G 不连通，则分别判定它的每个分支；

(b)若 G 有割点，则分别判定它的块；

(c)删去 G 中环而不影响其平面性；

(d)用一条边替代 G 中 2 度点和与之相关联的两条边而不影响其平面性；

(e)删去平行边而不影响其平面性．

最后两个简化步骤应当反复且交错地使用直到不能使用为止．在做了上述简化后，在简单图 G 中利用两个基本判别法：

(f)若 $\varepsilon<9$ 或者 $\nu<5$，则 G 必是平面图（习题 3.2.2）；

(g)若 $\varepsilon>3\nu-6$ 或者 $\delta>5$，则由推论 3.4.1 和推论 3.4.2 知 G 必是非平面图．

图 3.15 展示了有两个割点的图在进行上述预先处理后得到的平面图．

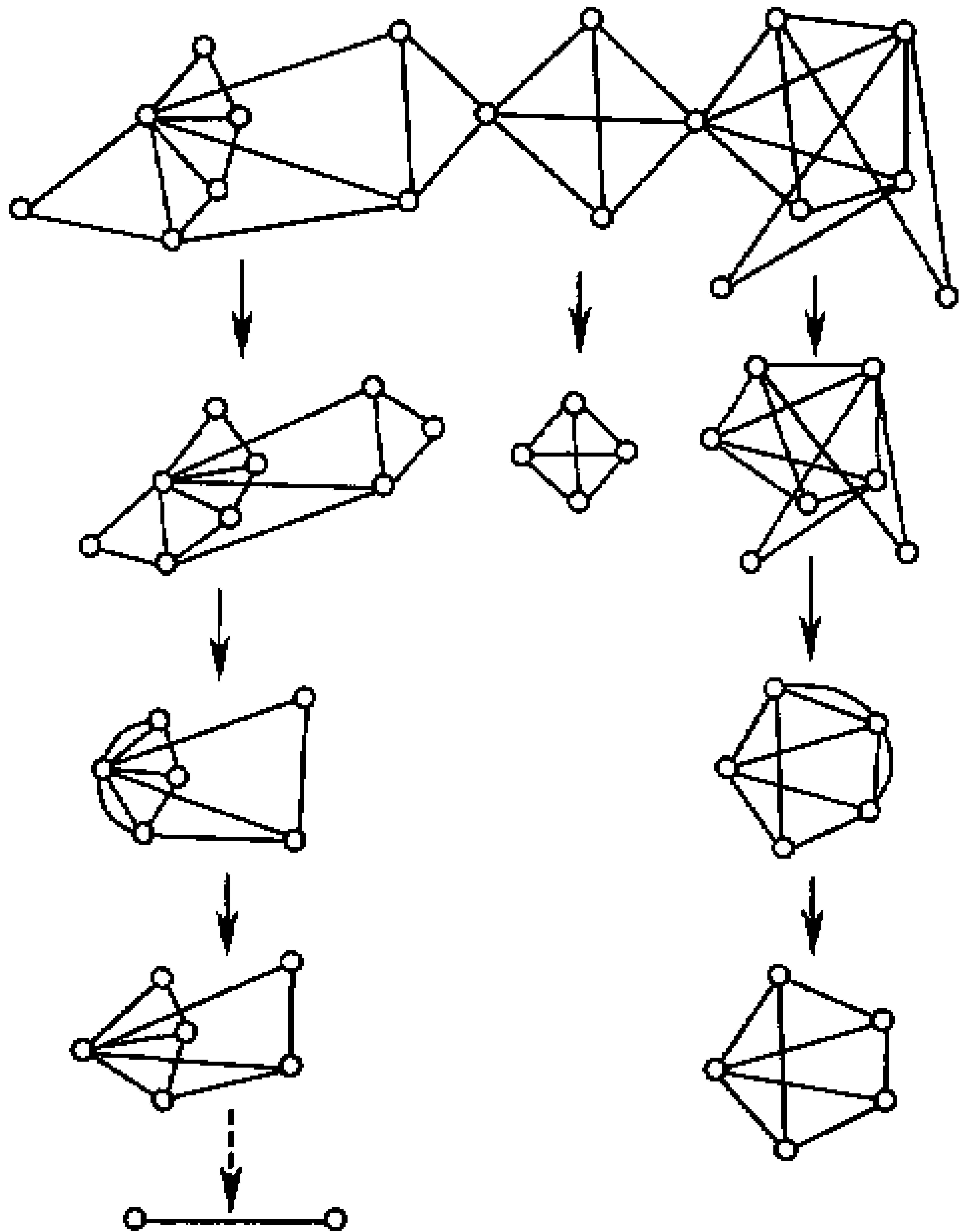


图 3.15

为了介绍 DMP 算法，我们还需要下列概念.

设 G 是平面图，$H\subseteq G$，$\widetilde{H}$ 是 H 的平面表示. 若存在 G 的平面表示 $\widetilde{G}$ 使 $\widetilde{H}\subseteq\widetilde{G}$，则称 $\widetilde{H}$ 是 G **容许的**(*G* **admissible**). 例如图3.16(a)是平面图 G，(b)，(c)是 G 的两个子图 G_1 和 G_2. 其中 G_1 是 G 容许的，而 G_2 则不是. 若 B 是 G 的 H 分支(H 分支的定义见 3.2 节)，f 是 $\widetilde{H}$ 的面并且 B 和 H 在 G 中的接触点集 $V_G(B,H)\subseteq B_{\widetilde{H}}(f)$，则称 B 在 f **内可画出**(**drawable**).

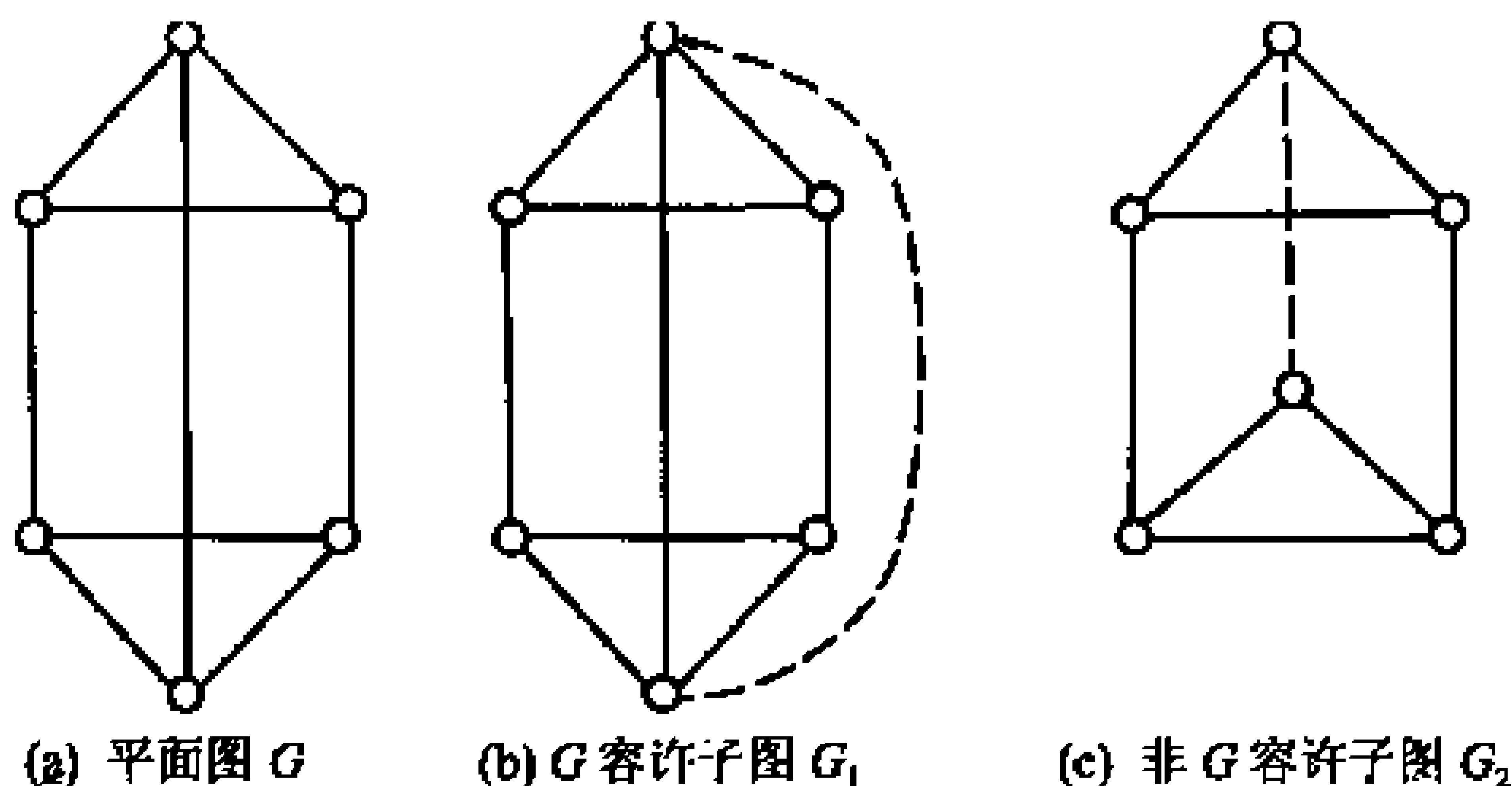


图 3.16

用 $F_G(B,\widetilde{H})$ 表示 $F(\widetilde{H})$ 中 B 在其内可画的那些面 f 集，即

$$F_G(B,\widetilde{H})=\{f\in F(\widetilde{H}):B \text{ 在 } f \text{ 内可画出}\}.$$

下述定理提供了 G 是平面图的一个必要条件.

定理 3.12 **设 $\widetilde{H}$ 是平面图 G 容许的，则对 G 的每个 H 分支 B 均有**

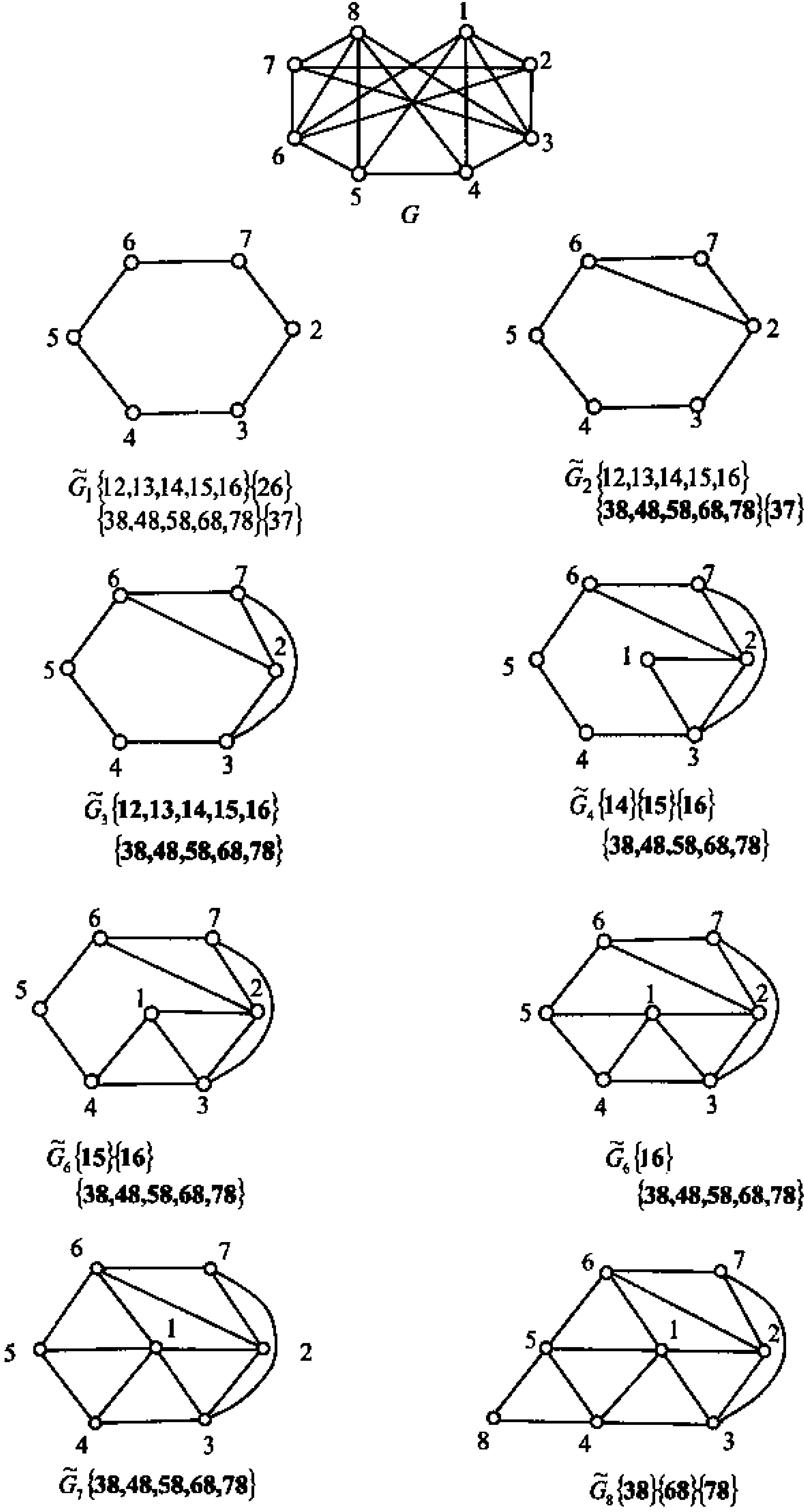
$$F_G(B,\widetilde{H})\neq\varnothing.$$

证明 设 $\widetilde{H}$ 是 G 容许的. 则由定义知，存在 G 的一个平面表示 $\widetilde{G}$ 使得 $\widetilde{H}\subseteq\widetilde{G}$. 显然 H 分支 B 所对应的 $\widetilde{G}$ 的子图必限制在 $\widetilde{H}$ 的一个面中. 因此 $F_G(B,\widetilde{H})\neq\varnothing$. □

DMP 平面性算法：

1. 设 G_1 是 G 中的圈(因为无圈图必是平面图)，求出 G_1 的平面表示 $\widetilde{G}_1$. 令 $i=1$.
2. 若 $E(G)\backslash E(G_i)=\varnothing$，则停止. 若 $E(G)\backslash E(G_i)\neq\varnothing$，则确定 G 的所有 G_i 分支，并对每个 G_i 分支 B，求出集 $F_G(B,\widetilde{G}_i)$.
3. 若存在 G_i 分支 B 使 $F_G(B,\widetilde{G}_i)=\varnothing$，则停止. 由定理 3.12 知 G 是非平面图. 若存在 G_i 分支 B 使 $|F_G(B,\widetilde{G}_i)|=1$，则令 $\{f\}=F_G(B,\widetilde{G}_i)$；若不存在这样的分支 B，则令 B 是任何一个 G_i 分支，并且任取 $f\in F_G(B,\widetilde{G}_i)$.
4. 选取一条 xy 路 $P_i\subseteq B$ 使 $x,y\in V_G(B,G_i)$. 令 $G_{i+1}=G_i\cup P_i$，并把 P_i 画在 $\widetilde{G}_i$ 的面 f 内得 G_{i+1} 的一个平面表示 $\widetilde{G}_{i+1}$. 用 $i+1$ 替代 i 并转入第二步.

例 3.5.1　为了说明上述算法，我们考察图 3.17 所示的图 G.



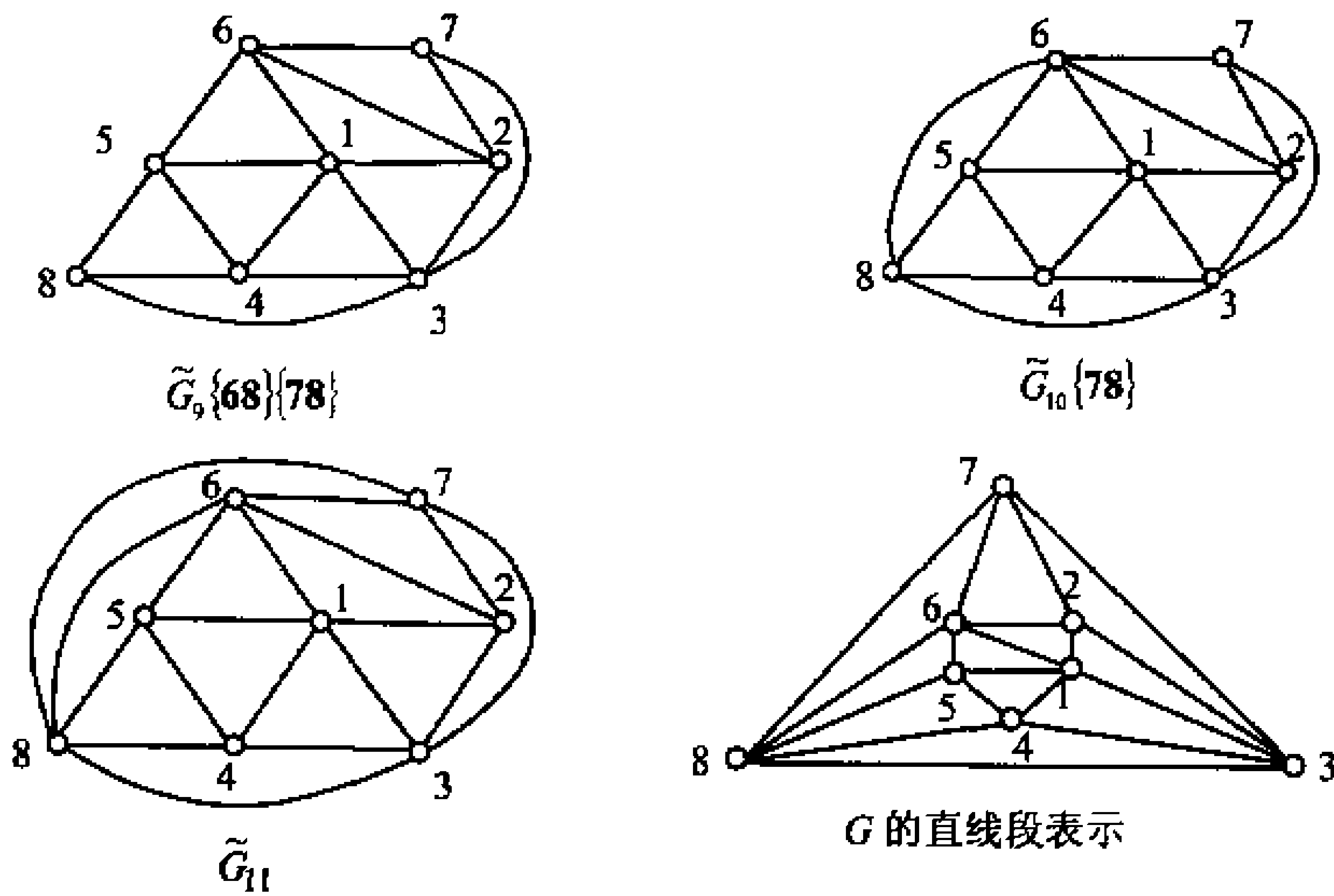


图 3.17 DMP 平面性算法的应用

从圈 $\tilde{G}_1=(2345672)$开始(为简单起见,分支用其边集表示).在每步中,对于使$|F_G(B,\tilde{G}_i)|=1$ 的分支 B 用粗体字标出.在这个例子中,算法终止于 G 的一个平面表示$\tilde{G}_{11}$,所以 G 是平面图. □

定理 3.13 DMP 平面性算法是有效的.

证明 因为若 G 是连通的平面图,则 $\phi=\varepsilon-\nu+2$. DMP 算法是从 G 的一个圈G_1 开始,故 $\phi(G_1)=2$. 在此算法的执行中,每当用 $i+1$ 替代 i 时,其面增加一个,即 $\phi(G_{i+1})=\phi(G_i)+1=i+2$. 所以若 G 是平面图,则算法结束时必产生序列 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2,\cdots,\tilde{G}_{\varepsilon-\nu+1}$. 因此只须证明:若 G 是平面图,则 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2,\cdots,\tilde{G}_{\varepsilon-\nu+1}$都是 G 容许的.

对 $k=\varepsilon-\nu+1$ 用归纳法. 当 $k=1$ 时,由于 G 是平面图,所以 $\tilde{G}_1$ 显然是 G 容许的. 假设对每个 $i(1\leqslant i\leqslant k<\varepsilon-\nu+1)$,$\tilde{G}_i$ 都是G 容许的. 根据定义,存在 G 的平面表示 $\tilde{G}$,使得 $\tilde{G}_k\subseteq\tilde{G}$. 下面证明 $\tilde{G}_{k+1}$是 G 容许的. 令 B 和 f 是算法第三步所定义的G_k 分支和 $F_G(B,\tilde{G}_k)$中的面. 若 $F_G(B,\tilde{G}_k)=\{f\}$,则由算法构造出来的 $\tilde{G}_{k+1}$显然满足 $\tilde{G}_k\subset\tilde{G}_{k+1}\subseteq\tilde{G}$. 所以,假设对 G 中任何 G_k 分支 B' 都有$|F_G(B',\tilde{G}_k)|>1$ 并假定 B 在$F_G(B,\tilde{G}_k)$的另一个 f'内画出. 由于G 是无割点的连通图,所以 G 中每个G_k 分支B'都有$|V_G(B',G_k)|\geqslant 2$. 因此 B'正好能画在两个面中. 于是 G 中每个使 $V_G(B',G_k)$含在 f 和 f' 的公共边界上的 G_k 分支 B',既可以画在 f 中也可以画在 f'中. 对于这样的 B',我们按下述方法得到 G 的另一个平面表示$\tilde{G}'$:若 B'在$\tilde{G}$ 的面 f'中就画 B'在$\tilde{G}'$的 f 中;若 B'在$\tilde{G}$ 的 f 中就画 B'在 f'中(例如,见图 3.18,分支 B 和面 f 是算法第三步中选取的,但 B 画在面 f'中. 于是将 f'中两个分支B 和 B_2 画在 f,而将面 f 中的分支B_1 画在 f'

中). 故 $\widetilde{G}_{k+1}\subseteq\widetilde{G}'$，即 $\widetilde{G}_{k+1}$ 是 G 容许的. □

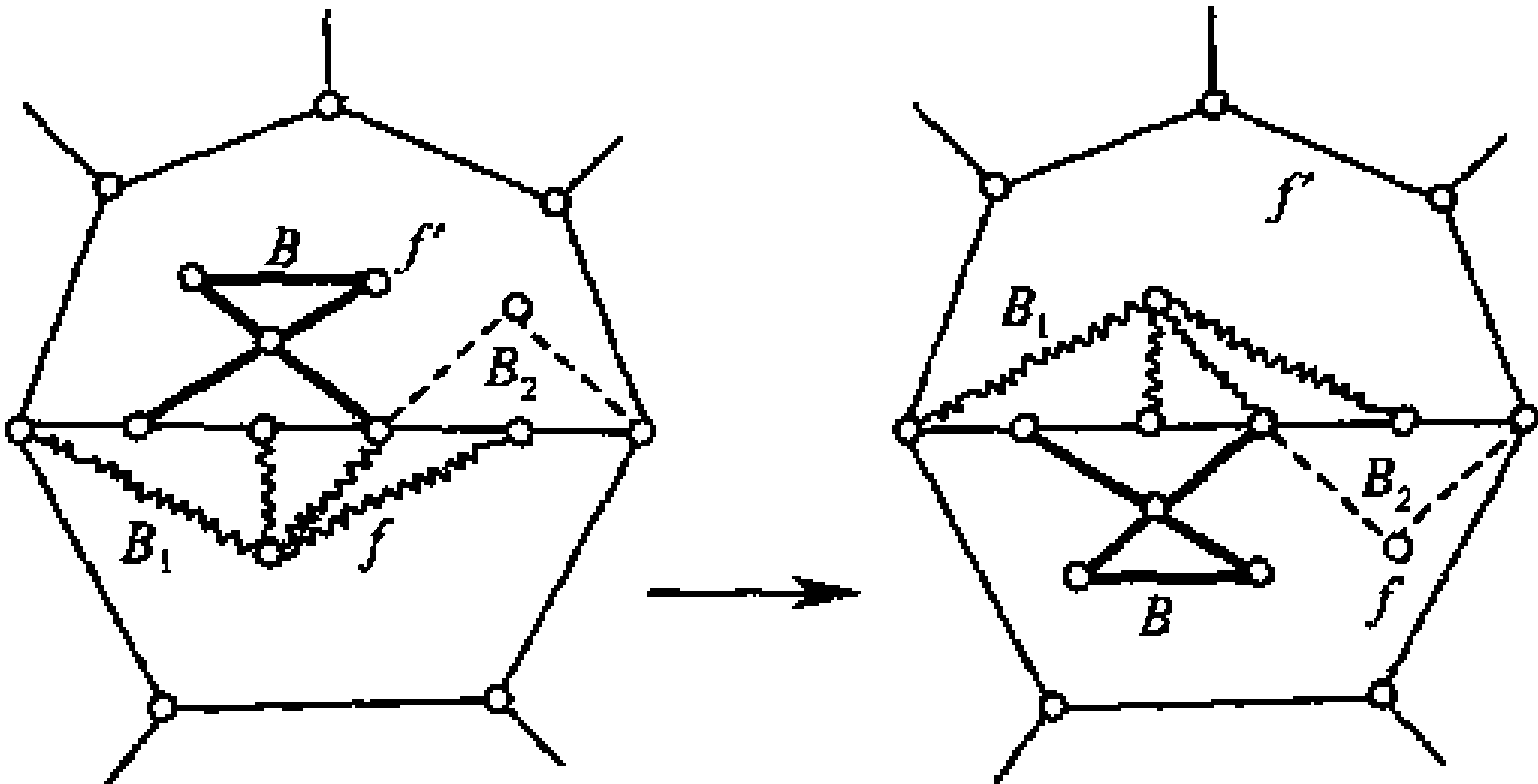


图 3.18

利用 DMP 平面性算法和定理 3.12，可以验证某些图的非平面性.

例 3.5.2　考察图 3.19 中的图 H. 从圈 $\widetilde{H}_1=(123487651)$ 开始. 以图 3.19

$\widetilde{H}$

$\widetilde{H}_3$ {14}{27}{36}{37}{58}{68}

$\widetilde{H}_1$ {13}{14}{26}{27}{36}{37}{58}{68}

$\widetilde{H}_4$ {27}{36}{37}{58}{68}

$\widetilde{H}_2$ {14}{26}{27}{36}{37}{58}{68}

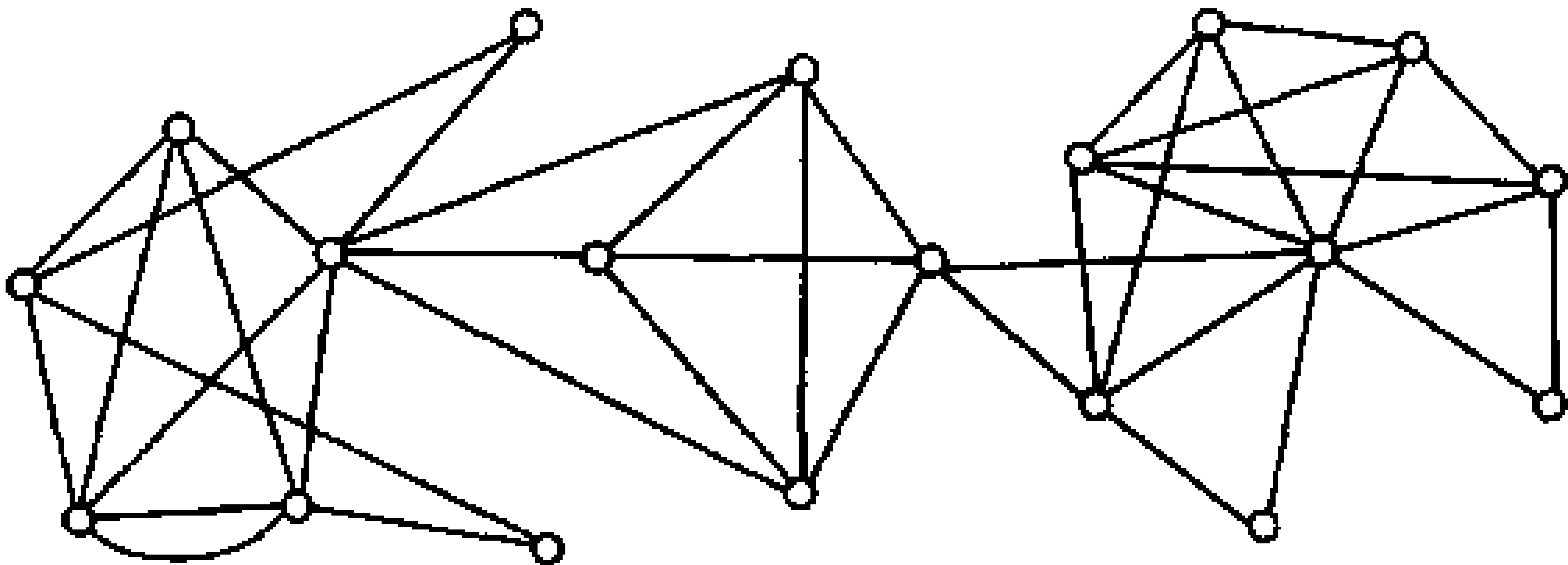
$\widetilde{H}_5$ {36}{37}{58}{68}

图 3.19　DMP 平面性算法的应用

所示的顺序进行,可以看出作出图 $\widetilde{H}_5$ 之后,存在 $\widetilde{H}_5$ 分支 $B=\{36\}$ 使 $F_H(B,\widetilde{H}_5)=\varnothing$. 算法停止,并由定理 3.12 知 H 是非平面图. □

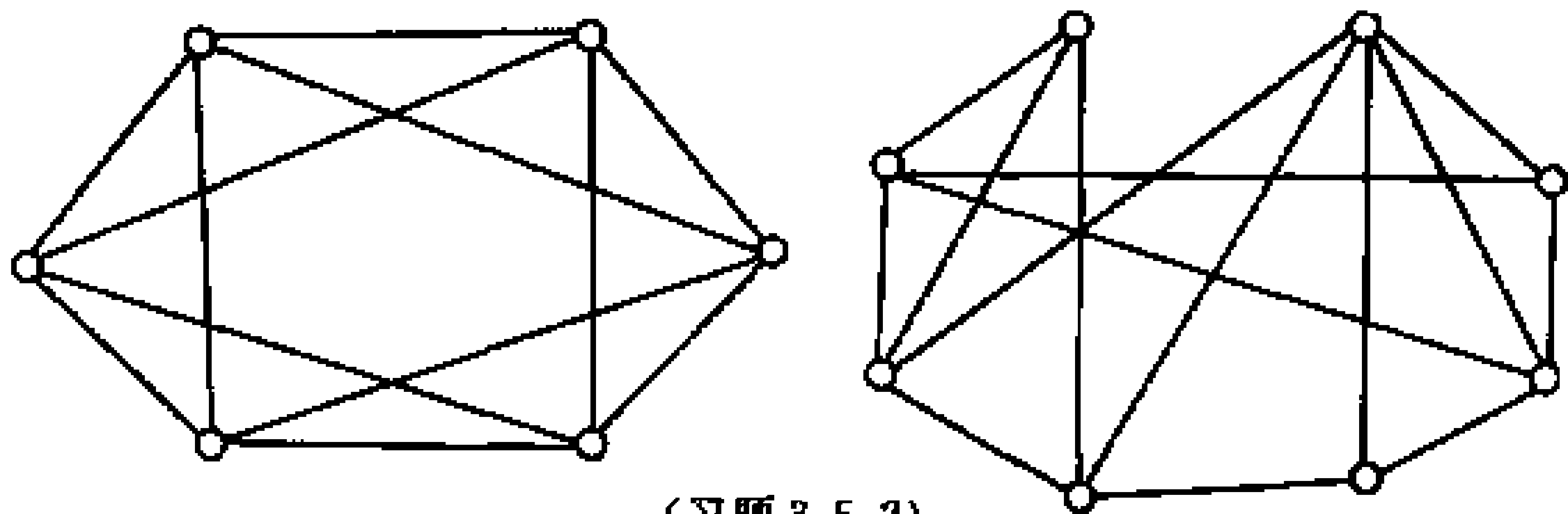
习 题

3.5.1 对下列图进行预先处理,并验证其平面性.



(习题 3.5.1)

3.5.2 利用 DMP 平面性算法验证下列图的平面性.



(习题 3.5.2)

3.5.3 利用 DMP 平面性算法验证 K_5,$K_{3,3}$和 Petersen 图的非平面性.

小结与参考文献

平图与平面图是图论中重要研究分支——**拓扑图论(topological graphtheory)**的重要研究内容. L. Euler 于 1753 年发现了Euler公式(即公式(3.1)和(3.3))而成为拓扑图论的奠基人. 接着中断了 170 多年. 1930 年,当波兰数学家 C. Kuratowski 和美国数学家 O. Frink & P. A. Smith 发现了平面图判定准则(即定理 3.6)后,这方面的研究才开始复苏. 这个准则有许多证明和应用,有兴趣的读者可参阅 Thomassen(1981)的一篇综述文章. 本章给出的证明属于 Tverberg(1989).

拓扑图论的另几位先驱者是 H. Whitney, S. McLane 和 K. Wagner,他们都分别创立了各自的理论,得到了图嵌入平面的许多性质.

20 世纪 50 年代,我国著名数学家吴文俊教授(1955)基于代数拓扑学中的

上同调理论揭示了图的平面性判定的一个准则. 70 年代，W. T. Tutte(1970)基于实域上链群的理论也发现一个判定准则. 80 年代，我国刘彦佩教授(1988)发现这两个判定准则从二元域GF(2)上的空间理论来看是同一的.

最早给出判定平面性的有效算法是由 Auslander & Parter(1961). 目前最有效的算法复杂度为 $O(\nu)$(见 Even & Tarijan(1976)). 值得指出的是，在 70 年代，吴文俊(1973，1974)利用代数拓扑的方法把平面性判定问题化成一个模 2 代数方程组的求解问题，得到判定平面性的 $O(\nu^6)$算法. 随后，刘彦佩(1978，1979，1988)把判定图的平面性问题转化为在一个辅助图上求一棵支撑树问题，改进了吴文俊的结果，也得到一个 $O(\nu)$算法. 由吴文俊和刘彦佩所创立的方法，国际上称为"吴-刘"方法(见 Rosenstiehl(1980)).

非平面图和图的曲面嵌入也是拓扑图论研究的重要内容之一. 本章没有涉及它，有兴趣的读者可参阅刘彦佩的专著《图的可嵌入性理论》(1995). 关于图的厚度的一篇综述文章见 Mutgel，Odenthal 和 Schartrodt(1998).

平图与平面图的研究和理论发展与著名的四色猜想有关，见 6. 3 节和 6. 4 节. 平面图的另一个应用见 4. 7 节.

1 Auslander L and Parter S V. On embedding graph in the plane. *J Math & Mech*, 1961, **10**(3):517～523

2 Chartrand G and Lesniak L. *Graphs & Digraphs* California: Wadsworth Inc, 1986

3 Demoucron G, Malgrange Y and Pertuiset R. Graphes Planaires: recomaissane et construction de representations planaires topologigues. *Rev Franciaise Recherche Opèr*, 1964, **8**:33～47

4 Euler L, Demonstratio nommullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, *Novi Comm. Acad Sci Imp Petropol*, 1752-3, **4**:140～160

5 Even S and Tarijan R E. Computing on st-numbering. *Theory of Computer Science*, 1976, **2**:339～344

6 Fáry I. On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci Math Szeged*, 1948, **11**:229～233

7 Frink O and Smith P A. Irreducible non-planar graphs *Bull Amer Math Sci*, 1930, **36**: 214

8 Kuratowski C. Sur le probléme des courbes gauches en topologie. *Fund Math*, 1930, **15**: 271～283

9 刘彦佩. 模 2 规划与平面嵌入. 应用数学学报，1978，**1**:321～329

10 刘彦佩. 图的平面性判定与平面嵌入. 应用数学学报，1979，**2**:350～365

11 Liu Y P(刘彦佩). A new approach to the linearity of testing planarity of graphs. 应用数学学报(英文版)，1988，**4**:257～265

12 Liu Y P(刘彦佩). Boolean planarity characterization of graphs. 数学学报(英文版), 1988,**4**:316～329

13 刘彦佩. 图的可嵌入性理论. 北京: 科学出版社,1995

14 McLane S. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund Math*, 1937,**28**:22～32

15 Mutgel P. Odenthal T and Schartrodt,M. The thickness of graphs: a survey. *Graphs and Combinatorics*, 1998,**14**:59～73

16 Rosenstiehl P. Preuve algébrique du critère de planarité de Wu-Liu. *Annals of Discrete Math*. 1980,**9**:67～78

17 Thomassen C. Kuratowski's theorem. *J Graph Theory*, 1981, **5**:225～241

18 Tutte W T. On hamiltonian circuits. *J London Math Soc*, 1946,**21**:98～101

19 Tutte W T. A theorem on planar graphs. *Trans Amer Math Soc*, 1956,**82**:91～116

20 Tutte W T. Toward a theory of crossing numbers. *J Comb Theory*, 1970,**8**:45～53.

21 Tverberg H. A proof of Kuratowski's theorem. *Ann Discrete Math*, 1989,**41**:417～419

22 Wagner K. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jahresber Deut Math-Verein*, 1936, **46**:26～32

23 Wagner K. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math Ann*, 1937,**114**:570-590

24 Whitney H. Non-separable and planar graphs. *Trans Amer Math Soc*, 1932,**34**:339～362

25 Whitney H. Planar graphs. *Fund Math*, 1933,**21**: 73～84

26 吴文俊. 可剖形在欧氏空间的实现问题. 数学学报,1955,**5**:505～552

27 吴文俊. 集成电路设计中的一个数学问题. 数学的实践与认识,1973,**1**:20～40

28 吴文俊. 线性图的平面嵌入. 科学通报,1974,**5**:226～228

第4章 网络流与连通度

在1.5节,我们定义了图的连通、割点和割边的概念. 本章将进一步推广这些概念.

连通度是图论中重要概念,也是最基本的概念,它是割点和割边概念的直接推广. 关于连通度的重要结果,即著名的Menger定理被认为是图论中最基本的,最经常被使用的结果. 它不仅能导出图论中许多著名结果,如Hall定理、Tutte定理和König定理(见第五章),而且还能导出数学其他领域,如线性规则、矩阵论、组合数学中许多著名的结果. 除此之外,Menger定理也是计算机和通讯网络可靠性分析中的基础.

网络流分析方法不仅是线性规划中重要的研究方法,而且也是图论中重要的研究方法. 这个方法的核心是Ford-Fulkerson的最大流最小截定理. 图论中许多结果,例如Menger定理,通过适当选择网络和流之后,应用这个定理就可以容易地获得证明.

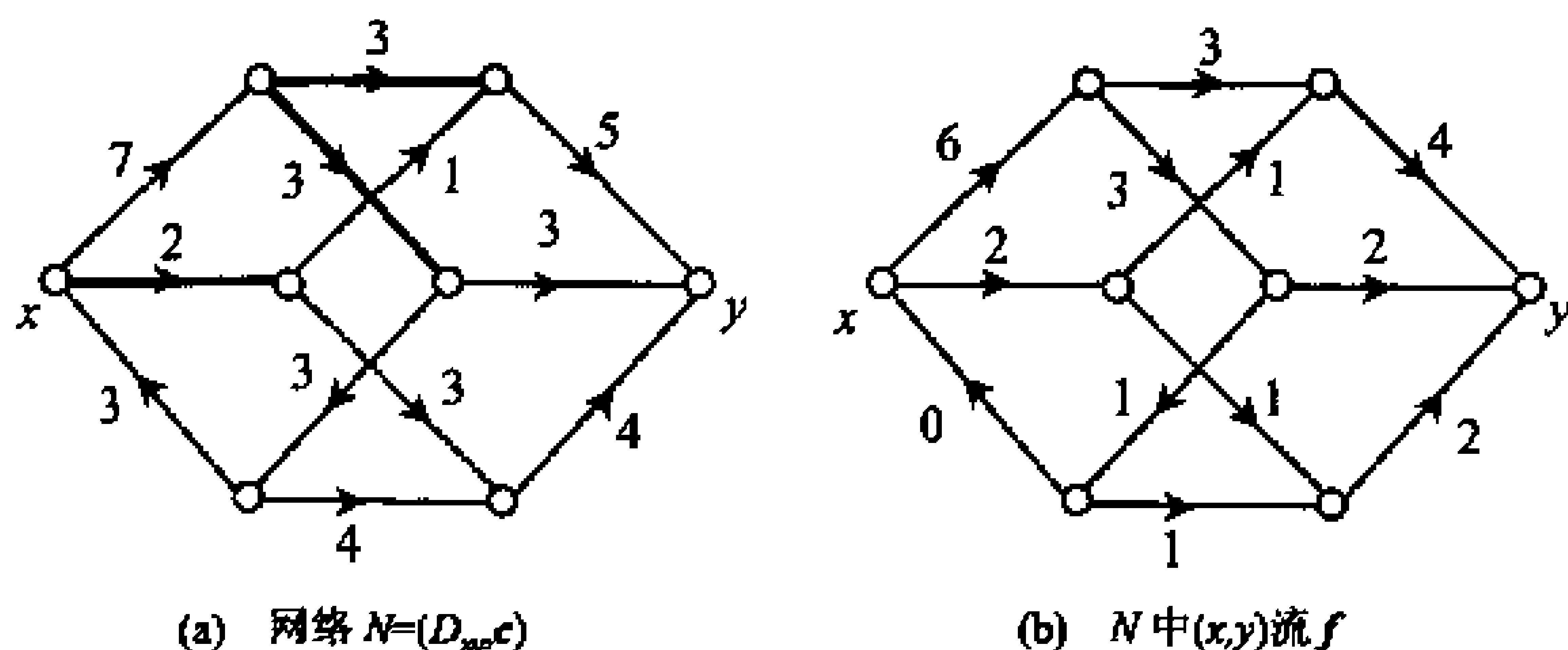
这一章以Menger定理和最大流最小截定理为主线,介绍连通度和网络流的基本理论、方法和应用. 这两个定理是独立发现的,我们将指出它们是等价的.

在应用部分中,我们首先介绍运输方案和最优运输方案的设计. 它们是线性规划中两个基本问题. 我们介绍解决这两个问题的有效算法:Ford-Fulkerson的标号法和Klein算法. 接着介绍中国投递员问题和解决这个问题的Edmonds-Johnson有效算法. 最后介绍矩形的完美剖分这一经典的组合数学问题.

4.1 网 络 流

所谓**网络(network)**是指具有两个不同的特定顶点x和y的加权连通图(D,w),记为$N=(D_{xy},w)$,其中x和y分别称为**发点(source)**和**收点(sink)**. 若w为非负的**容量函数(capacity function)**c,则称网络$N=(D_{xy},c)$为**容量网络(capacity network)**,其中c在边a上的值$c(a)$称为边a的**容量(capacity)**. 若对任何$a\in E(D)$,$c(a)$都是非负整数,则称N为**整容量网络(integer capacity network)**.

图 4.1(a)所示的是一个整容量网络,边 a 上的数值为 $c(a)$.



(a) 网络 $N=(D_{xy},c)$ (b) N 中(x,y)流 f

图 4.1

设 $N=(D_{xy},c)$为容量网络. 若存在 $f\in\mathscr{E}(D)$使得

$$0\leqslant f(a)\leqslant c(a),\quad \forall a\in E(D), \tag{4.1}$$

并且
$$f^+(u)=f^-(u),\quad \forall u\in V(D)\backslash\{x,y\}, \tag{4.2}$$

则称 f 是 N 中从 x 到 y 的**流(flow)**,简记(x,y)流.

图 4.1(b)所示的是(a)中整容量网络 $N=(D_{xy},c)$的一个(x,y)流 f,边 a 上的数值为 $f(a)$.

由条件(4.2)容易验证,对于 $N=(D_{xy},c)$中任何一个(x,y)流 f 均有

$$f^+(x)-f^-(x)=f^-(y)-f^+(y).$$

上式中等号两边的值称为(x,y)流 f **的流量(value of a flow)**,记为 val f. 例如,图 4.1(b)所示的(x,y)流 f 的流量 val $f=8$. N 中具有最大流量的(x,y)流称为 N 中**最大流(maximum flow)**.

D 中形如$(S,\overline{S})$的有向边集 B 称为(x,y)**截边集(cut edge-set)**,其中 $x\in S$, $y\in\overline{S}$.

$$c(B)=\sum_{a\in B}c(a)$$

称为 B 的**容量**,记为 cap B. 具有最小容量的(x,y)截边集称为 N 中的**最小截(minimum cut-set)**.

例如,在图 4.1(a)所示的容量网络 $N=(D_{xy},c)$中,粗边所示的是一个(x,y)截边集 B,其容量 cap $B=8$.

我们将在 4.4 节介绍一个求最大流和最小截的有效算法. 我们先证明关于最大流量和最小截容量之间关系的下列著名结果:

定理 4.1(最大流最小截定理,Ford & Fulkerson,1956) **在任何容量网络 N 中,最大流量等于最小截容量.**

证明 设 $N=(D_{xy},c)$是一个容量网络,f 是 N 中最大流而 $B=(S,\overline{S})$是 N 中的最小截. 由流和流量的定义,对任何 $u\in S$ 有

$$f^{+}(u)-f^{-}(u)=\begin{cases}\text{val} f, & 若\ u=x,\\ 0, & 若\ u\in S\setminus\{x\}.\end{cases}$$

于是

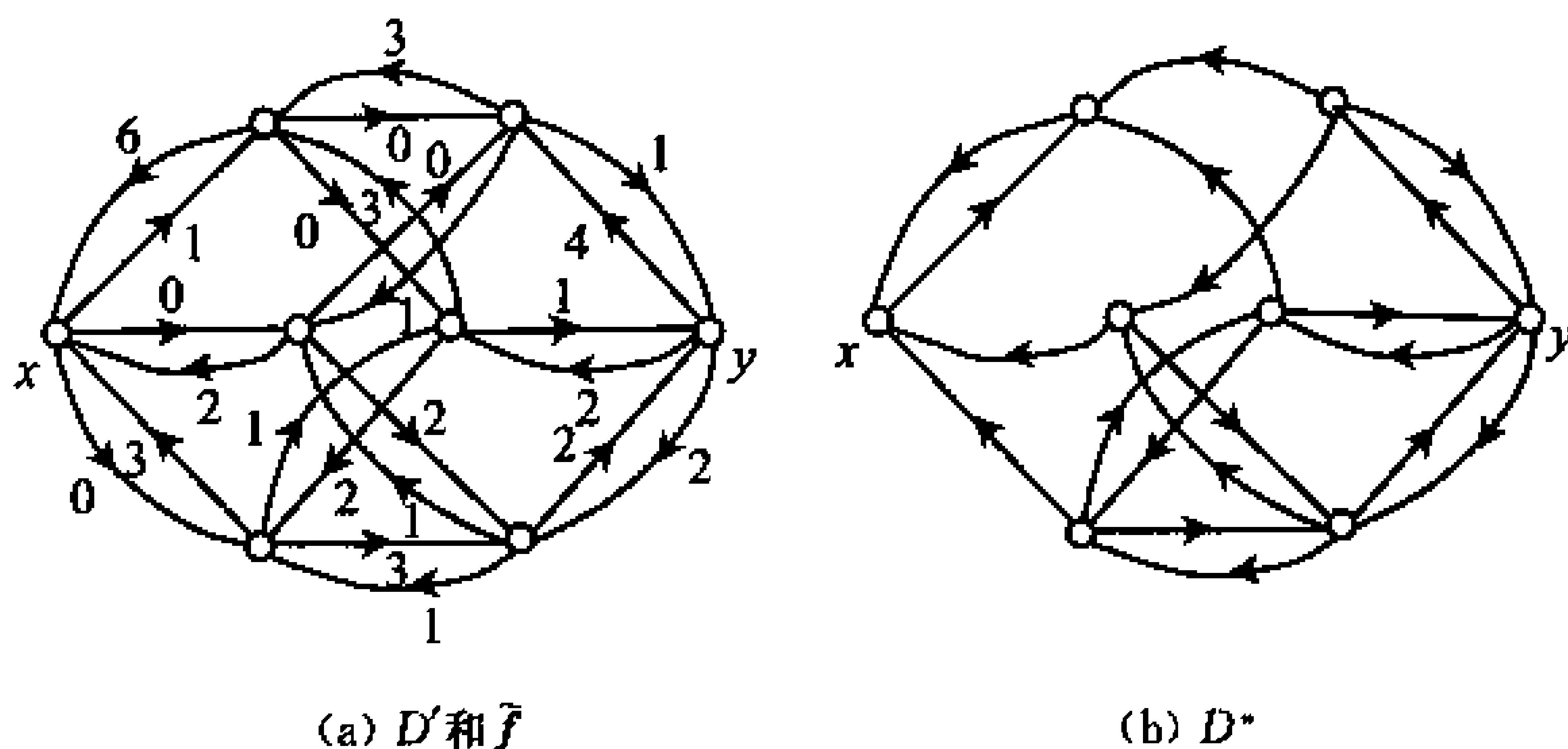
$$\begin{aligned}\text{val} f &= f^{+}(x)-f^{-}(x)=\sum_{u\in S}(f^{+}(u)-f^{-}(u))\\ &= f^{+}(S)-f^{-}(S)\leqslant f^{+}(S)\leqslant c^{+}(S)=\text{cap} B.\end{aligned}$$

下面只需证明 val $f\geqslant$cap B.

为此，我们用 D'表示在 D 中每条边 a 的两端点之间添加一条与 a 方向相反的新边 a'后得到的图. a 称为老边，a'称为新边。定义 $\tilde{f}\in\mathscr{E}(D')$如下：

$$\tilde{f}(a)=\begin{cases}c(a)-f(a), & 若\ a\in E(D')\ 是老边;\\ f(a), & 若\ a\in E(D')\ 是新边.\end{cases}$$

例如，图 4.2 (a)所示的网络就是图 4.1 中网络按上述方法得到的图 D'，其中有向曲边表示新添加的边 a'. 边 a 上的数值为 $\tilde{f}$ 在 a 上的值$\tilde{f}(a)$.



(a) D'和$\tilde{f}$　　(b) D^*

图 4.2

令 $D^*=D'_{\tilde{f}}$，即$\tilde{f}$在 D'中的支撑图(其定义见 2.3 节). 例如，见图 4.2，(b)中所示的图就是(a)中图 D'的$\tilde{f}$ 的支撑图 D^*. 我们断定 D^* 中不存在从 x 到 y 的有向路.

若不然，设 P 是 D^* 中从 x 到 y 的有向路. 令

$$\sigma=\min\{\tilde{f}(a):a\in E(P)\},$$

则 $\sigma>0$. 定义 $f'\in\mathscr{E}(D)$如下：

$$f'(a)=\begin{cases}f(a)+\sigma, & 若\ a\in E(P)\ 是老边;\\ f(a)-\sigma, & 若\ a'\in E(P)\ 是新边;\\ f(a), & 其他.\end{cases}$$

于是 f'是 N 中(x,y)流，并且 val f'=val $f+\sigma>$val f(习题 4.1.3). 矛盾于 f 的最大性. 所以 D^* 中不含从 x 到 y 的有向路. 令

$$S'=\{u\in V(D^*):D^*\ 中存在从\ x\ 到\ u\ 的有向路\},$$

则 $x\in S'$，$y\notin S'$. 于是 $B'=(S',\overline{S'})$ 是 D 中 (x,y) 截边集，而且在 D' 中（习题 4.1.3）有

$$\tilde{f}(a)=\begin{cases}0, & a\in(S',\overline{S'});\\ c(a), & a\in(\overline{S'},S').\end{cases} \tag{4.3}$$

于是，在 D 中即有

$$f(a)=\begin{cases}c(a), & a\in(S',\overline{S'});\\ 0, & a\in(\overline{S'},S').\end{cases}$$

因此，对于 D 中 (x,y) 截边集 $B'=(S',\overline{S'})$ 有

$$\begin{aligned}\text{val}\, f &= f^{+}(S')-f^{-}(S')\\ &= f^{+}(S')=\text{cap}\, B'\geqslant \text{cap}\, B.\end{aligned}$$ □

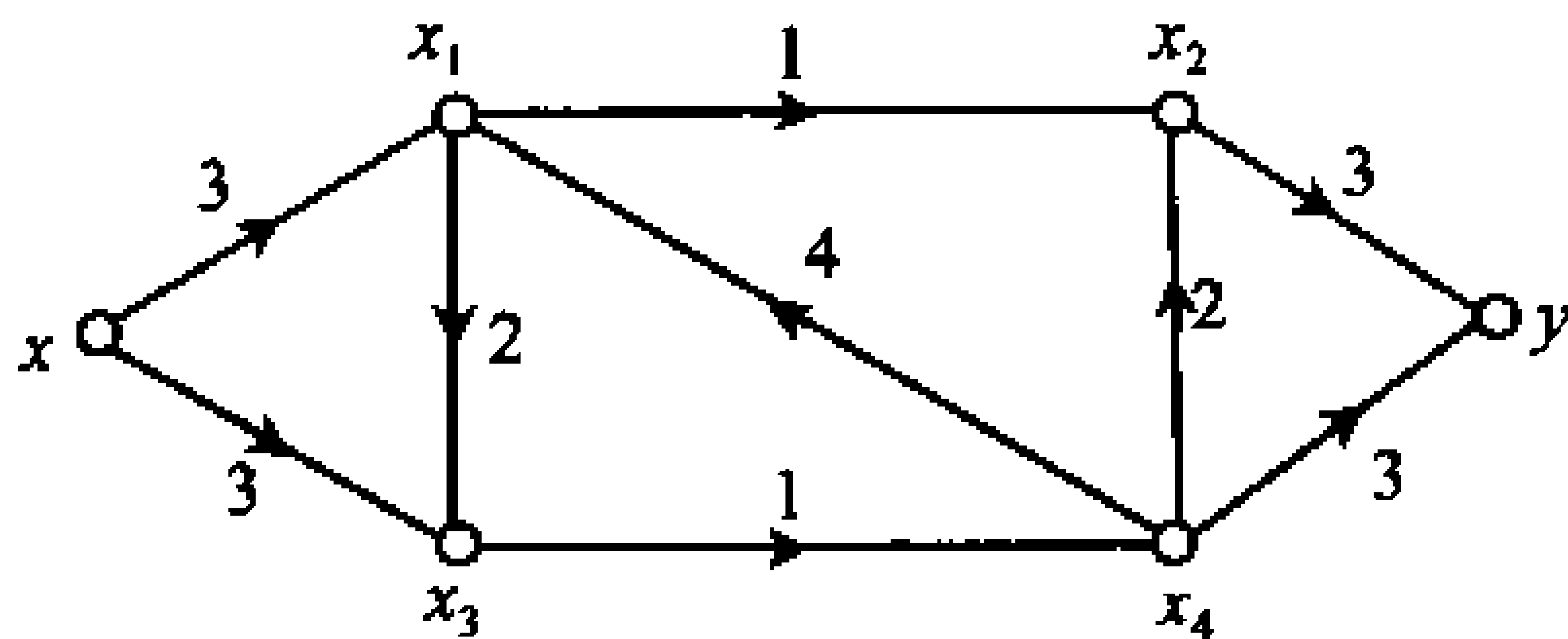
推论 4.1（整数最大流最小截定理） **任何整容量网络中都存在整数最大流而且其流量等于最小截容量.**

证明留给读者作为习题（习题 4.1.3）.

最大流最小截定理是网络流分析方法的基础. 以后，我们将看到，通过这个定理不仅可以求出网络中的最大流和最小截，而且可以导出图论中许多著名的定理.

习　题

4.1.1 求出下列整容量网络中所有 (x,y) 截边集和一个流量为 2 的 (x,y) 流 f，并证明它是最大流.



（习题 4.1.1）

4.1.2 (a) 证明：对于 N 中任何 (x,y) 流 f 和 $\varnothing\neq S\subset V(D)$ 均有

$$\sum_{u\in S}(f^{+}(u)-f^{-}(u))=f^{+}(S)-f^{-}(S).$$

(b) 举例说明

$$\sum_{u\in S}f^{+}(u)\neq f^{+}(S),\qquad \sum_{u\in S}f^{-}(u)\neq f^{-}(S).$$

4.1.3 证明：

(a) 在定理 4.1 的证明中的断言："f' 是 N 中 (x,y) 流，并且 $\text{val}\, f'=\text{val}\, f+\sigma$"；

(b) (4.3)式； (c)推论 4.1.

4.1.4　设 f 是 N 中 (x,y) 流，$B=(S,\bar{S})$ 是 D 中 (x,y) 截边集. 证明：

(a) $\mathrm{val}\,f=f^{+}(S)-f^{-}(S)$；　(b) $\mathrm{val}\,f\leqslant \mathrm{cap}\,B$；

(c) $\mathrm{val}\,f=\mathrm{cap}\,B \Leftrightarrow$

$$f(a)=\begin{cases} c(a), & a\in(S,\bar{S});\\ 0, & a\in(\bar{S},S)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow f$ 是最大流而 B 是最小截.

4.1.5　设 $(S,\bar{S})$ 和 $(T,\bar{T})$ 都是 N 的最小截. 证明：

$(S\cup T,\overline{S\cup T})$ 和 $(S\cap T,\overline{S\cap T})$ 都是 N 的最小截.

4.1.6　(**多发点和多收点容量网络**)设 $N=(D,c)$ 是发点集为 X 和收点集为 Y 的容量网络. 令 $I(D)=V(D)\backslash(X\cup Y)$. $f\in\mathscr{E}(D)$ 称为 N 中 (X,Y) 流，如果

$$\begin{cases} 0\leqslant f(a)\leqslant c(a), & 若\ a\in E(D),\\ f^{+}(u)=f^{-}(u), & 若\ u\in I(D).\end{cases}$$

证明：(a) 对 N 中任何 (X,Y) 流 f 均有

$$f^{+}(X)-f^{-}(X)=f^{-}(Y)-f^{+}(Y).$$

称上式两边的值为 f 的流量.

(b) (X,Y) 流的最大流量等于 (X,Y) 截边集的最小截容量.

4.1.7　设 $N=(D,c)$ 是发点集 X 和收点集 Y 的容量网络，f 是 N 中 (X,Y) 流. 若

$$f^{+}(x)-f^{-}(x)\leqslant\sigma(x),\qquad \forall x\in X;$$

$$f^{-}(y)-f^{+}(y)\geqslant\partial(y),\qquad \forall y\in Y,$$

则称 f 是**可行流**(**feasible flow**)，非负整数 $\sigma(x)$ 和 $\partial(y)$ 分别称为 x 的供应量和 y 的接收量.

证明：N 中存在可行流 $f\Leftrightarrow$

$c(S,\bar{S})\geqslant\partial(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S})$，　$\forall S\subseteq V(D)$. (D. Gale, 1957)

4.2　Menger 定理

本节介绍图论中著名的 Menger 定理. 我们将用最大流最小截定理来导出它.

设 x 和 y 是图 D 中不同两顶点，$\mathscr{P}$ 是 D 中从 x 到 y 的有向路集. 若 $\mathscr{P}$ 中任何两条 P_i 和 P_j 均有 $V(P_i)\cap V(P_j)=\{x,y\}$，则称 $\mathscr{P}$ 是 D 中**内部点不交的**(**internally vertex-disjoint**) (x,y) 路集；若 $\mathscr{P}$ 中任何两条 P_i 和 P_j 均有 $E(P_i)\cap E(P_j)=\varnothing$，则称 $\mathscr{P}$ 是 D 中**边不交的**(**edge-disjoint**) (x,y) 路集. 我们用 $\zeta_D(x,y)$ 和 $\eta_D(x,y)$ 分别表示 D 中内部点不交和边不交的 (x,y) 路的最大条数.

在 4.1 节中，我们定义了 D 中 (x,y) 截边集. 具有最小边数的 (x,y) 截边集称为**最小 (x,y) 截边集**(**minimum cut edge-set**). 用 $\lambda_D(x,y)$ 表示最小 (x,y) 截边集中边数. 因为在 D 中分离 x 和 y，每条 (x,y) 路中至少要去掉一条边，所以我

们有

$$\eta_D(x,y) \leqslant \lambda_D(x,y). \tag{4.4}$$

事实上，式(4.4)中的等号是成立的，这就是著名的边形式的 Menger 定理.

定理 4.2(边形式 Menger 定理)　设 x 和 y 是 D 中不同两顶点，则

$$\eta_D(x,y) = \lambda_D(x,y).$$

证明　由(4.4)式，我们只需证明

$$\eta_D(x,y) \geqslant \lambda_D(x,y) \tag{4.5}$$

为此，定义 $c \in \mathscr{E}(D)$ 如下：

$$c(a) \equiv 1, \quad \forall a \in E(D).$$

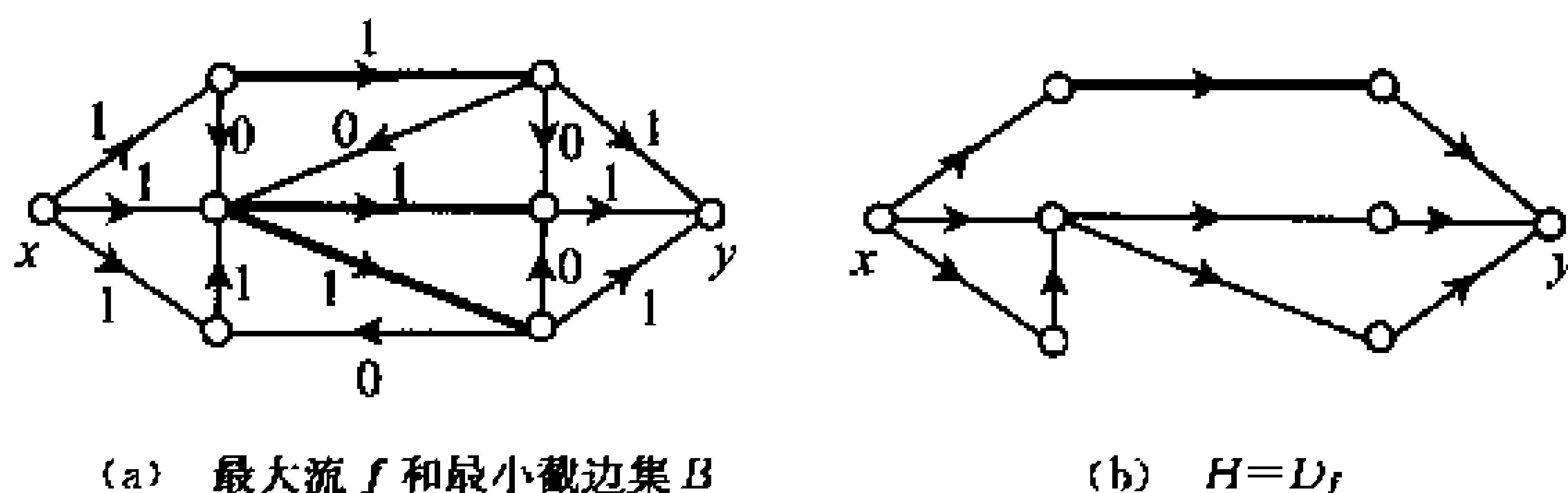
考虑单位容量网络 $N=(D_{xy},c)$. 由推论 4.1 知 N 中存在整数最大(x,y)流 f 和最小容量(x,y)截边集 $B=(S,\bar{S})$使得

$$\text{val } f = \text{cap } B \tag{4.6}$$

(参见图 4.3(a)，其中 B 为粗边所示). 为证明式(4.5)，由式(4.6)，下面只需证明

$$\eta_D(x,y) \geqslant \text{val } f, \tag{4.7}$$

$$\lambda_D(x,y) \leqslant \text{cap } B. \tag{4.8}$$



(a)　最大流 f 和最小截边集 B　　　(b)　$H=D_f$

图 4.3

令 $H=D_f$ ——f 的支撑图(定义见 2.3 节)(参见图 4.3(b)). 由于对任何 $a\in E(D)$均有 $c(a)=1$，所以对任何 $a\in E(H)$均有 $f(a)=1$. 因此可得

$$\begin{cases} d_H^+(x) - d_H^-(x) = \text{val } f = d_H^-(y) - d_H^+(y), \\ d_H^+(u) = d_H^-(u), \quad \forall u \in V(H)\setminus\{x,y\}. \end{cases}$$

所以由习题 1.7.3 知，H 中至少有 val f 条边不交的从 x 到 y 的有向路，即 val f $\leqslant \eta_D(x,y)$. 式(4.7)得证.

由于 $B=(S,\bar{S})$是(x,y)截边集，所以

$$\lambda_D(x,y) \leqslant |B| = \text{cap } B.$$

式(4.8)得证. □

推论 4.2.1　设 x 和 y 是无向图 G 中任意两顶点，则

$$\eta_G(x,y) = \lambda_G(x,y).$$

证明　考虑 G 的对称有向图 D(即用端点相同且方向相反的两条有向边替代 G 中每条边而得的有向图)，则 G 中 k 条边不交的连接 x 和 y 的路对应 D 中 k 条边不交的从 x 到 y 的有向路;反之亦然. 于是

$$\eta_G(x,y) = \eta_D(x,y).$$

另一方面，$E_G(S,\bar{S})$ 是 G 的 (x,y) 截边集，$x\in S, y\in \bar{S} \Leftrightarrow E_D(S,\bar{S})$ 是 D 的 (x,y) 截边集，而且

$$|E_G(S,\bar{S})| = |E_D(S,\bar{S})|.$$

注意到有　　$|E_D(S,\bar{S})| \geqslant \lambda_D(x,y)$,　$|E_G(S,\bar{S})| \geqslant \lambda_G(x,y)$.

于是，一方面，若 $E_G(S,\bar{S})$ 是 G 的最小 (x,y) 截边集，则由定理 4.2 有

$$\begin{aligned}\lambda_G(x,y) &= |E_G(S,\bar{S})| \geqslant \lambda_D(x,y)\\ &= \eta_D(x,y) = \eta_G(x,y).\end{aligned}$$

另一方面，若 $E_D(S,\bar{S})$ 是 D 的最小 (x,y) 截边集，则由定理 4.2 有

$$\begin{aligned}\eta_G(x,y) &= \eta_D(x,y) = \lambda_D(x,y)\\ &= |E_D(S,\bar{S})| \geqslant \lambda_G(x,y).\end{aligned}$$

推论成立. □

下述推论给出了 Euler 图与 Menger 定理之间的关系.

推论 4.2.2(Lovász, 1973)　D **是 Euler 图** $\Leftrightarrow D$ **连通，并且**

$$\eta_D(x,y) = \eta_D(y,x),\quad \forall x,y\in V(D).$$

证明　$(\Rightarrow)$ 设 x 和 y 是 Euler 图 D 中不同两顶点. 由定理 4.2 知，D 中存在 (x,y) 截边集 $(S,\bar{S})$ 使得

$$|(S,\bar{S})| = \eta_D(x,y),\qquad x\in S,\ y\in \bar{S}.$$

由于 D 是 Euler 图，所以由定理 1.5 知 D 是平衡有向图. 由例 1.4.1 知

$$|(\bar{S},S)| = |(S,\bar{S})|.$$

而 $(\bar{S},S)$ 是 (y,x) 截边集，所以

$$\eta_D(y,x) \leqslant |(\bar{S},S)| = \eta_D(x,y).$$

同理可证 $\eta_D(x,y) \leqslant \eta_D(y,x)$. 因而有

$$\eta_D(x,y) = \eta_D(y,x),\quad \forall x,y\in V(D).$$

$(\Leftarrow)$ 任取 $x\in V(D)$，由定理 1.5 只需证明

$$d_D^+(x) = d_D^-(x).$$

考虑 $N_D^+(x)$ 中顶点 y，则由定理 4.2 存在 $Y\subseteq V\backslash\{x\}$ 使 $y\in Y$ 且 $d_D^-(Y) = \eta_D(x,y)$. 我们称 Y 为以 y 为核心的正则集.

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是 k 个不同的且分别以 $y_1, y_2, \cdots, y_k \in N_D^+(x)$ 为核心的最大正则集，则 $y_i \notin Y_i \cap Y_j (i\neq j)$.

事实上，设 $y_i \in Y_i \cap Y_j (j \neq i)$. 则由正则集的定义，有

$$d_D^-(Y_i) = \eta_D(x, y_i), \quad d_D^-(Y_j) = \eta_D(x, y_j).$$

由于$(Y_i \cap Y_j, \overline{Y_i \cap Y_j})$是 D 中(x, y_i)截边集(参见习题4.1.5)，所以由定理 4.2，

$$d_D^-(Y_i \cap Y_j) \geqslant \lambda_D(x, y_i) = \eta_D(x, y_i).$$

于是(参见习题 1.3.6)，

$$\begin{aligned} d_D^-(Y_i \cup Y_j) + \eta_D(x, y_i) &\leqslant d_D^-(Y_i \cup Y_j) + d_D^-(Y_i \cap Y_j) \\ &\leqslant d_D^-(Y_i) + d_D^-(Y_j) \\ &= \eta_D(x, y_i) + \eta_D(x, y_j). \end{aligned}$$

即有
$$d_D^-(Y_i \cup Y_j) \leqslant \eta_D(x, y_j).$$

另一方面，$(Y_i \cup Y_j, \overline{Y_i \cup Y_j})$是 D 中(x, y_j)截边集(习题4.1.5). 所以由定理 4.2 有

$$d_D^-(Y_i \cup Y_j) \geqslant \lambda_D(x, y_j) = \eta_D(x, y_j).$$

因而有
$$d_D^-(Y_i \cup Y_j) = \eta_D(x, y_j),$$

即 $Y_i \cup Y_j$ 是以 y_j 为核心的正则集，且$|Y_i \cup Y_j| > |Y_j|$，矛盾于 Y_j 的最大性. 令

$$V_i = Y_i \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j.$$

由上述说明知 $y_i \in V_i (i = 1, 2, \cdots, k)$. 因此，由定理 4.2 知

$$d_D^+(V_i) \geqslant \lambda_D(y_i, x) = \eta_D(y_i, x) = \eta_D(x, y_i) = d_D^-(Y_i).$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_D^+(V_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} d^-(Y_i).$$

注意到被计算在上式左端中的边或者是进入 x 的边(设为 l 条)，或者是形如$(V_i, Y_j)(j \neq i)$的边，而且这些边仅计算一次. 另一方面，被计算在上式右端的边是进到 Y_j 的边至少被计算一次，而且离开 x 的每条边都被计算. 所以

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{i=1}^{k} d_D^+(V_i) - \sum_{i=1}^{k} d_D^-(Y_i) \\ &\leqslant l - d_D^+(x) \leqslant d_D^-(x) - d_D^+(x). \end{aligned}$$

即有 $d_D^+(x) \leqslant d_D^-(x)$.

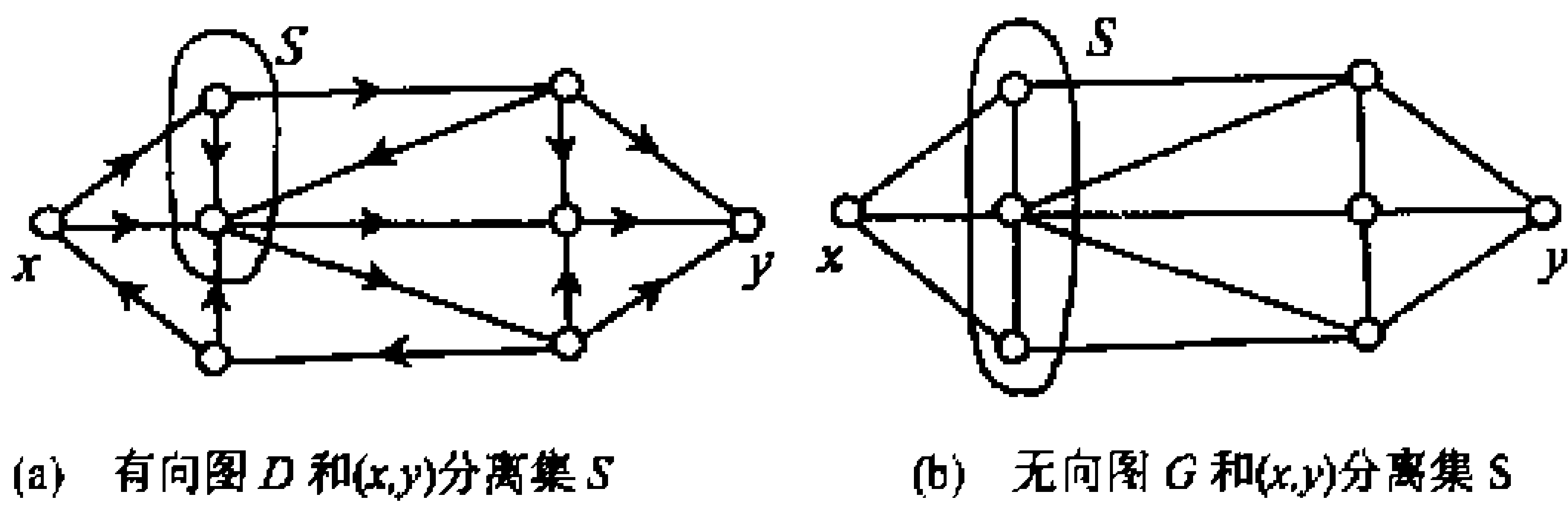
考虑 $N_D(x)$中的顶点，同理可证 $d_D^-(x) \leqslant d_D^+(x)$. □

下面讨论顶点形式的 Menger 定理.

设 D 是有向图，x, y 是 D 中不同两顶点. 若存在 $S \subseteq V(D) \setminus \{x, y\}$ 使 $D - S$ 中不存在从 x 到 y 的有向路，则称 S 为 D 中(x, y)**分离集(separating set)**. 具有最小顶点数目的(x, y)分离集称为**最小(x, y)分离集**. 用 $\kappa_D(x, y)$表示 D 中最小(x, y)分离集中的顶点数目.

图 4.4 所示的是有向图 D 和无向图 G 中一个(x, y)分离集 S. 注意，对于有向图 D，S 是(x, y)分离集，但不一定是(y, x)分离集；而对无向图 G，若 S 是(x, y)

分离集，则 S 必是 (y,x) 分离集.



(a)　有向图 D 和 (x,y) 分离集 S　　(b)　无向图 G 和 (x,y) 分离集 S

图 4.4

回顾在 1.3 节定义的记号，$E_D(x,y)$ 表示 D 中以 x 为起点并且以 y 为终点的有向边集. 若 $E_D(x,y)=\varnothing$（或 x 和 y 在 G 中不相邻），则 D（或 G）中 (x,y) 分离集一定存在.

回顾在本节开始时，我们用 $\zeta_D(x,y)$ 表示 D 中内部点不交的从 x 到 y 的有向路的最大条数. 因为在 D 中分离 x 和 y，每条 (x,y) 路中至少要去掉一个顶点，所以我们有

$$\zeta_D(x,y)\leqslant\kappa_D(x,y). \tag{4.9}$$

事实上，式(4.9)中等号是成立的，这就是下列著名的 Menger 定理. 我们将用定理 4.2 来导出它，其证明要用到顶点**分裂运算**.

设 $u\in V(D)$，分裂 u 为 u' 和 u'' 是指这样的一个运算：在 D 中用两个新顶点 u' 和 u'' 代替 u，添加新边 (u',u'')，并把 D 中以 u 为起点的边用以 u'' 为起点的新边来代替，而把 D 中以 u 为终点的边用以 u' 为终点的新边来代替. 图 4.5 说明了这种运算.

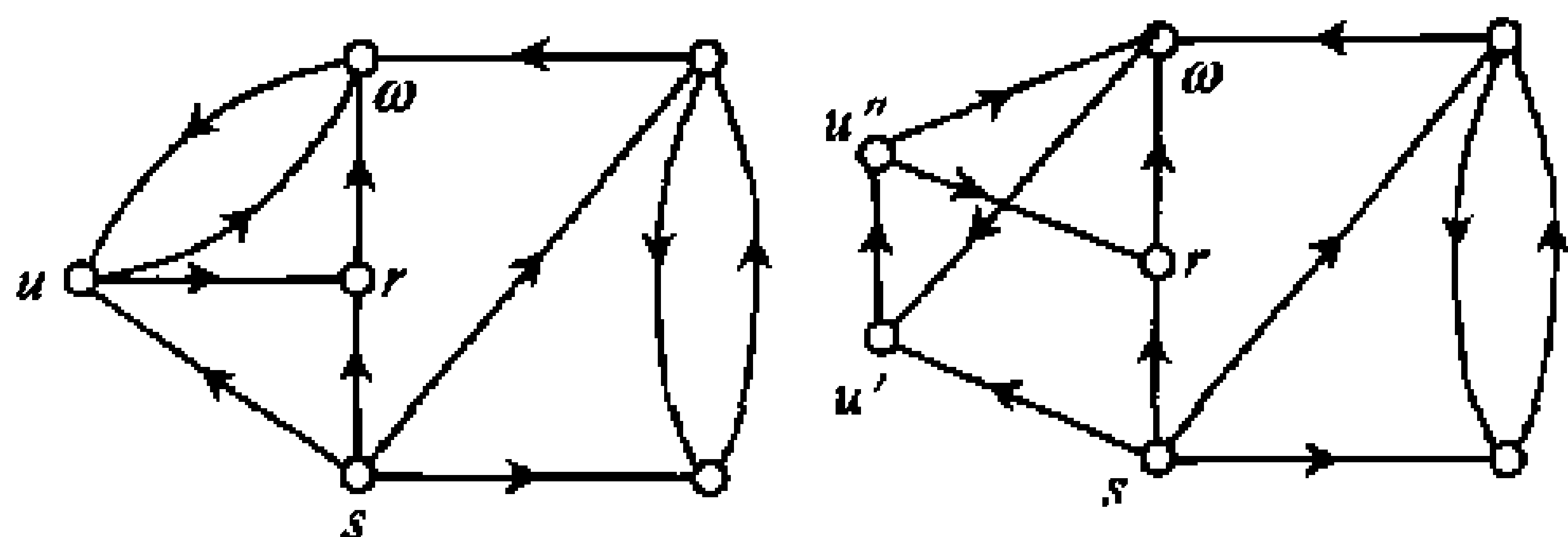


图 4.5　顶点 u 分裂运算

定理 4.3（Menger 定理，Menger，1927）　**设 x 和 y 是 D 中不同两顶点且** $E_D(x,y)=\varnothing$，**则**

$$\zeta_D(x,y)=\kappa_D(x,y).$$

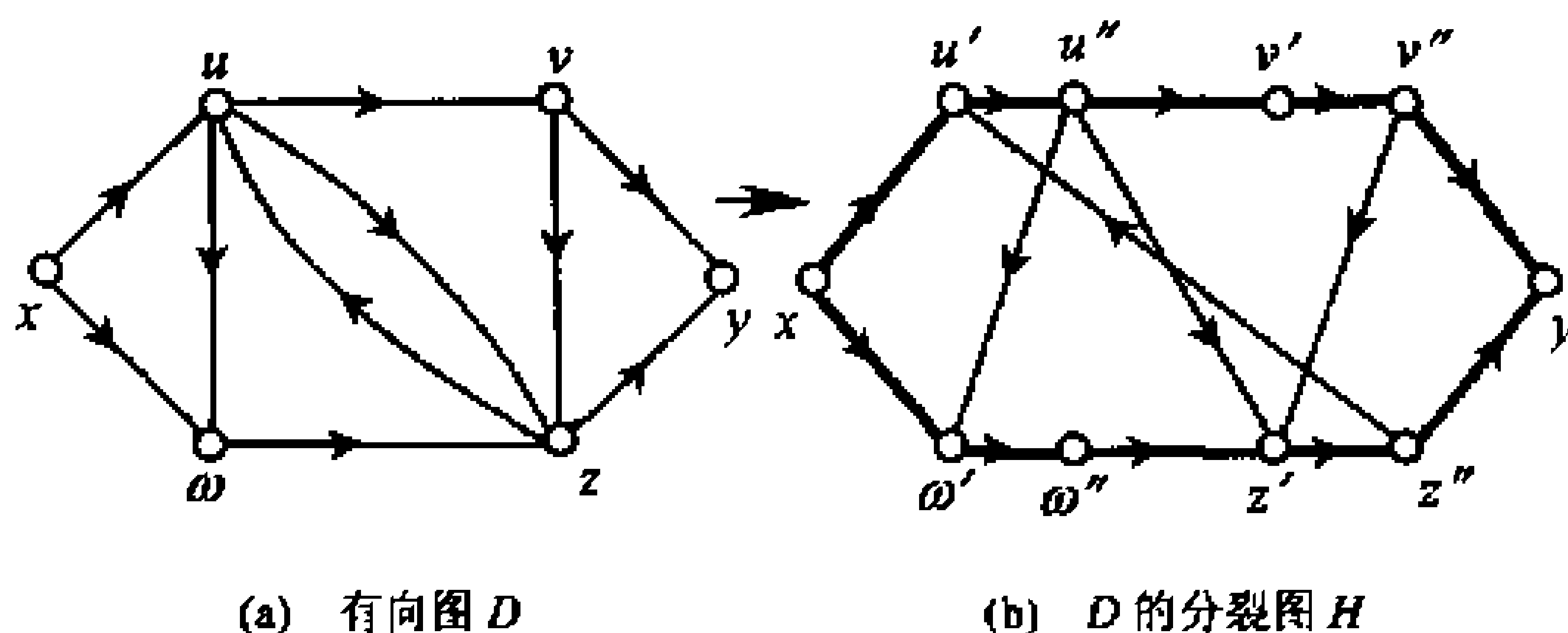
证明　由式(4.9)，我们只需证明

$$\zeta_D(x,y)\geqslant\kappa_D(x,y). \tag{4.10}$$

为此，令 D 中分裂每个 $u\in V(D)\setminus\{x,y\}$ 之后所得到的图为 H（参见图 4.6）.

由定理 4.2 有

$$\lambda_H(x,y) = \eta_H(x,y). \tag{4.11}$$



(a) 有向图 D　　(b) D 的分裂图 H

图 4.6

为证明式(4.10),由式(4.11)我们只需证明

$$\zeta_D(x,y) \geqslant \eta_H(x,y), \tag{4.12}$$

$$\kappa_D(x,y) \leqslant \lambda_H(x,y). \tag{4.13}$$

由于 H 中每条从 x 到 y 的有向路都对应着收缩所有形如(u',u'')的边之后得到 D 中一条从 x 到 y 的有向路;而且如果 H 中两条有向路边不交,那么 D 中与之对应的有向路内部点不交(参见图 4.6(b)粗边所示的路). 所以 $\zeta_D(x,y) \geqslant \eta_H(x,y)$,因而式(4.12)成立.

设 B'是 H 中最小(x,y)截边集,于是

$$|B'| = \lambda_H(x,y),$$

并且 $V(H)$存在划分$\{V',V''\}$使 $E_H(V',V'')=B'$且 $x\in V'$,$y\in V''$. 令 B'中边的起点集为 S',则

$$|S'| \leqslant |B'|,$$

而且 $H-S'$中不存在从 x 到 y 的有向路. 令 S''为 D 中与 S'对应的顶点集,则

$$|S''| \leqslant |S'|,$$

而且在 $D-S''$中不存在从 x 到 y 的有向路. 因此

$$\kappa_D(x,y) \leqslant |S''| \leqslant |S'| \leqslant |B'| = \lambda_H(x,y).$$

式(4.13)得证. □

推论 4.3 设 x 和 y 是 G 中不相邻两顶点,则

$$\zeta_G(x,y) = \kappa_G(x,y).$$

证明留给读者作为习题(习题 4.2.1).

在本节中,我们利用最大流最小截定理导出了 Menger 定理. 然而 Menger 定理的发现是独立的. 为了保留其独立性,我们给出它的直接证明,初学者可以不读.

定理 4.3 的直接证明(McCuaig,1984)　由于 $E_D(x,y)=\varnothing$,所以(x,y)分

离集存在. 又由于显然成立

$$\zeta_D(x,y) \leqslant \kappa_D(x,y),$$

所以只需证明 $$\kappa_D(x,y) \leqslant \zeta_D(x,y).$$

对 $\kappa_D(x,y)=n$ 用归纳法.

当 $n=0,1$ 时,显然有 $\zeta_D(x,y) \geqslant \kappa_D(x,y)$. 设 $\kappa_D(x,y)=n+1(n\geqslant 1)$. 由归纳假设,$D$ 中存在 n 条内部点不交的从 x 到 y 的有向路 $P_1,P_2,\cdots,P_n$. 由于 $d_D^+(x)\geqslant n+1$(若不然 $N_D^+(x)$ 是 D 中 (x,y) 分离集且 $|N_D^+(x)|\leqslant n<\kappa_D(x,y)$,这不可能),所以 D 中存在从 x 到 y 的有向路 P,它的第一条边不在任何 $P_i(i\leqslant i\leqslant n)$ 上. 令 u 是 P 与某个 $P_{i_0}(1\leqslant i_0\leqslant n)$ 第一个内部公共点,并令 P 上的 (x,u) 段 $P(x,u)=P_{n+1}$. 我们这样选取 $P_1,P_2,\cdots,P_n,P_{n+1}$ 和 u 使得 $d_{D-x}(u,y)$ 尽可能地小.

如果 $u=y$,则 $P_1,P_2,\cdots,P_n,P_{n+1}$ 是 D 中 $(n+1)$ 条内部点不交的从 x 到 y 的路,故

$$\zeta_D(x,y) \geqslant n+1 = \kappa_D(x,y).$$

下设 $u\neq y$.

由归纳假设,$D-u$ 中存在 n 条内部点不交的从 x 到 y 的有向路 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$. 我们这样选取 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 使其所用

$$B = E(D)\setminus(E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_{n+1}))$$

中边尽可能地少. 令

$$H = D[Q_1\cup Q_2\cup\cdots\cup Q_n\cup\{u\}].$$

选取某个 $P_{k_0}(1\leqslant k_0\leqslant n+1)$ 使它的第一条边不在 $E(H)$ 中. 令 w 是 P_{k_0} 与 $V(H)$ 的第一个内部公共点. 如果 $w=y$,则 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 和 P_{k_0} 是 D 中 $n+1$ 条内部点不交的从 x 到 y 的有向路. 故

$$\zeta_D(x,y) \geqslant n+1 = \kappa_D(x,y).$$

下面要证 $w=y$,用反证法.

设 $w=u$. 若 $w\neq y$,则令 R 是 $D-x$ 中的一条最短的从 u 到 y 的有向路,并令 z 是 R 与某个 $Q_{j_0}(1\leqslant j_0\leqslant n)$ 的第一个内部公共点. 由于 u 不在任何 Q_i 上,所以 z 是 R 的内部点,即

$$d_{D-x}(z,y) < d_{D-x}(u,y).$$

用 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 分别替代 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,用 $P_{k_0}(x,u)\cup R(u,z)$ 替代 P_{n+1},用 z 替代 u,则得到矛盾于 $P_1,P_2,\cdots,P_n,P_{n+1}$ 和 u 选取.

设 $w\neq u$,则 w 必属于某个 $Q_{i_0}(1\leqslant i_0\leqslant n)$,而且在 Q_{i_0} 的 (x,w) 段 $Q_{i_0}(x,w)$ 中有一条边在 B 中,否则 $\{P_1,P_2,\cdots,P_{n+1}\}$ 中有两条相交于 w. 于是用 $P_{k_0}(x,w)$ 代替 $Q_{i_0}(x,w)$ 得到 $D-u$ 中 n 条内部点不交的从 x 到 y 的有向路,这 n 条路

用到 B 的边数小于 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 所用 B 的边数. 矛盾于对 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 的选取. 定理得证. □

下面给出定理 4.2 的直接证明，先证下列引理.

引理 设 x 和 y 是 D 中不同两顶点. 若 $\lambda_D(x,y)\geqslant 1$，则 D 中存在最短(x,y)路 P 使得$\lambda_{D_P}(x,y)\geqslant\lambda_D(x,y)-1$，其中 $D_P=D-E(P)$.

证明 因为 $\lambda_D(x,y)\geqslant 1$，所以 D 中存在从 x 到 y 的有向路，即 $d_D(x,y)<+\infty$. 对 $d_D(x,y)=n\geqslant 1$ 用归纳法.

当 $d_D(x,y)=1$，则 $E_D(x,y)\neq\varnothing$. 任取 $a\in E_D(x,y)$，并令 $P=xay$. 则 a 必属于 D 的任何一个(x,y)截边集. 于是$\lambda_{D_P}(x,y)=\lambda_D(x,y)-1$，结论成立. 假设对任何图 H 和 H 中任何不相同两点 x 和 y，只要 $d_H(x,y)\leqslant n$，引理就成立. 设 x 和 y 是 D 中不同两顶点且 $d_D(x,y)=n+1\geqslant 2$，并设 P' 是 D 中长为$(n+1)$的从 x 到 y 的有向路. 取 $a\in E(P')$ 和 $x'\in N_D^+(x)$使 $\psi_D(a)=(x,x')$，并令 H 为 D 中边 a 收缩图 $D\cdot a$（边收缩图的定义见习题 1.4.7），则 $d_H(x,y)=n$. 由归纳假设 H 中存在一条最短(x,y)路 P''使得

$$\lambda_{H_{P''}}(x,y)\geqslant\lambda_H(x,y)-1.$$

设 $P''=xa_1x_1a_2\cdots a_{n-1}x_{n-1}a_ny$. 于是 $P=xax'a_1x_1a_2\cdots a_{n-1}x_na_ny$ 是 D 中长为$(n+1)$的从 x 到 y 的有向路. 下证 P 是即为所求的从 x 到 y 的有向路.

设$\lambda_{D_P}(x,y)=m$，并设 $B\subseteq E(D)$是 D_P 中的最小(x,y)截边集. 若 B 也是 $H_{P''}$中的(x,y)截边集，则

$$\begin{aligned}\lambda_{D_P}(x,y)&=m\\&\geqslant\lambda_{H_{P''}}(x,y)\geqslant\lambda_H(x,y)-1\\&\geqslant\lambda_D(x,y)-1.\end{aligned}$$

若 B 不是 $H_{P''}$中(x,y)截边集，则 $D-B$ 中每条从 x 到 y 的有向路必含 a. 所以 $B\cup\{a\}$是 D 中(x,y)截边集. 于是

$$\lambda_{D_P}(x,y)+1=|B\cup\{a\}|\geqslant\lambda_D(x,y).$$

由归纳法原理，引理得证. □

定理 4.2 的直接证明 只需证明 $\eta_D(x,y)\geqslant\lambda_D(x,y)$.

若 $\lambda_D(x,y)=0$，即 D 中不含从 x 到 y 的有向路，因而 $\eta_D(x,y)=0=\lambda_D(x,y)$. 下设 $\lambda_D(x,y)=m\geqslant 1$.

由引理知 D 中存在最短的从 x 到 y 的有向路 P_1 使$\lambda_{D_{P_1}}(x,y)\geqslant m-1$. 若 $\lambda_{D_{P_1}}(x,y)\geqslant 1$，则由引理知 D_{P_1} 中存在最短的从 x 到 y 的有向路 P_2 使$\lambda_{D_{P_1P_2}}(x,y)\geqslant\lambda_{D_{P_1}}(x,y)-1\geqslant m-2$.

一般地，若 $\lambda_{D_{P_1P_2\cdots P_{l-1}}}(x,y)\geqslant 1$，则在 $D_{P_1P_2\cdots P_{l-1}}$ 中存在最短的(x,y)路 P_l

使 $\lambda_{D_{P_1P_2\cdots P_{l-1}P_l}}(x,y)\geqslant m-l$. 令 $l=m$，则 $\lambda_{D_{P_1P_2\cdots P_m}}(x,y)\geqslant 0$，且 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 边不交，即 $\eta_D(x,y)\geqslant\lambda_D(x,y)$. □

定理 4.2 与定理 4.3 的等价性证明　在正文中，我们已从定理 4.2 导出定理 4.3. 以下我们只需从定理 4.3 导出定理 4.2，线图(线图定义在 1.4 节)在其中起了桥梁作用.

我们只需证明式(4.5). 设 x 和 y 是 D 中两个不同顶点. 令 D 中分裂 x 和 y 后得到的图为 D'，$a=(x',x'')$，$b=(y',y'')\in E(D')$，H 是 D' 的线图 $L(D')$. 于是由定理 4.3 有 $\zeta_H(a,b)=\kappa_H(a,b)$. 因此，为证明式(4.5)，我们只需证明

$$\eta_D(x,y)\geqslant\zeta_H(a,b),\quad \kappa_H(a,b)\geqslant\lambda_D(x,y).$$

因为 H 中每条从 a 到 b 的有向路对应 D 中一条从 x 到 y 的有向路，而且如果 H 中两条从 a 到 b 的有向路内部点不交，那么 D 中与之对应的两条从 x 到 y 的有向路边不交，所以 $\eta_D(x,y)\geqslant\zeta_H(a,b)$.

另一方面，H 中每个 (a,b) 分离集对应 D 中一个 (x,y) 截边集，因而有 $\lambda_D(x,y)\leqslant\kappa_H(a,b)$. □

定理 4.2 与推论 4.1 的等价性证明　在正文中，我们已从推论 4.1 导出定理 4.2. 以下只需从定理 4.2 导出推论 4.1.

设 $N=(D_{xy},\boldsymbol{c})$ 是发点 x 和收点 y 的整容量网络，$\boldsymbol{f}$ 是 N 中整数最大流且 $B=(S,\bar{S})$ 是最小截边集. 对任何 $a\in E(D_f)$ 用 $\boldsymbol{c}(a)(\geqslant 1)$ 条平行于 a 的边来代替 D 中的边 a. 令这样得到的新图为 D'. 容易看出 D' 是 val $\boldsymbol{f}$ 条边不交的从 x 到 y 的有向路之并. 于是

$$\mathrm{val}\,\boldsymbol{f}=\eta_{D'}(x,y). \tag{4.1$'$}$$

另一方面，由于 $\boldsymbol{f}$ 是最大流而 $B=E_D^+(S)$ 是最小截边集，所以(习题 4.1.4)对任何 $a\in B$，$\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{c}(a)>0$. 因此 D' 中与 $a\in B$ 对应的 $\boldsymbol{c}(a)$ 条边全在 $E_{D'}^+(S)$ 中. 反之，$E_{D'}^+(S)$ 中边是平行于某条边 $a\in B$. 因此 $E_{D'}^+(S)$ 是 D' 中最小 (x,y) 截边集，且

$$\lambda_{D'}(x,y)=|E_{D'}^+(S)|=\mathrm{cap}B. \tag{4.2$'$}$$

由定理 4.2 以及(4.1′)和(4.2′)式得

$$\mathrm{val}\,\boldsymbol{f}=\eta_{D'}(x,y)=\lambda_{D'}(x,y)=\mathrm{cap}B.$$ □

习　题

4.2.1　(Menger 定理)设 G 是无向图，x 和 y 是 G 中不同两顶点. 证明：

(a) $\eta_G(x,y)=\lambda_G(x,y)$；

(b) 若 x 和 y 在 G 中不相邻，则 $\zeta_G(x,y)=\kappa_G(x,y)$.

4.2.2　(a) 举例说明下述论述不真：

(i) 若 D 中任何 (x,y) 路和 (y,x) 路都有公共边，则存在 $a\in E(D)$ 使每条 (x,y) 路

和(y,x)路都含a；

(ii) 若D中有$k(\geq 1)$条边不交的(x,y)路，则D中存在k条边不交的(y,x)路；

(iii) 若$\eta_D(x,y)\geq k(\geq 1)$且$\eta_D(y,x)\geq k$，则$D$中存在$2k$条边不交的有向路$P_1$，$P_2,\cdots,P_k,Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$使$P_i$为$(x,y)$路且$Q_i$为$(y,x)$路$(i=1,2,\cdots,k)$.

(b) 证明：若连通图D中异于x和y的顶点都是平衡点且$d_D^+(x)-d_D^-(y)=k$，则D中有k条边不交(x,y)路.

(c) 证明：若D是平衡图，则(a)中三个论述都成立.

4.2.3 设G是直径为2的简单无向图，$x,y\in V(G)$. 证明：G中至少存在$\min\{d_G(x),d_G(y)\}$条边不交xy路，并且每条路的长度不超过4.

4.2.4 证明：

(a) 设G是2部划分为$\{X,Y\}$的k正则2部分无向图，则对任何$x\in X$，存在$y\in Y$使G中存在k条边不交xy路（Y. O. Hamidoune & M. Las Vergnas, 1988）；

(b) 设D是2部划分为$\{X,Y\}$的k正则2部分有向图，则对任何$x\in X$，存在$y\in Y$使D中存在$2k$条边不交有向路$P_1,P_2,\cdots,P_k,Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$，其中$P_i$为$(x,y)$路，而$Q_i$为$(y,x)$路，$i=1,2,\cdots,k$.

4.3 连 通 度

我们在4.2节中定义了两个参数$\kappa_D(x,y)$和$\lambda_D(x,y)$，它们分别称为**局部点连通度**(**local vertex-connectivity**)和**局部边连通度**(**local edge-connectivity**). 本节我们讨论图的**整体连通度**(**total connectivity**).

设D是强连通图，非空集$S\subset V(D)$. 若$D-S$是非强连通的，则称S为D的**分离集**(**separating set**). 显然，若D中不含支撑子图K_ν^*，则D必有分离集. 这是因为，若D中不含支撑子图K_ν^*，则D的直径$d(D)\geq 2$. 令$x,y\in V(D)$使$d_D(x,y)=d(D)$，于是$V(D)\backslash\{x,y\}$就是D的一个分离集. 定义

$$\kappa(D)=\begin{cases}0, & \text{若 } D \text{ 非强连通；}\\ \nu-1, & \text{若 } D \text{ 含支撑子图 } K_\nu^*\text{；}\\ \min\{|S|: S \text{ 是 } D \text{ 的分离集}\}, & \text{其他情形}\end{cases}$$

为D的**强连通度**(**strong connectivity**). 若$\kappa(D)\geq k$，则称D为**强k连通图**. 例如，完全有向图K_ν^*是强$(\nu-1)$连通图，有向圈是强1连通图. 点数为$\kappa=\kappa(D)$的分离集称为**κ分离集**. 不难看出，当D不含K_ν^*时，

$$\kappa(D)=\min\{\kappa_D(x,y): \forall x,y\in V(D) \text{ 且 } E_D(x,y)=\varnothing\}.$$

设D是强连通图，非空集$B\subseteq E(D)$. 若$D-B$是非强连通的，则称B为**截边集**(**cut edge-set**). 显然，非平凡强连通图必含截边集. 回顾在2.2节中我们定义了割边集. 对于强连通图，割边集必含截边集，但截边集不一定是割边集. 而对于连通的无向图G，这两个概念是一致的. 定义

$$\lambda(D)=\begin{cases}0, & \text{若 } D \text{ 的阶是 1 或者非强连通的;}\\ \min\{|B|: B\text{ 是 } D \text{ 的截边集}\}, & \text{其他情形}\end{cases}$$

为 D 的**强边连通度**(**strong edge-connectivity**). 若 $\lambda(D)\geqslant k$,则称 D 为**强 k 边连通图**. 例如,完全有向图 K_ν^* 是强($\nu-1$)边连通图,有向圈是强 1 边连通图. 边数为 $\lambda=\lambda(D)$ 的截边集称为 **λ 截边集**. 不难看出

$$\lambda(D)=\min\{\lambda_D(x,y):\ \forall x,y\in V(D)\}.$$

类似地可以定义无向图的连通度和边连通度. 对于 n 阶完全图 K_n,有 $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$;对于 $n(\geqslant 3)$ 阶圈 C_n,有 $\kappa(C_n)=\lambda(C_n)=2$;对于任何其阶 $\nu\geqslant 2$ 的树 T 均有 $\kappa(T)=\lambda(T)=1$.

设 G 是无向图,D 是 G 的对称有向图. 容易看出:S 是 G 的分离集$\Leftrightarrow S$ 是 D 的分离集;$B=(S,\overline{S})$ 是 G 的截边集$\Leftrightarrow(S,\overline{S})$ 是 D 的截边集. 因此

$$\kappa(G)=\kappa(D),\qquad \lambda(G)=\lambda(D).$$

本节只讨论有向图,所述有关 κ 和 λ 的结果,对无向图自然成立,不再一一赘述.

$\kappa(D)$、$\lambda(D)$ 与 $\delta(D)$ 之间有下列关系,其中

$$\delta(D)=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}.$$

它的无向图形式由 Whitney(1932)首次发现,故在文献中通常称为 Whitney 不等式.

定理 4.4 $\kappa(D)\leqslant\lambda(D)\leqslant\delta(D)$.

证明 不妨假设 D 是无环有向图. 若 D 是平凡图,则

$$\kappa(D)=\lambda(D)=0\leqslant\delta(D).$$

以下假定 D 是非平凡图,并不妨设 $x\in V(D)$ 使 $d_D^-(x)=\delta(D)$. 由于 $E_D^+(x)$ 是 D 的截边集,所以

$$\lambda(D)\leqslant\delta(D).$$

以下对强边连通度 $\lambda\geqslant 0$ 用归纳法来证明

$$\kappa(D)\leqslant\lambda(D)$$

对任何非平凡图 D 成立. 当 $\lambda(D)=0$ 时,D 为非强连通图,所以有 $\kappa(D)=0=\lambda(D)$.

假定 $\kappa(H)\leqslant\lambda(H)$ 对任何强边连通度 $\lambda(H)<k$ 的图 H 都成立,并设 $\lambda(D)=k\geqslant 1$. 于是存在截边集 B 使 $|B|=\lambda(D)=k$. 令 $a\in B$,$H=D-a$,则 $\lambda(H)=k-1\geqslant 0$. 由归纳假设

$$\kappa(H)\leqslant\lambda(H)=k-1.$$

若 H 含支撑子图 K_ν^*,则 $K_\nu^*\subset D$,因此

$$\kappa(D)=\nu-1=\kappa(H)\leqslant\lambda(H)$$

$$= k-1 = \lambda(D)-1 < \lambda(D).$$

若 H 不含 K_ν^*，则 H 中存在分离集 S 使 $|S|=\kappa(H)$. 若 $D-S$ 非强连通，则

$$\kappa(D) \leqslant |S| = \kappa(H) \leqslant \lambda(H) < \lambda(D).$$

若 $D-S$ 是强连通的，并且 $\nu(D-S)=2$，则

$$\kappa(D) \leqslant \nu-1 = \nu(D-S)+|S|-1 = |S|+1$$
$$= \kappa(H)+1 \leqslant \lambda(H)+1 = \lambda(D).$$

下设 $D-S$ 是强连通的，并且 $\nu(D-S)>2$. 设 $\psi_D(a)=(x,y)$，则 $S\cup\{x\}$ 或 $S\cup\{y\}$ 是 D 的分离集. 于是

$$\kappa(D) \leqslant |S|+1 = \kappa(H)+1$$
$$\leqslant \lambda(H)+1 = k = \lambda(D).$$

由归纳法原理，定理得证. □

推论 4.4.1 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$.

推论 4.4.2 对任何简单平面图 G 均有 $\kappa(G)\leqslant 5$.

图 4.7 所示的图 G 有 $\kappa(G)=2,\lambda(G)=3$ 和 $\delta(G)=4$. 事实上，对任何 3 个正整数 κ,λ 和 δ，$\kappa\leqslant\lambda\leqslant\delta$，均存在无向图 G 使 $\kappa(G)=\kappa,\lambda(G)=\lambda$ 且 $\delta(G)=\delta$（习题 4.3.17）. 注意，考虑 G 的对称有向图 D，即知也存在满足上述条件的有向图.

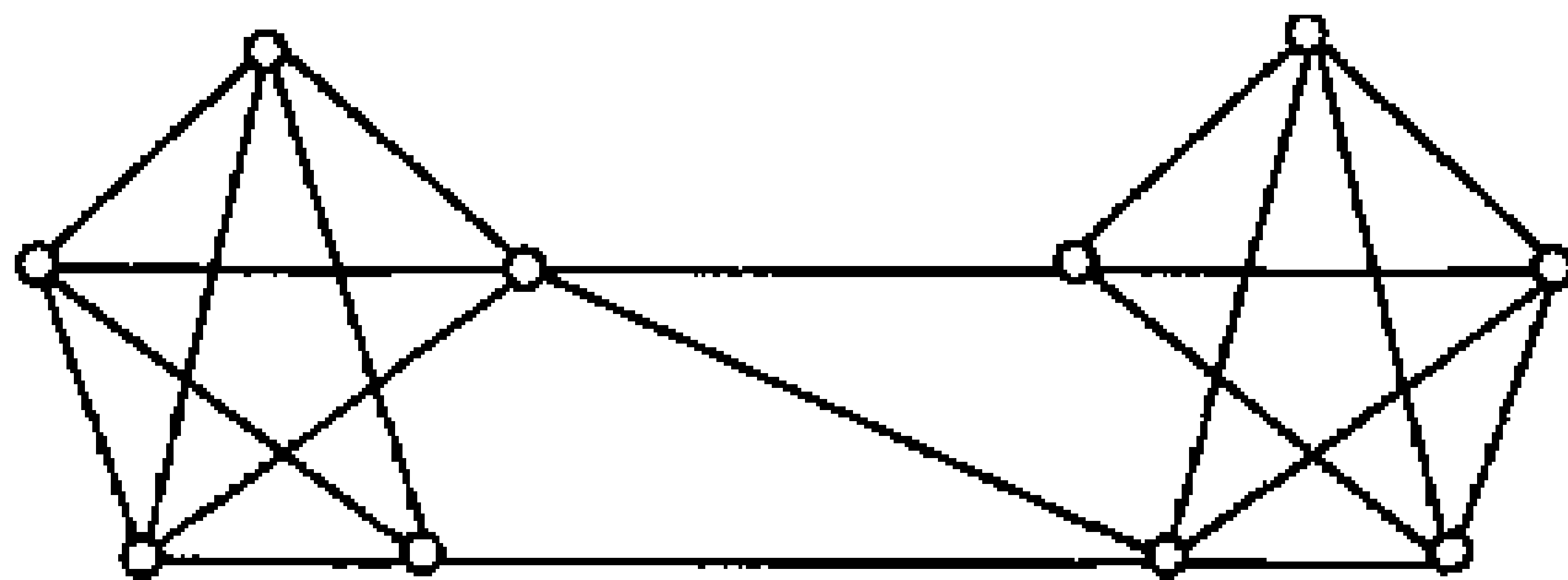


图 4.7

对于完全图 K_n，无向圈 $C_n(n\geqslant 3)$ 和树 T，有

$$\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \delta(K_n) = n-1,$$
$$\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2,$$
$$\kappa(T) = \lambda(T) = \delta(T) = 1.$$

对于一般的无向或有向图，寻找使 $\kappa=\delta$ 或使 $\lambda=\delta$ 成立的条件是很有意义的. 在下面例中，我们给出一个使 $\lambda=\delta$ 的充分条件(J. L. Jolivet(1972)，它的无向图形式由 J. Plesnik(1975)得到).

例 4.3.1 设 D 是强连通简单图，D 的直径 $d(D)\leqslant 2$，则

$$\lambda(D) = \delta(D).$$

证明 若 $d(D)=0$，则 D 是平凡图. 于是有 $\lambda(D)=0=\delta(D)$. 若 $d(D)=1$，则 $D\cong K_\nu^*$. 所以有 $\lambda(D)=\nu-1=\delta(D)$. 下设 $d(D)=2$. 由 Whitney 不等式(定理 4.4)只需证明

$$\lambda(D) \geqslant \delta(D).$$

令 B 是 D 的截边集使 $|B|=\lambda(D)=\lambda$. 因此,存在 $V(D)$ 的非空真子集 S 使 $(S,\bar{S})=B$(习题 4.3.2(a)). 设 B 在 S 中起点集为 X,B 在 $\bar{S}$ 中终点集为 Y. 我们断定

$$|S\backslash X| \cdot |\bar{S}\backslash Y| = 0.$$

若不然,取 $x\in S\backslash X$, $y\in \bar{S}\backslash Y$,则 $d_D(x,y)>2$,矛盾于 $d(D)=2$.

不妨设 $\bar{S}\backslash Y=\varnothing$,并设 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_b\}$. 令

$$s_i = |N_D^-(y_i) \cap X|, \ i = 1,2,\cdots,b.$$

则因为 D 是简单图,所以

$$\sum_{i=1}^{b} s_i = \lambda(D) \geqslant b \geqslant 1.$$

由于 $\delta=\delta(D)=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}$,所以

$$\delta \leqslant d_D^-(y_i) \leqslant s_i + (b-1).$$

于是

$$b\delta \leqslant \sum_{i=1}^{b} s_i + b(b-1) = \lambda + b(b-1),$$

即(注意到 $\delta\geqslant\lambda\geqslant b\geqslant 1$)

$$\lambda \geqslant b\delta - b(b-1) = \delta + (\delta - b)(b-1) \geqslant \delta. \qquad \square$$

下面的例子给出图 G 是 k 连通的充分条件,它是由 Bondy(1969)和 Boesch(1974)分别得到的.

例 4.3.2 设 G 是简单无向图,$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$,$d_i=d_G(x_i)$且 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu$,$\nu\geqslant 2$,$1\leqslant k\leqslant \nu-1$. 若对每个 $i=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{\nu-k+1}{2} \right\rfloor$,由 $d_i\leqslant k+i-2 \Rightarrow d_{\nu-k+1}\geqslant \nu-i$,则$\kappa(G)\geqslant k$.

证明 (反证法)　设 $\kappa(G)<k$. 由于 $1\leqslant k\leqslant \nu-1$,所以 G 中存在分离集 S 使

$$\kappa(G) \leqslant |S| = k-1.$$

令 H 是$G-S$ 中阶数最小的连通分支,并且令 H 的阶 $\nu(H)=i$,则 $i\leqslant \left\lfloor \frac{\nu-k+1}{2} \right\rfloor$,即 $k\leqslant \nu-2i+1$. 于是对每个 $x\in V(H)$有

$$d_G(x) \leqslant \nu(H) - 1 + |S| = i + k - 2 \leqslant \nu - i - 1.$$

因为 $i=\nu(H)$,$i\leqslant \left\lfloor \frac{\nu-k+1}{2} \right\rfloor$且 $d_i\leqslant k+i-2$,所以,由题设 $d_{\nu-k+1}\geqslant \nu-i$.

由于对任何 $x_j\in V(G)\backslash(V(H)\cup S)$,$d_j\leqslant \nu-i-1$. 所以 D 中使 $d_j\geqslant \nu-i$ 的顶点 x_j 全在 S 中. 又因为

$$d_\nu \geqslant d_{\nu-1} \geqslant \cdots \geqslant d_{\nu-k+1} \geqslant \nu - i,$$

所以 $$|S| \geqslant \nu-(\nu-k+1)+1=k.$$
这矛盾于 $|S|=k-1$. 所以 $\kappa(G)\geqslant k$. □

注 只要把 G 换 D,并令 $d_i=\min\{d_D^+(x_i),d_D^-(x_i)\}$,上例中条件即为强 k 连通的充分条件,其证明只需作稍微修改.

讨论下面的例子是很有趣的.

例 4.3.3 对任意的 3 个正整数 ν,k 和 m, $2\leqslant k\leqslant \nu-1$, $1\leqslant m\leqslant \left\lfloor \frac{\nu-k+1}{2}\right\rfloor$

令(其定义见习题 1.4.8)

$$G=K_{k-1}\vee(K_m\cup K_{\nu-k-m+1}).$$

若将 G 的顶点度表示成 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_\nu$,则

$$d_i=\begin{cases}m+k-2, & 当 1\leqslant i\leqslant m;\\ \nu-m-1, & 当 m+1\leqslant i\leqslant \nu-k+1;\\ \nu-1, & 当 \nu-k+2\leqslant i\leqslant \nu.\end{cases}$$

因为对每个 i, $1\leqslant i\leqslant\left\lfloor\frac{\nu-(k-1)+1}{2}\right\rfloor$,容易验证

$$d_i\leqslant i+(k-1)-2\Rightarrow d_{\nu-(k-1)+1}\geqslant \nu-i.$$

所以由例 4.3.2 知 $\kappa(G)\geqslant k-1$,即 G 是 $(k-1)$ 连通的.

另一方面,设 $1\leqslant i\leqslant\left\lfloor\frac{\nu-k+1}{2}\right\rfloor$ 且 $i\neq m$. 若 $1\leqslant i\leqslant m-1$,则 $d_i=m+k-2$;

若 $m+1\leqslant i\leqslant\left\lfloor\frac{\nu-k+1}{2}\right\rfloor$,则 $d_{\nu-k-1}=\nu-(m+1)\geqslant\nu-i$. 因此

$$d_i\leqslant i+k-2\Rightarrow d_{\nu-k-i}\geqslant \nu-i,\qquad i\neq m.$$

而当 $i=m$ 时,$d_i=i+k-2$ 且 $d_{\nu-k+1}=\nu-i-1$. 故不完全满足例4.3.2中的条件. 事实上,G 显然不是 k 连通的,因为 $V(K_{k-1})$ 是 G 的一个分离集. □

下列定理给出图是强 k 连通或强 k 边连通的充分必要条件. 它的无向图形式首先是由 Whitney(1932)给出的,故有时称它为 Whitney k 连通判别准则.

定理 4.5(Whitney, 1932) **设 $k\geqslant 1$ 并且设 D 是 $\nu(\geqslant k+1)$ 阶有向图,则**

(i) $\kappa(D)\geqslant k\Leftrightarrow \zeta_D(x,y)\geqslant k,\quad \forall x,y\in V(D)$;

(ii) $\lambda(D)\geqslant k\Leftrightarrow \eta_D(x,y)\geqslant k,\quad \forall x,y\in V(D)$.

证明 (i) 当 $k=1$ 时,由强连通图和 ζ_D 的定义立即知结论成立. 下设 $k\geqslant 2$.

($\Rightarrow$) 设 x 和 y 是强 k 连通图 D 中不同两顶点. 若 $E_D(x,y)=\varnothing$,则由 Menger 定理(4.3)知

$$k\leqslant\kappa(D)\leqslant\kappa_D(x,y)=\zeta_D(x,y).$$

下设 $E_D(x,y)\neq\varnothing$,并令 $\mu=|E_D(x,y)|$. 若 $\mu\geqslant k$,则

$$\zeta_D(x,y) \geqslant |E_D(x,y)| = \mu \geqslant k.$$

下设 $\mu<k$，并设

$$D' = D - E_D(x,y).$$

在这种情形下仍能证明

$$\zeta_D(x,y) \geqslant k.$$

(反证法)若 $\zeta_D(x,y)<k$，则 $1\leqslant\zeta_{D'}(x,y)<k-\mu$. 因而由 Menger 定理(4.3)知在 D'中存在(x,y)分离集 $S\subset V\backslash\{x,y\}$，使

$$|S| = \zeta_{D'}(x,y) \leqslant k-\mu-1.$$

于是
$$|V|-|S| \geqslant k+1-(k-\mu-1) = \mu+2.$$

即存在 $z\in(V\backslash\{x,y\})\backslash S$. 若 $E_{D'}(x,z)\neq\varnothing$，则 $\zeta_{D'-S}(x,z)\geqslant 1$. 若$E_{D'}(x,z)=\varnothing$，则由 Menger 定理(4.3)知 $\zeta_D(x,z)\geqslant k$. 因而 $\zeta_{D'}(x,z)\geqslant k-\mu$. 由于$|S|\leqslant k-\mu-1$，所以仍有$\zeta_{D'-S}(x,z)\geqslant 1$. 同样可以证明$\zeta_{D'-S}(z,y)\geqslant 1$. 因此我们有$\zeta_{D'-S}(x,y)\geqslant 1$，矛盾于 S 是 D'中(x,y)分离集的假设. 故当 $E_D(x,y)\neq\varnothing$时，仍有 $\zeta_D(x,y)\geqslant k$.

($\Leftarrow$) 因为 $k\geqslant 1$，由假定知 D 是强连通的. 假设 D 含支撑子图 K_ν^*，则 $\kappa(D)=\nu-1\geqslant k$. 假设 D 不含 K_ν^*，并设 S 是 D 的 κ 分离集. 于是 $D-S$ 不是强连通的，因而存在 $x,y\in V(D)$使 $D-S$ 中不存在从 x 到 y 的有向路，即 S 是 D 中(x,y)分离集. 于是

$$|S| \geqslant \kappa_D(x,y).$$

由假定 $\zeta_D(x,y)\geqslant k$，所以由 Menger 定理(4.3)有

$$\kappa(D) = |S| \geqslant \kappa_D(x,y) = \zeta_D(x,y) \geqslant k.$$

(ii)的证明留给读者(见习题 4.3.1). □

推论 4.5　设 D 是强连通有向图，则

(i) $\kappa(D)\geqslant k \Rightarrow \kappa(D-x)\geqslant k-1,\quad \forall x\in V(D)$,
$\kappa(D-a)\geqslant k-1,\quad \forall a\in E(D)$;

(ii) $\lambda(D)\geqslant k \Rightarrow \lambda(D-a)\geqslant k-1,\quad \forall a\in E(D)$. □

习　题

4.3.1　证明定理 4.5(ii)和推论 4.4.1，推论 4.4.2 和推论 4.5.

4.3.2　设 D 是非平凡图，$\lambda(D)=\lambda$，B 是 D 的λ 截边集. 证明：

(a) $V(D)$中存在非空真子集 S 使 $E_D^+(S)=B$；

(b) 若 D 是无向图 G，且 $\lambda>0$，则(a)中 S 满足$G[S]$和$G[\overline{S}]$都是连通子图.

4.3.3　(a)证明：若 G 是简单图，$1\leqslant k\leqslant\nu-1$，并且 $\delta(G)\geqslant\left\lceil\frac{\nu+k-2}{2}\right\rceil$，则$\kappa(G)\geqslant k$.

(b) 举例说明，对于每个正整数 k，$1\leqslant k\leqslant\nu-1$，存在 ν 阶简单图 G 使 $\delta(G)=$

$\left\lceil \frac{\nu+k-3}{2} \right\rceil$，并且 $\kappa(G)<k$.

4.3.4 (a)证明：若 G 是简单图且 $\delta \geqslant \nu-2$，则 $\kappa=\delta$.

(b)举例说明：存在 $\nu(\geqslant 4)$ 阶简单图 G 使 $\delta=\nu-3$，并且 $\kappa<\delta$.

4.3.5 (a)证明：若 G 是简单图且 $\delta \geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}\nu \right\rfloor$，则 $\lambda=\delta$.

(b)举例说明：存在简单图 G 使 $\delta=\left\lfloor \frac{1}{2}\nu \right\rfloor-1$，并且 $\lambda<\delta$.

4.3.6 设 H 是 D 的线图 $L(D)$. 证明 $\kappa(H) \geqslant \lambda(D)$.

4.3.7 设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶 2 连通图. 证明 G 中存在相邻两顶点 x 和 y 使 $G-\{x,y\}$ 仍是连通的.

4.3.8 设 G 是 $\nu(\geqslant 4)$ 阶三角剖分图. 证明：G 的几何对偶图 G^* 是 2 边连通 3 正则简单图.

4.3.9 设 G 是 3 连通图，$\nu \geqslant 5$. 证明：存在 $e \in E(G)$ 使 $\kappa(G \cdot e) \geqslant 3$. (W. T. Tutte, 1961)

4.3.10 设 $\kappa(D) \geqslant k$，$x_0, x_1, \cdots, x_k$ 是 D 中任意 $k+1$ 个顶点. 证明：D 中有 k 条内部点不交的 (x_0, x_i) 路和 k 条内部点不交的 (x_i, x_0) 路，$i=1,2,\cdots,k$（这样的路集称为扇(fan)）.

4.3.11 设 G 是 $k(\geqslant 2)$ 连通图. 证明：G 中任何 k 个顶点都含在一个公共的圈上.

(G. A. Dirac, 1960)

4.3.12 证明：若 D 是强 $k(\geqslant 1)$ 连通图，则 D 的围长 $g(D) \leqslant \left\lceil \frac{\nu}{k} \right\rceil$.

4.3.13 证明：若 D 是强连通简单有向图，则 $\nu \geqslant \kappa(D)(d(D)-3)+\delta^- + \delta^- +2$.

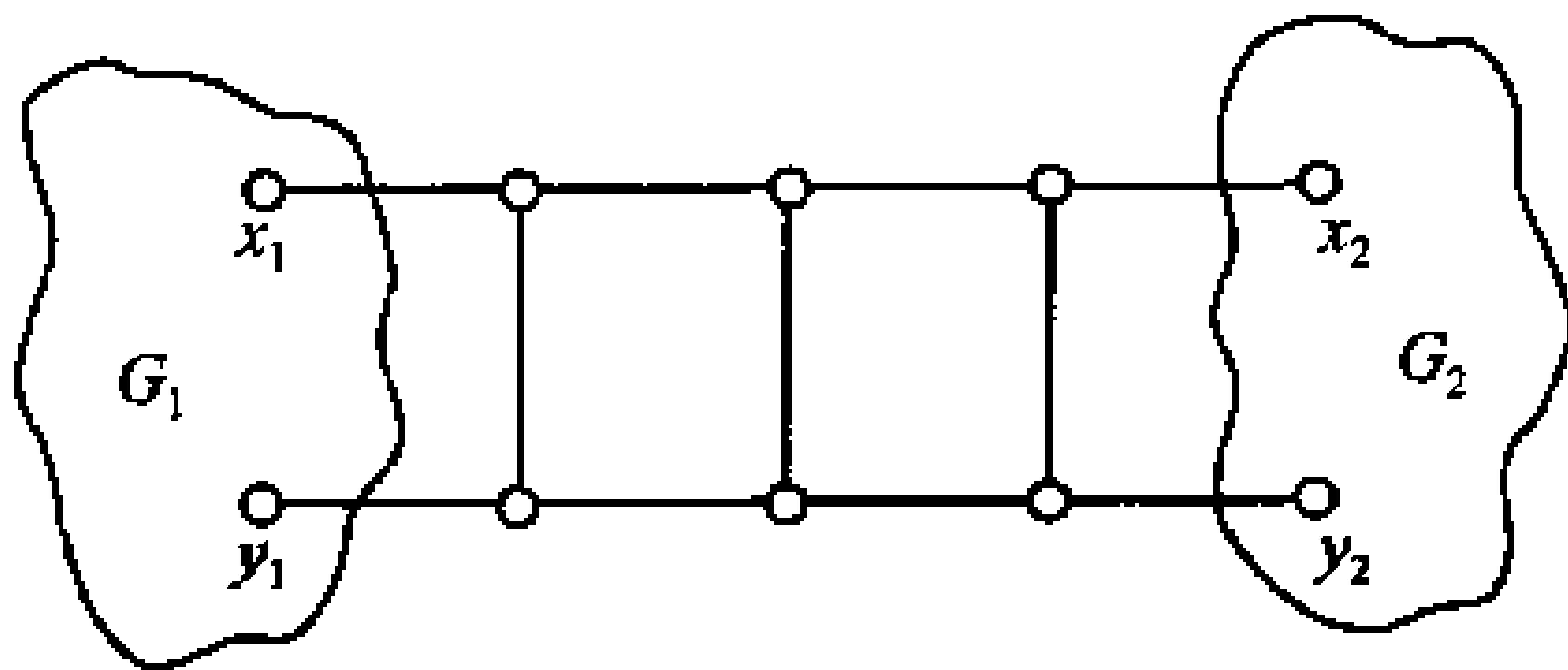
4.3.14 证明：

(a)设 G 是无向图，并且 $\lambda(G) \geqslant 2$，则存在 G 的一个定向图 D 使 $\lambda(D) \geqslant 1$.

(b)设 G 是 Euler 图，并且 $\lambda(G) \geqslant 2k$，则 G 存在定向图 D 使 $\lambda(D) \geqslant k$. (Nash-Williams(1960) 已证明：若 $\lambda(G) \geqslant 2k$，则 G 存在定向图 D 使 $\lambda(D) \geqslant k$.)

4.3.15 设 D 是 G 的定向图. 证明：若 $\lambda(D) \geqslant k$，则 $\lambda(G) \geqslant 2k$.

4.3.16 设 G 是 3 正则图且 $\lambda(G)=2$. 证明：存在 G 的子图 G_i 及不相邻两顶点 $x_i, y_i \in V(G_i)$，$i=1,2$ 使得 G 由 G_1 和 G_2 以及 x_1, y_1, x_2, y_2 由"梯子"连接的图所组成（如下图所示）.



（习题 4.3.16）

4.3.17 设 ν, δ, κ 和 λ 都是给定的非负整数. 证明：存在 ν 阶简单图 G 使得 $\delta(G)=\delta$，$\kappa(G)=\kappa$，$\lambda(G)=\lambda \Leftrightarrow$ 下列条件之一成立：

(a) $0\leqslant\kappa\leqslant\lambda\leqslant\delta\leqslant\left\lfloor \frac{1}{2}\nu \right\rfloor$；

(b) $1\leqslant 2\delta-2-\nu\leqslant\kappa\leqslant\lambda\leqslant\delta<\nu-1$；

(c) $\kappa=\lambda=\delta=\nu-1$.

应　用

4.4　运输方案的设计

商品从产地运到销地的必经之途构成一个交通系统. 假若此交通系统各段运输容量给定. 试设计一个运输方案，由此方案将商品从产地运到销地有最大的输送量. 如果再想提高输送量，需要增加那些路段的运输容量.

若将此交通系统看作是一个容量网络 $N=(D_{x,y},c)$，其中 D 是由这个交通系统构成的简单连通图，发点 x 和收点 y 分别看作商品的产地和销地，容量函数 $c\in\mathscr{C}(D)$看成是运输容量. 于是上述问题归结为在 N 中求一个最大(x,y)流和最小容量的(x,y)截边集. 本节将介绍一个解这个问题的有效算法.

设 $f\in\mathscr{F}(D)$是 $N=(D_{xy},c)$中的(x,y)流，u 是 D 中顶点，$u\neq x$. 并设 P 是 D 中一条连接 x 和 u 的路(不一定是有向路). 给定 P 从 x 到 u 的方向为正向，用 P^+ 和 P^- 分别表示 $E(P)$中与 P 的正向和反向一致的边集. 令

$$\sigma(a)=\begin{cases}c(a)-f(a), & \text{若 } a\in P^+,\\ f(a), & \text{若 } a\in P^-.\end{cases}$$

并令
$$\sigma_P(u)=\min\{\sigma(a):a\in E(P)\}.$$

若 $\sigma_P(u)=0$，则称 P 是 f **饱和路**(**saturated path**). 若 $\sigma_P(u)>0$，则称 P 是 f **非饱和路**(**unsaturated path**). f 非饱和的 xy 路 P 称为 f **增广路**(**incrementing path**). 之所以称为增广路，是因为流 f 的流量沿此路是可以增加的. 事实上，由

$$\tilde{f}(a)=\begin{cases}f(a)+\sigma_P(y), & \text{若 } a\in P^+,\\ f(a)-\sigma_P(y), & \text{若 } a\in P^-,\\ f(a), & \text{其它}\end{cases}\tag{4.14}$$

所定义的$\tilde{f}\in\mathscr{F}(D)$是 N 中的(x,y)流并且 $\mathrm{val}\,\tilde{f}=\mathrm{val}\,f+\sigma_P(y)$(习题 4.4.1). $\tilde{f}$ 称为基于 f 增广路 P 的**修正流**(**revised flow**).

例 4.4.1　考察图 4.8(a)所示的网络 $N=(D_{xy},c)$，边上的有序数对分别是流 f 和容量 c 的值，$\mathrm{val} f=6$. $P=x(s,x)s(w,s)w(w,y)y$是 D 中一条连接 x 和 y 的路(图中粗边所示). 给定 P 的正向从 x 到 y. 于是，

$P^+=\{(w,y)\}$，　$P^-=\{(s,x),(w,s)\}$，

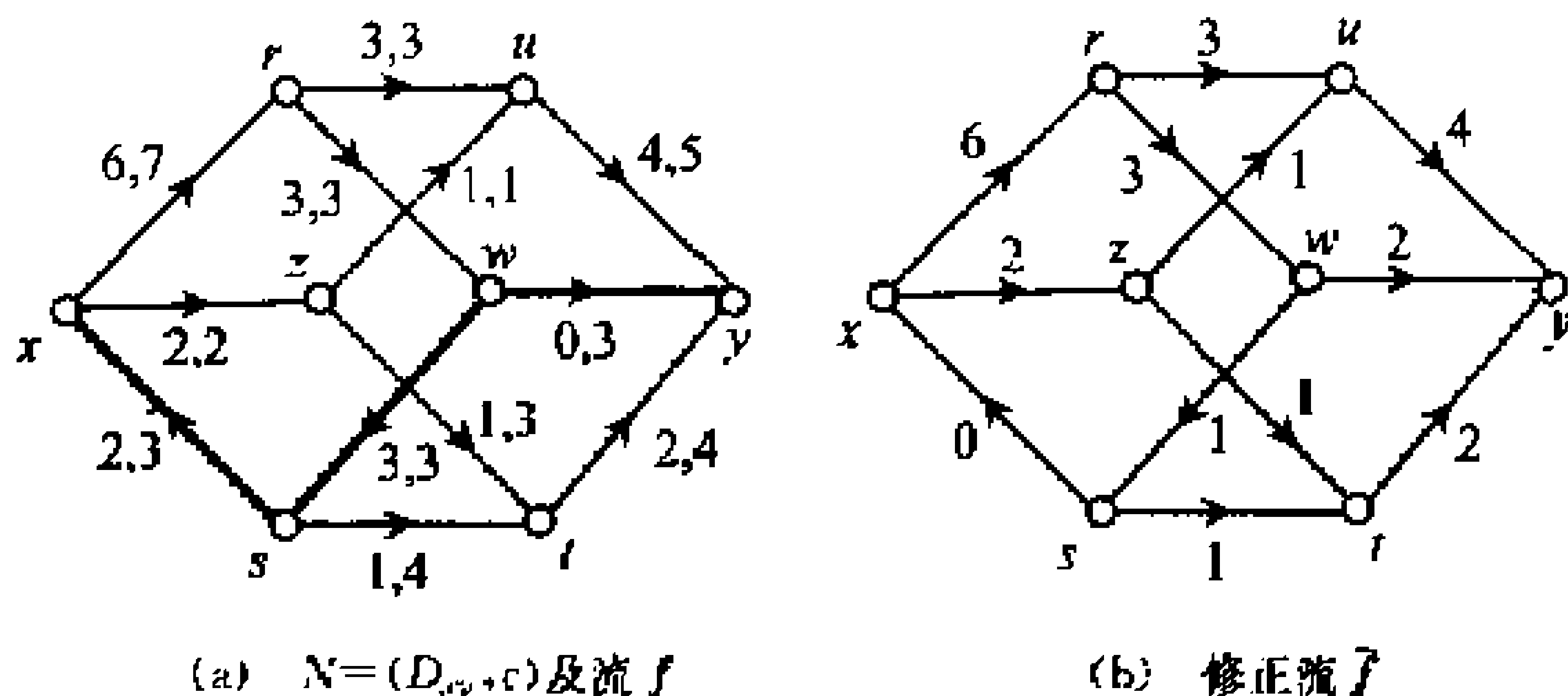
$\sigma((w,y))=c((w,y))-f((w,y))=3-0=3$,

$\sigma((s,x))=f((s,x))=2$, $(s,x)\in P^-$,

$\sigma((w,s))=f((w,s))=3$, $(w,s)\in P^-$,

$\sigma_P(y)=\min\{\sigma((w,y)),\sigma((s,x)),\sigma((w,s))\}$

$\quad=\min\{3,2,3\}=2>0$.



(a) $N=(D_{xy},c)$及流 f (b) 修正流 $\tilde{f}$

图 4.8

所以 P 是 f 非饱和的 xy 路，也是 f 增广路. 按(4.13)所定义的修正流 $\tilde{f}$ 如图 4.8(b)所示，val $\tilde{f}$=val $f-2=8$.

定理 4.6(Ford & Fulkerson, 1957) $N=(D_{xy},c)$中的(x,y)流 f **是最大的$\Leftrightarrow N$ 中不含 f 增广路.**

证明 ($\Rightarrow$)若 N 中含 f 增广路 P，则基于 P 的修正流 $\tilde{f}$ 比 f 有更大的流量. 所以 N 中不含 f 增广路.

($\Leftarrow$)设 N 中不含 f 增广路. 令

$$S=\{u\in V(D):N\text{ 中存在 }f\text{ 非饱和的 }xu\text{ 路}\}.$$

则 $x\in S, y\notin S$. 因此 $B=(S,\bar{S})$是 D 的(x,y)截边集. 任取 $a\in(S,\bar{S})$，并令 $a=(u,w)$. 则 $u\in S, w\in\bar{S}$. 由于 $u\in S$，所以存在 f 非饱和的 xu 路 Q.

若 $f(a)<c(a)$，则 $Q+a$ 是 N 中一条非 f 饱和的 xw 路，即 $w\in S$. 这矛盾于 $w\notin S$. 所以 $f(a)=c(a)$.

同样可证：若 $a\in(\bar{S},S)$，则 $f(a)=0$. 于是

$$\text{val } f=\text{cap } B.$$

设 B^* 是 N 中容量最小的(x,y)截边集，f^* 是 N 中最大(x,y)流，则由最大流最小截定理(4.1)知

$$\text{val } f\leqslant \text{val } f^*=\text{cap}B^*\leqslant \text{cap}B=\text{val } f.$$

由此知 f 是 N 最大(x,y)流，而 B 是最小容量的(x,y)截边集. □

定理 4.6 提供了一个求整容量网络中最大流最小截的有效算法. 这个算法称为标号法(**labelling method**). 它是由 Ford 和 Fulkerson(1957)首先提出，然

后由 Edmonds 和 Karp(1972)稍加修正的.

标号法的基本思想是从 N 中任何一个已知 (x,y) 流 f(例如零流)开始,递归地构作出一个其流量不断增加的流序列,并且终止于最大流. 在每个新的流 f 作出之后,如果存在 f 增广路 P,则作出基于 P 的修正流 $\tilde{f}$,然后将 $\tilde{f}$ 作为初始流重新执行算法. 如果不存在 f 增广路,则算法停止. 由定理 4.6 知 f 是最大流.

标号法的具体做法是从已知 (x,y) 流 f 开始,求出 D 的顶点标号序列. 首先标 x 为 $(-,\infty)$,并令 $L=\{x\}$. 设 $z\in V(D)$. 如果 D 中存在 f 非饱和的 xz 路 P,那么记 $\sigma(z)=\sigma_P(z)$. 设 P 上顶点 z 前面一个顶点为 u. 若 $(u,z)\in E(D)$,则 z 标以 $(u^+,\sigma(z))$;若 $(z,u)\in E(D)$,则 z 标以 $(u^-,\sigma(z))$,并将 z 添入 L 中. 在算法执行过程中,已标号的顶点依次进入 L,又依次地从 L 中删去. 算法结束时,如果 y 被标号,则 f 不是最大流. 于是存在 f 增广路 P 并且得到一个基于这条 f 增广路 P 的修正流 $\tilde{f}$. 如果 y 未被标号,但 $L=\varnothing$,则表明 f 是最大流,而已被标号顶点集 S 到未被标号顶点集 $\overline{S}$ 的边集 $(S,\overline{S})$ 构成一个最小容量的 (x,y) 截边集.

在算法的执行过程中,D 中顶点被分成三类:未被标号(即未曾进入 L);已被标号但未被删去(即仍在 L 中);已被标号且已被删去(即已从 L 中删去). 标号程序中应本着"先标号先删去",即"先进先出"的原则,即在删去 z 之前应先删去在 z 之前已被标号过的顶点. 这样做的目的是确保选择一条最短 f 增广路. 我们将在本节结束之前指出这样的限制并非没有意义.

标号法

1. 任取 N 中一个 (x,y) 流 f(例如零流),并给 x 以标号 $(-,\infty)$,并令 $L=\{x\}$.
2. 删去 L 中最前面元素 u. 若 $L=\varnothing$,则停止. f 是最大流. 若 $L\neq\varnothing$,则取未被标号顶点 z,并将 z 列入 L 的后面.
   (a)若 $a=(u,z)\in E(D)$,并且 $f(a)<c(a)$,则给 z 以标号 $(u^+,\sigma(z))$;
   (b)若 $a=(z,u)\in E(D)$,并且 $f(a)>0$,则给 z 以标号 $(u^-,\sigma(z))$.
3. 若 y 被标号,则进入第 4 步;若 y 未被标号,则转入第 2 步.
4. 已被标号的顶点构成 D 中一条 f 增广路 P:

$$x(=x_0)a_1x_1a_2x_2\cdots x_{n-1}a_n(x_n=)y,$$

其中对每个 $i=1,2,\cdots,n$,当 $a_i=(x_{i-1},x_i)$ 时,x_i 的标号为 $(x_{i-1}^+,\sigma(x_i))$;当 $a_i=(x_i,x_{i-1})$ 时,x_i 的标号为 $(x_{i-1}^-,\sigma(x_i))$. 在第一种情况下用 $f(a_i)+\sigma(y)$ 替代 $f(a_i)$;在第二种情况下用 $f(a_i)-\sigma(y)$ 替代 $f(a_i)$ 而得新流 $\tilde{f}$. 除掉所有标号并以 $\tilde{f}$ 替代 f 转入第 1 步.

例 4.4.2 考察图 4.9(a)所示的网络 $N=(D_{xy},c)$，边上的数值分别表示流值和容量.

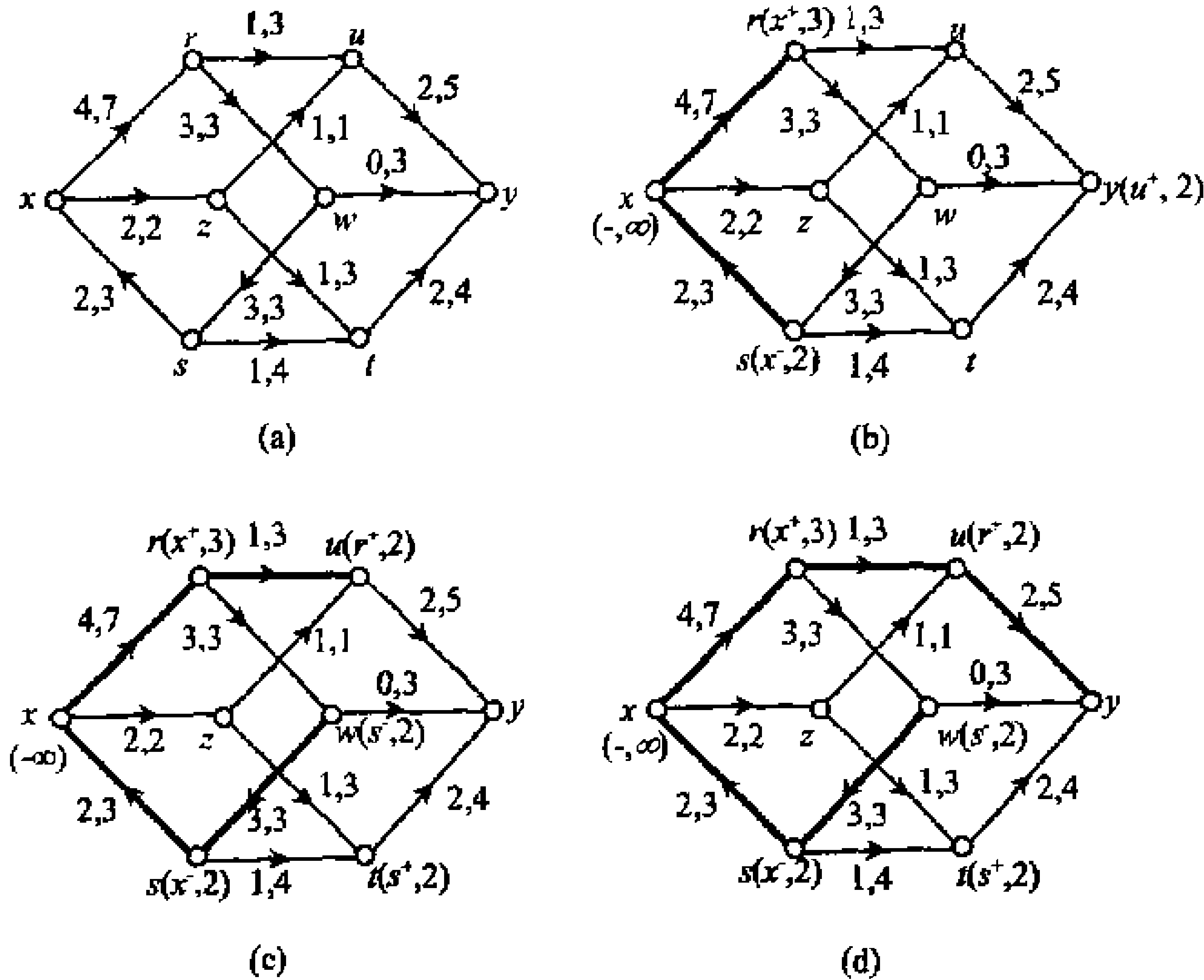


图 4.9 标号法的应用之一

1. 取初始流 f(如图 4.9(a)所示)，val $f=4$，x 被标上$(-,\infty)$，$L=\{x\}$.
2. 执行过程见下表

顶点标号过程	L
$x:(-,\infty)$	$\{x\}$
$x:(-,\infty)$ ↗ $r:(x^+,3)$ ↘ $s:(x^-,2)$	$\{r,s\}$
↗ $r:(x^+,3)\to u:(r^-,2)$ $x:(-,\infty)$ ↙ $w:(s^-,2)$ ↖ $s:(x^-,2)\to t:(s^+,2)$	$\{u,w,t\}$
↗ $r:(x^+,3)\to u:(r^+,2)\to y:(u^+,2)$ $x:(-,\infty)$ ↙ $w:(s^-,2)$ ↖ $s:(x^-,2)\to t:(s^+,2)$	$\{w,t,y\}$

上述过程见图 4.9(b)～(d)所示.

最后我们得到一条 f 增广路 P：

$$P = x\ (x,r)\ r\ (r,u)\ u\ (u,y)\ y.$$

$\sigma_P(y)=2$，f 基于 P 的修正流 $\tilde{f}$ 如图 4.10(a)所示，边 a 上的数值分别是 $\tilde{f}(a)$ 和 $c(a)$. 再把 $\tilde{f}$ 作为初始流继续执行标号法，具体过程见图 4.10(b)—(d)所示.

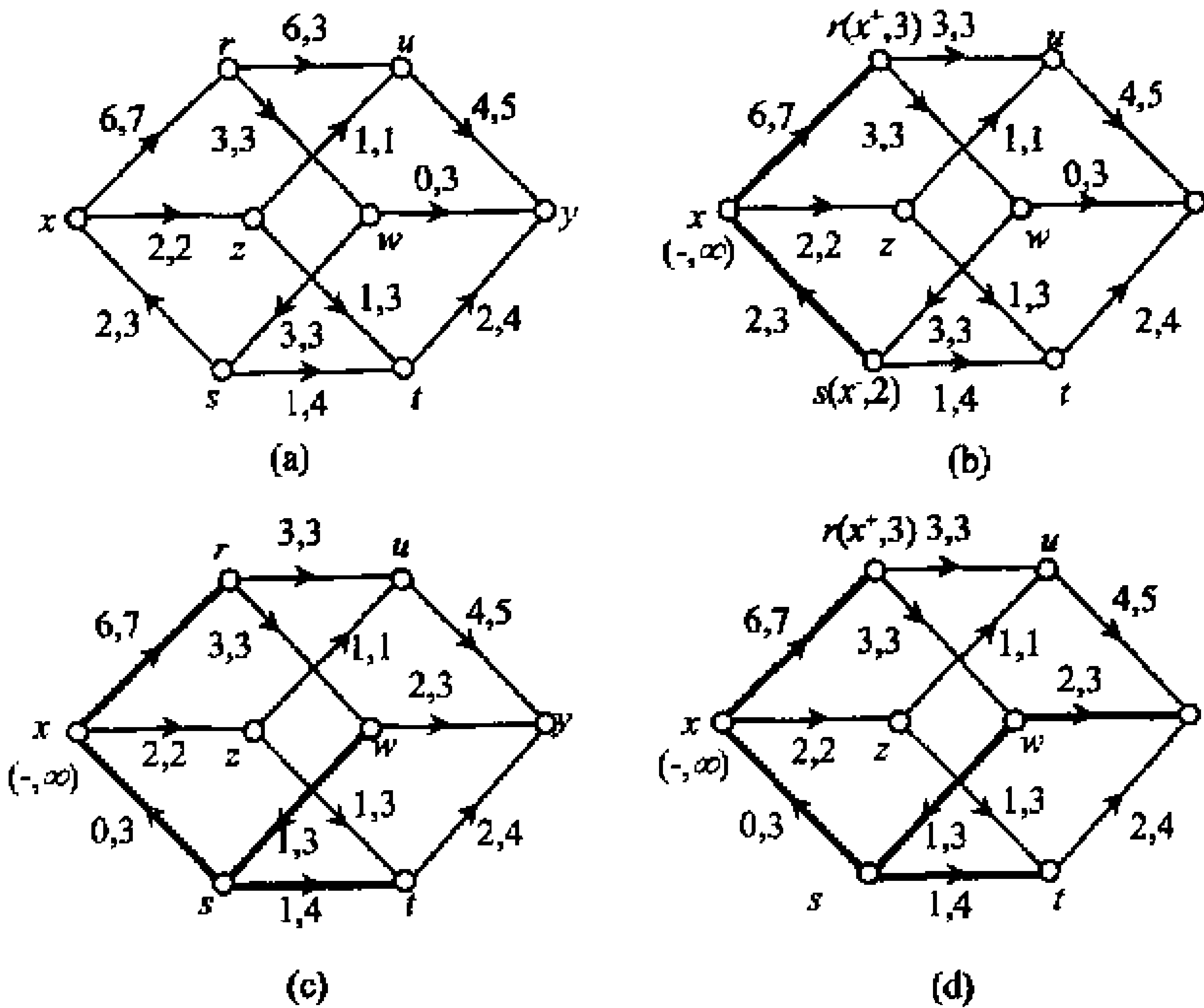


图 4.10　标号法的应用之二

在图 4.10(d)中，我们得到一条 $\tilde{f}$ 增广路

$$\tilde{P} = x\ (s,x)\ s\ (w,s)\ w\ (w,y)\ y.$$

$\sigma_{\tilde{P}}(y)=2$，$\mathrm{val}\tilde{f}=6$. $\tilde{f}$ 基于 $\tilde{P}$ 的修正流 f^* 如图 4.11(a)所示，边 a 上的数值分别是 $f^*(a)$ 和 $c(a)$. 将 f^* 作为初始流，再继续执行标号法. 然而在删去顶点 r 时(见图 4.11(b))，即从 L 中删去 r 时，$L=\varnothing$，并且 y 未被标号. 所示 f^* 是最大流而对应的最小容量(x,y)截边集是$(S,\bar{S})$，其中 $S=\{x,r\}$，$\mathrm{val}f^*=8$.

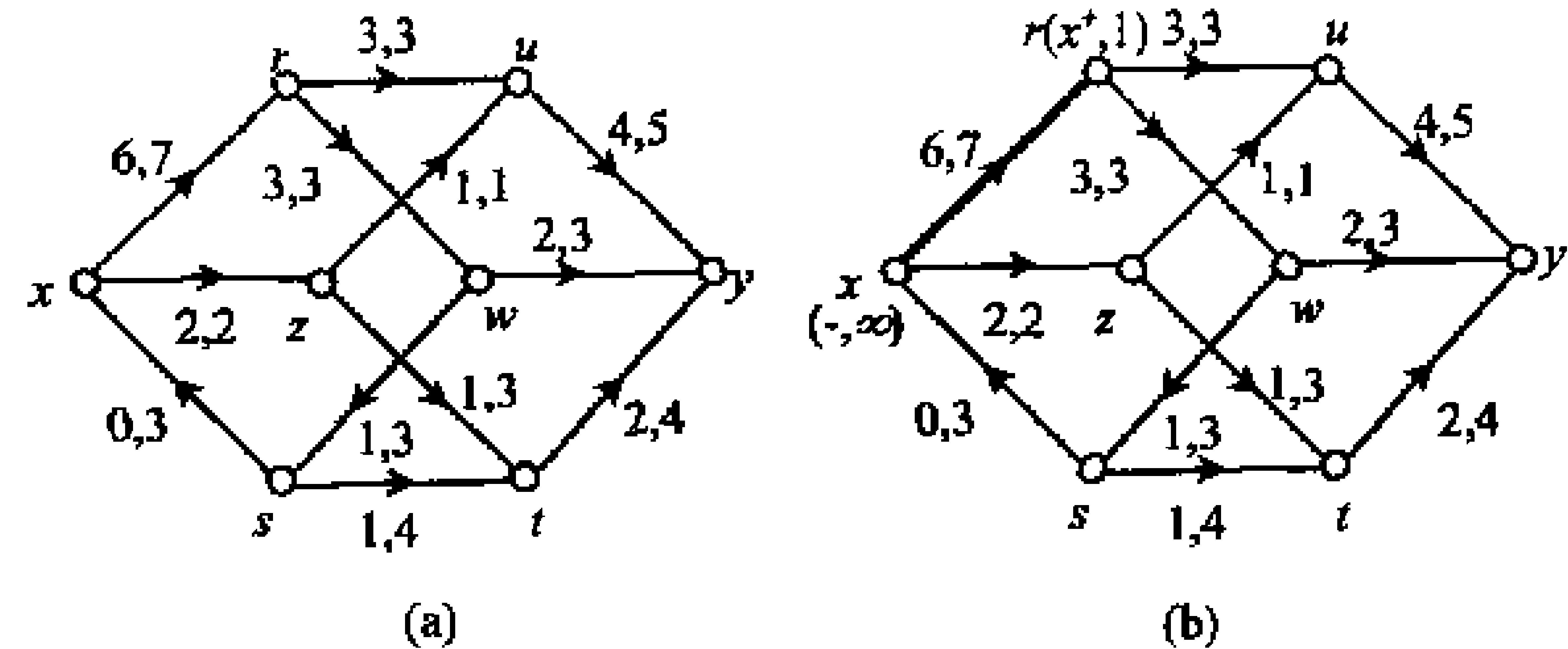


图 4.11　标号法的应用之三

若将图 4.11(a)看成一个交通系统，则图上所示的流 f 就是一个商品运输方案. 用此方案调运商品，输送量为 8. $(S,\bar{S})$表示此交通系统的"瓶颈"地段. 欲提高输送量，就必须增加$(S,\bar{S})$的容量. 例如，若将 $c(x,z)$由 2 提高到 4，则输送量可由 8 提高到 10. □

定理 4.7 **设 N 是整容量网络，并设 f 和 S 分别是标号法终止时得到的(x,y)流和已标号的顶点集，则 f 是最大(x,y)流，$(S,\bar{S})$是最小容量的(x,y)截边集.**

证明 若在算法的第二步中有 $L=\varnothing$，则 N 中不存在 f 增广路. 于是由定理 4.6 知 f 是最大(x,y)流，而$(S,\bar{S})$是最小容量的(x,y)截边集，其中 S 为已被标号的顶点集.

如果 $L\neq\varnothing$，每次当完成算法中的第四步时，就构造出其流量比 f 更大的流 $\tilde{f}$. 由于对 N 中任何(x,y)流 $\tilde{f}$，均有 $\text{val}\tilde{f}\leqslant\text{cap}(E_D^+(x))$，其中 $E_D^+(x)$表示 D 中以 x 为起点的边集. 并且由于 N 是整容量网络，所以第四步最多重复 $\text{cap}(E_D^+(x))$步，该算法可以在有限步内结束. □

我们已在前面指出在标号程序中应本着"先标号先删去"的原则. 考虑图 4.12所示的容量网络 $N=(D_{xy},c)$. 显然 N 中存在一个流量为 $2m$ 的(x,y)流 f. 若从零流开始，交错选取(x,x_1,x_2,x_5,x_6,y)和(x,x_4,x_5,x_2,x_3,y)作为增广路，每次修正流增加单位流量，需要进行 $2m+1$ 次标号过程. 因为 m 是任意的，所以执行标号算法所需要的计算次数不能以 ν 和 ε 的多项式函数为其上界. 换言之，它不是一个有效算法. 若按"先标号先删去"的原则，标号程序只需进行 2 次就可获得最大流(习题4.4.4).

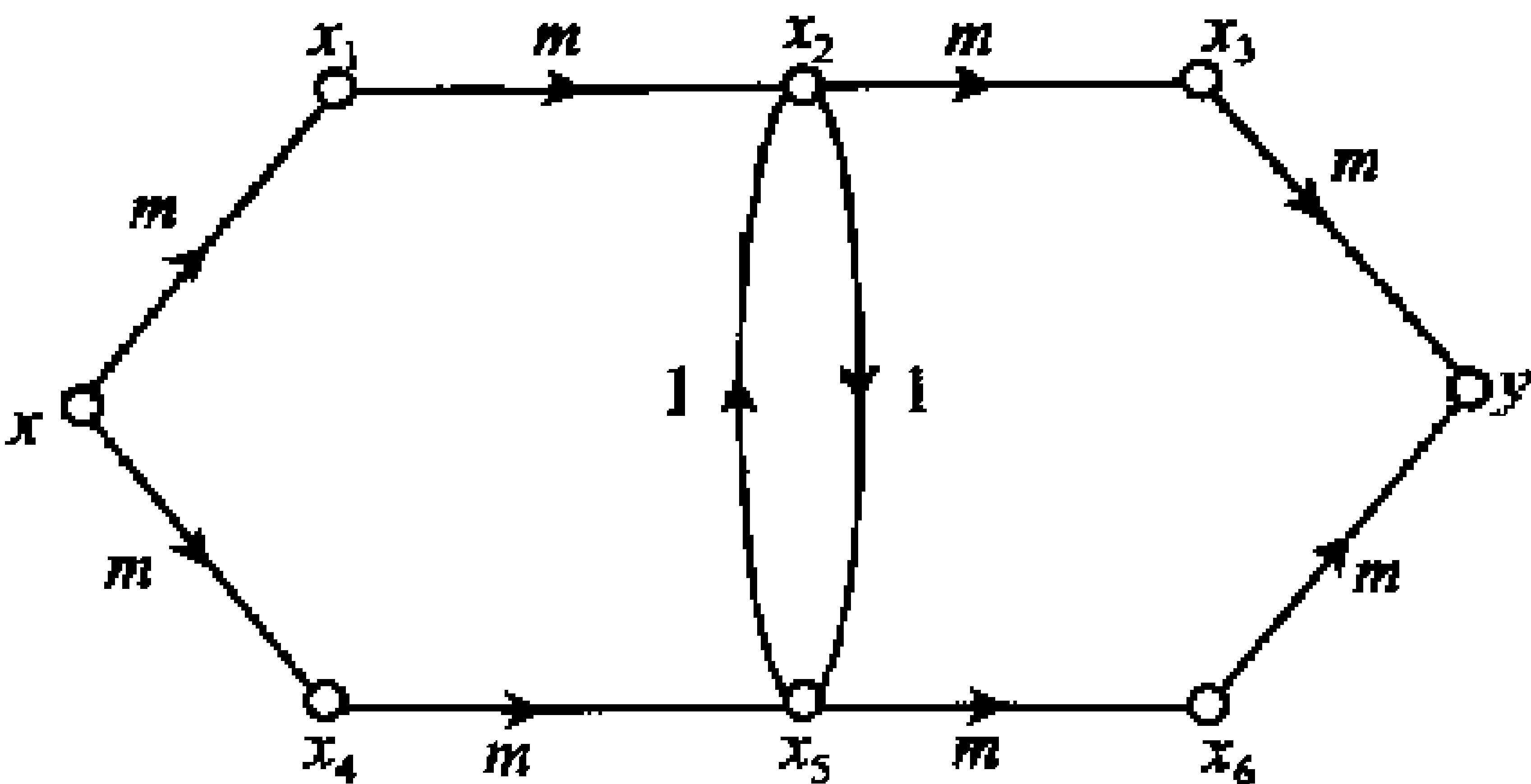


图 4.12

事实上，对于一般的整容量网络 N，我们可以证明(见习题 4.4.6)：若每次修正流 f 是通过最短 f 增广路获得的，则标号程序至多进行$\frac{1}{2}\varepsilon\nu$ 次就可以获得最大流.

值得指出的是，对无理数容量网络，Ford & Fulkerson 给出了一个例子，说明标号法不能在有限步内停止，并且计算过程中得到的流序列也不收敛于最大流.

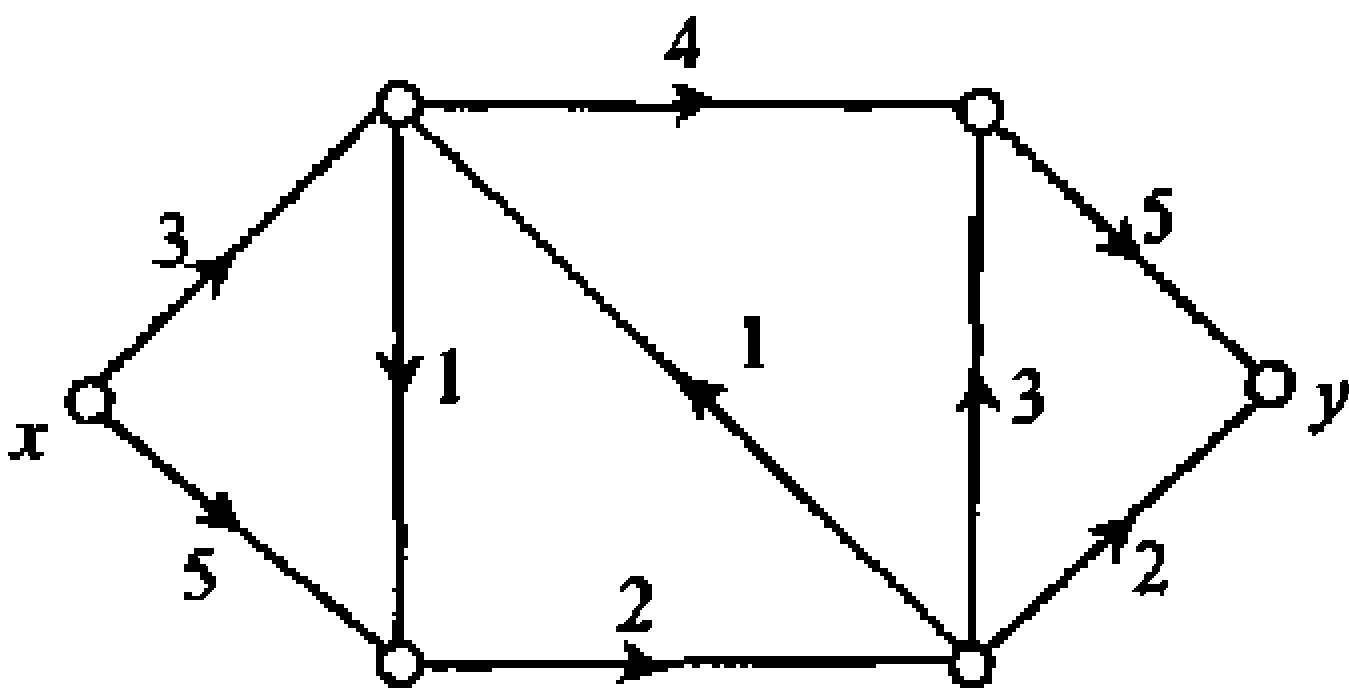
注　当 $c\equiv 1$ 时，标号法求出的最大流 f 满足 $\lambda_D(x,y)=\mathrm{val}f$. 换言之，标号法为求图的强边连通度提供了一个有效算法.

习　题

4.4.1　证明由(4.14)式给出的 $\hat{f}\in\mathscr{E}(D)$ 是 N 中 (x,y) 流且满足：

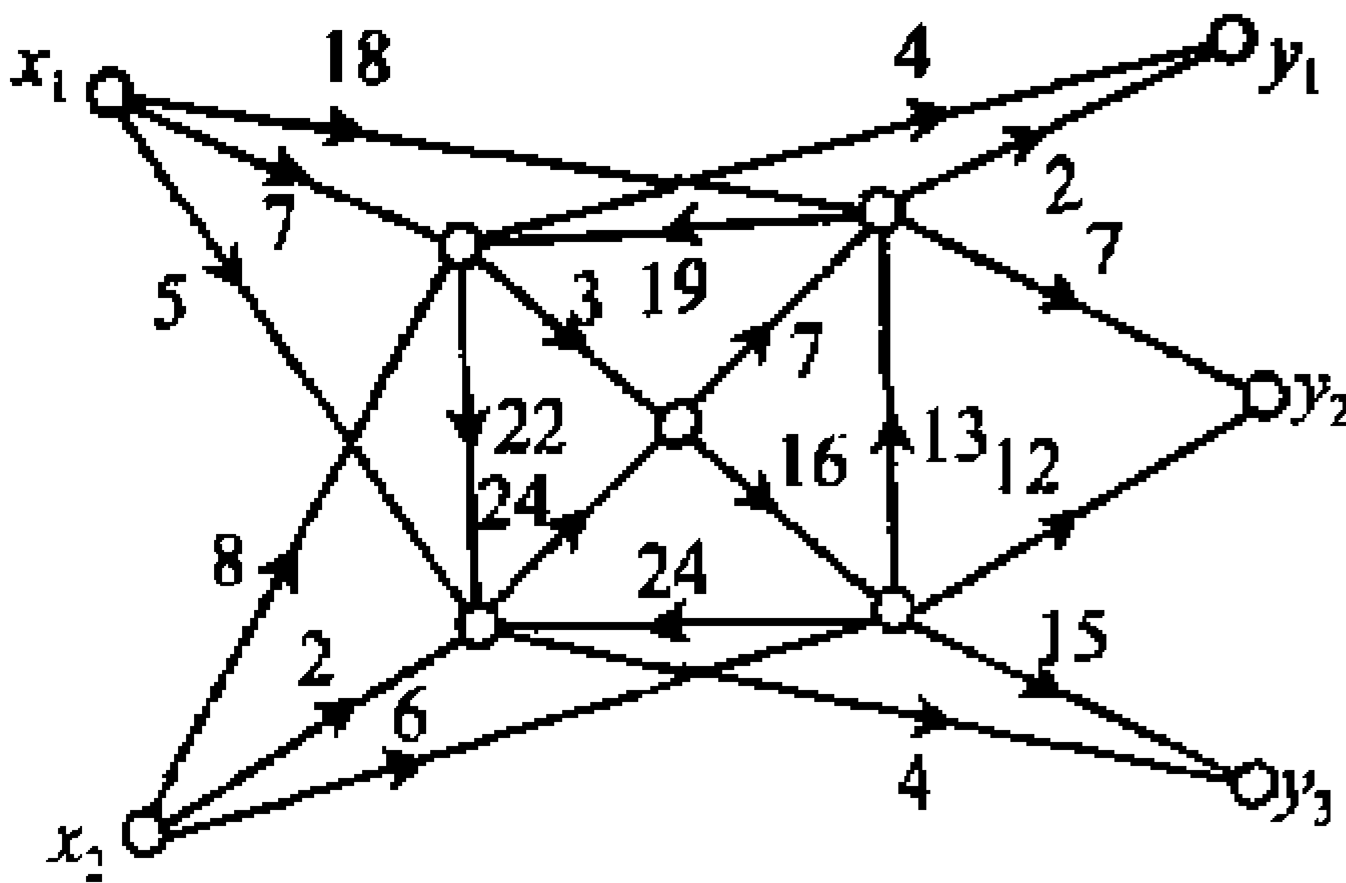
$$\mathrm{val}\,\hat{f}=\mathrm{val}\,f+\sigma_P(y).$$

4.4.2　求下列容量网络中最大 (x,y) 流和最小 (x,y) 截边集.



(习题 4.4.2)

4.4.3　由 x_1 和 x_2 两个工厂生产的产品，通过下列交通系统运送到市场 y_1、y_2 和 y_3. 试设计一个具有最大运送量的运输方案.



(习题 4.4.3)

4.4.4　利用标号法求图 4.12 所示的容量网络中的最大 (x,y) 流.

4.4.5　证明：标号法可以推广到函数为非负有理数的容量网络.

4.4.6　设 N 是整容量网络. 证明：

(a) 在标号法中，若每次修正流 $\hat{f}$ 是通过最短 f 增广路获得的，则标号程序至多进行 $\frac{1}{2}\varepsilon\nu$ 次就可以获得最大流；

(b) 标号法是有效算法，其复杂度为 $O(\nu\varepsilon^2)$.

4.5　最优运输方案的设计

在 4.4 节中，利用标号法设计运输方案时，我们考虑的仅仅是流量，而没有考虑到费用(或者说仅考虑在各路段中单位输送量的费用都相等). 在实际问题中，费用的因素很重要. 由于在各路段中运输设备的不同，所以单位输送量的费

用不尽相等. 这就要求我们设计一个输送量最大且总的运输费用最小的运输方案. 这样的运输方案称为**最优运输方案**.

用一个被称为**费用容量网络** $N=(D_{xy},b,c)$ 表示该交通系统, 其中 $b\in\mathscr{E}(D)$ 表示单位流量**费用函数**, $c\in\mathscr{E}(D)$ 是**容量函数**. 图 4.13(a) 所示的是一个费用容量网络 $N=(D_{xy},b,c)$, 其中边 a 上的有序数对分别表示费用函数 b 和容量函数 c 在边 a 上的值 $b(a)$ 和 $c(a)$. 设 f 是 N 中 (x,y) 流, 则

$$b(f)=\sum_{a\in E(D)}f(a)b(a)$$

定义为 f 的费用. 若对 N 中其流量等于 $\mathrm{val}\,f$ 的任何一个 (x,y) 流 f' 均有 $b(f)\leqslant b(f')$, 则称 f 为**最小费用流**.

于是用网络的语言来讲, 最优运输方案的设计就是在费用容量网络 $N=(D_{xy},b,c)$ 中求最大 (x,y) 流 f 且使费用 $b(f)$ 最小. 这样的流称为**最小费用最大流(minimum-cost maximum flow)**.

设 $N=(D_{xy},b,c)$ 为费用容量网络, f 是 N 中 (x,y) 的流. C 是 D 中有指定正向的圈. 令

$$\sigma(a)=\begin{cases}c(a)-f(a), & 若\ a\in C^+,\\ f(a), & 若\ a\in C^-,\end{cases}$$

$$\sigma(C)=\min\{\sigma(a):a\in E(C)\}.$$

若 D 中的圈 C 存在一个定向使 $\sigma(C)>0$, 则称 C 为 f **增广圈(incrementing cycle)**. 对于 f 增广圈 C, 我们可以定义 $\tilde{f}\in\mathscr{E}(D)$:

$$\tilde{f}(a)=\begin{cases}f(a)+\sigma(C), & 若\ a\in C^+,\\ f(a)-\sigma(C), & 若\ a\in C^-,\\ f(a), & 其他.\end{cases}\tag{4.15}$$

容易验证 $\tilde{f}$ 是 N 中 (x,y) 流而且 $\mathrm{val}\,\tilde{f}=\mathrm{val}\,f$ (习题 4.5.1). $\tilde{f}$ 称为基于 f 增广圈 C 的**修正流(revised flow)**.

例 4.5.1 考察图 4.13(a) 所示的网络 $N=(D_{xy},b,c)$. 它是我们在例 4.4.2 中考虑的网络, 在那里我们已求出最大 (x,y) 流 f 如图 4.13(b) 所示. 设 D 中圈

$$C=s\ (w,s)\ w\ (w,y)\ y\ (t,y)\ t\ (s,t)\ s$$

的正向与顺时针方向一致. 于是

$$C^+=\{(w,y)\},\quad C^-\ \{(w,s),(t,y),(s,t)\}.$$

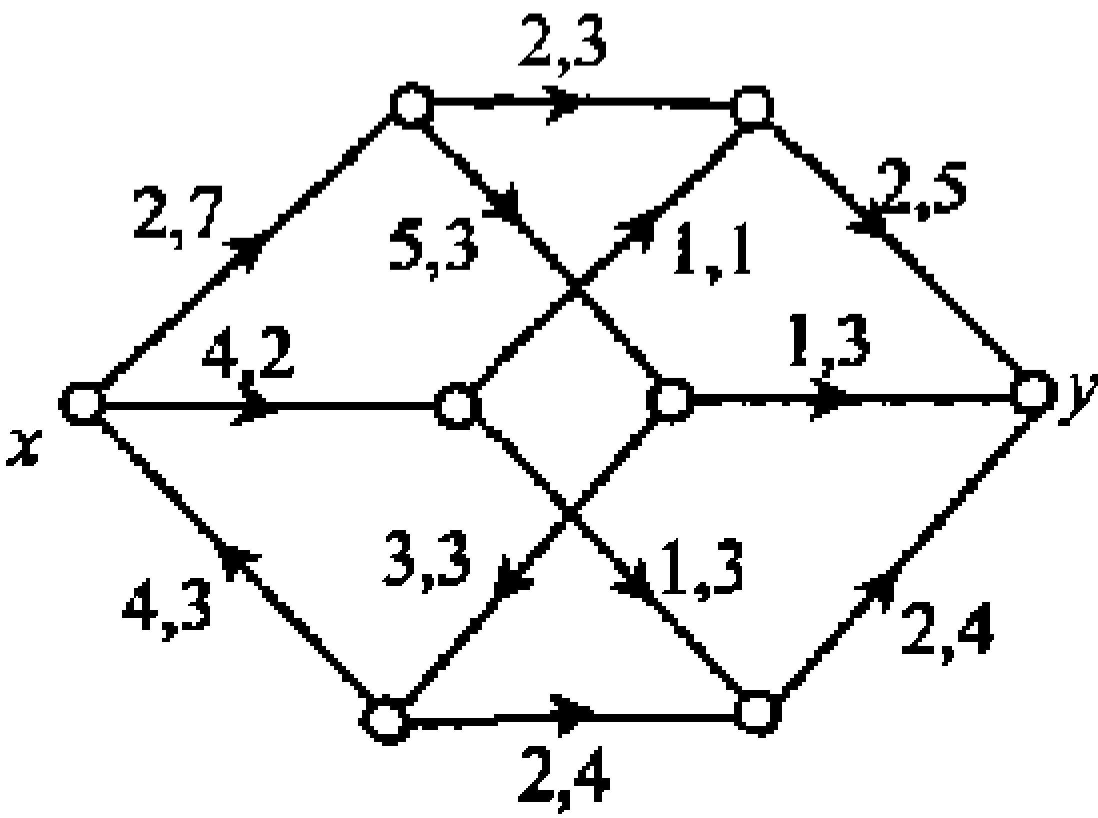
$$\sigma((w,y))=c((w,y))-f((w,y))=3-2=1;$$

$$\sigma((w,s))=f((w,s))=1,\ \sigma((t,y))=f((t,y))=2,$$

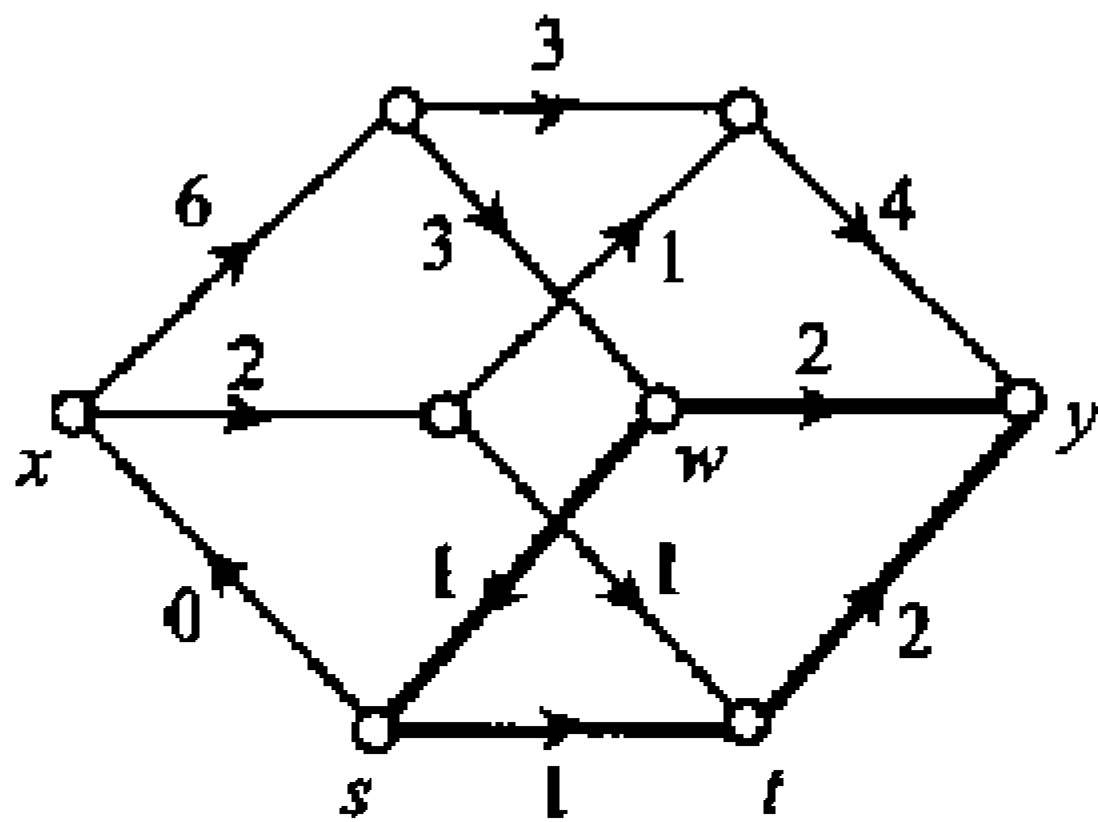
$$\sigma((s,t))=f((s,t))=1.$$

$$\sigma(C)=\min\{\sigma(a):a\in E(C)\}=\min\{1,2\}=1>0.$$

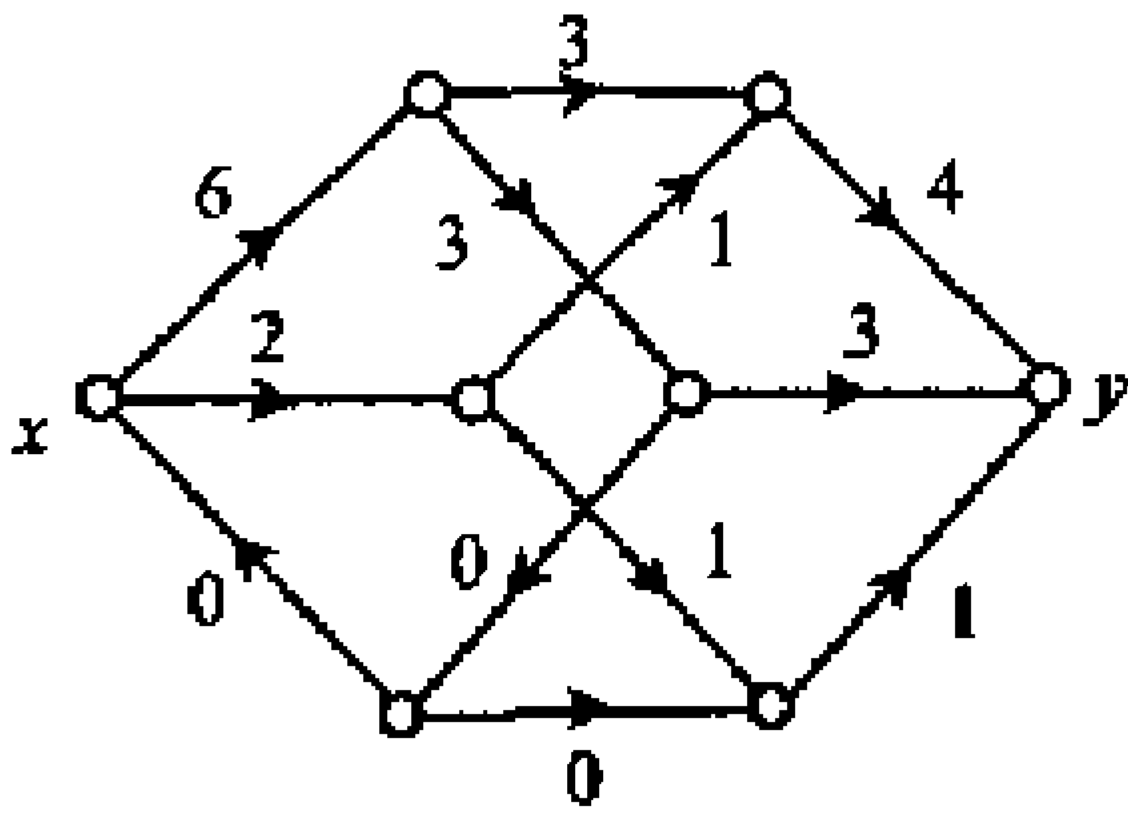
所以 C 是 f 增广圈. 按(4.15)式定义的修正流 $\tilde{f}$ 如图 4.13(c)所示, val $f=8=$ val $\tilde{f}$. 通过计算有 $b(f)=62$, 而 $b(\tilde{f})=56$. □



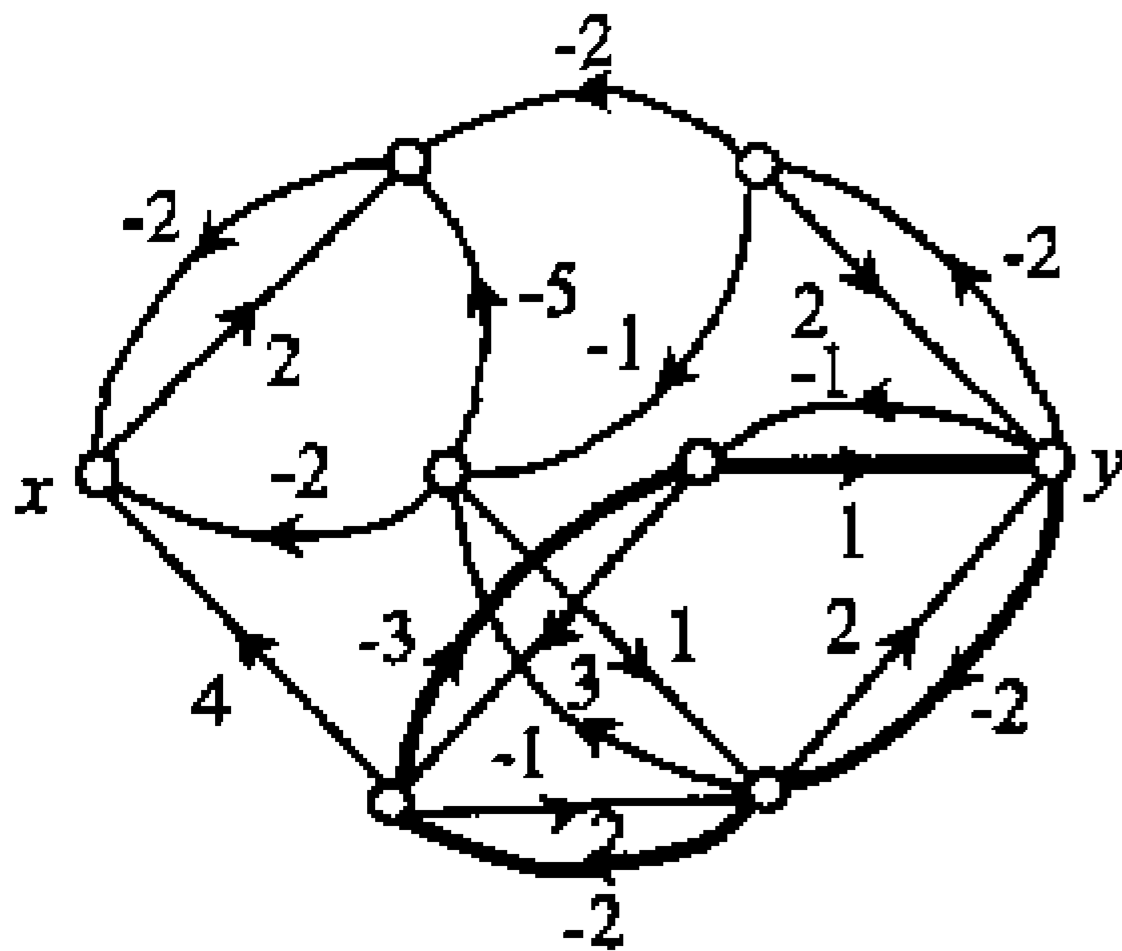
(a) 费用容量网络 $N=(D_{xy}, b, c)$



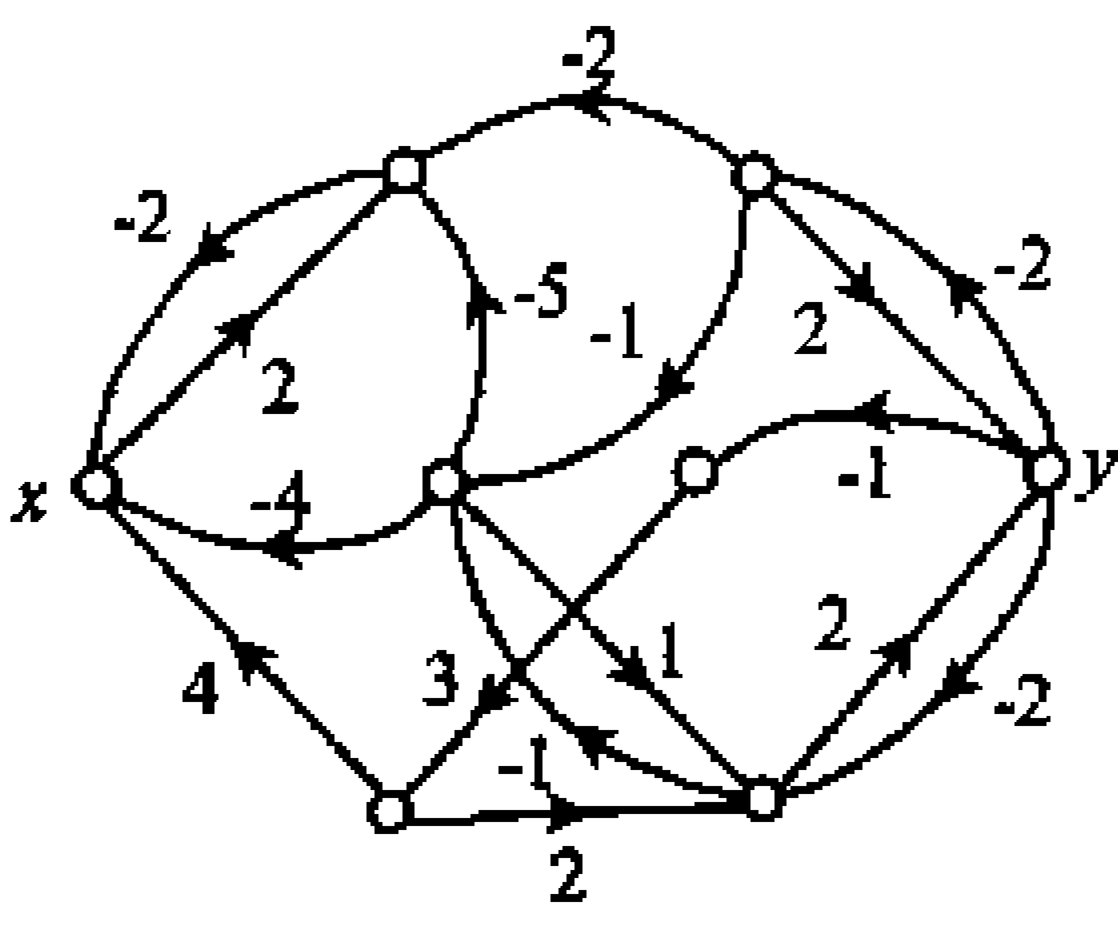
(b) 流 f 及其增广圈 C



(c) 对应于 f 增广圈的修正流 $\tilde{f}$



(d) $D(f)$ 及其中的负圈



(e) $D(\tilde{f})$

图 4.13　Klein 算法的应用

我们就是通过找出 f 增广圈, 然后对流 f 进行保量修正使其费用不断减少, 直到找出最小费用流. 那么, 怎样才算找到了最小费用流呢? 下面提供一个判定准则. 为此, 我们还要引进下面的定义.

设 C 是一个 f 增广圈, 则

$$b(C)=\sum_{a\in C^+} b(a)-\sum_{a\in C^-} b(a)$$

定义为圈 C 的费用.

定理 4.8　N 中 (x,y) 流 f 是最小费用流 $\Leftrightarrow$ N 中每条 f 增广圈 C 都有 b

$(C)\geqslant 0$.

证明 ($\Rightarrow$)设 f 是最小费用流，C 是 f 增广圈，并设 $\tilde{f}$ 为基于 f 增广圈 C 的修正流. 由于 $\text{val}\,\tilde{f}=\text{val}\,f$，所以

$$0\leqslant b(\tilde{f})-b(f)=\sigma(C)\Big(\sum_{a\in C^+}b(a)-\sum_{a\in C^-}b(a)\Big)$$
$$=\sigma(C)b(C).$$

由于 $\sigma(C)>0$，所以从上式推出 $b(C)\geqslant 0$.

($\Leftarrow$)设 f 是 N 中 (x,y) 流，并且对于 N 中每条 f 增广圈 C 都有 $b(C)\geqslant 0$. 欲证 f 具有最小费用，只需证明 N 中其流量等于 $\text{val}\,f$ 的任何最小费用 (x,y) 流 f^* 都有

$$b(f^*)\geqslant b(f).$$

为此，令 $$a'=(y,x),\ D'=D+a'$$

并补充定义 $$c(a')=+\infty,b(a')=0.$$

于是得到一个新网络 $N'=(D'_{xy},b,c)$. 若再补充定义

$$f(a')=f^*(a')=\text{val}\,f$$

则 f 和 f^* 都是 D' 的圈空间 $\mathscr{C}(D')$ 中的圈向量.

设 T 是 D 的支撑树，$n=\varepsilon-\nu+1$，$a_{n+1}=a'$，$E(\overline{T})=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$，$(f_1,f_2,\cdots,f_{n+1})^T$ 是圈空间 $\mathscr{C}(D')$ 中对应于 T 的基矩阵，其中 f_i 是对应于圈 $C_i=T+a_i$ 的圈向量，$i=1,2,\cdots,n+1$. 于是

$$f=\sum_{i=1}^{n+1}f(a_i)f_i,\quad f^*=\sum_{i=1}^{n+1}f^*(a_i)f_i.$$

令 $$\sigma_i=f^*(a_i)-f(a_i),\quad i=1,2,\cdots,n+1.$$

则 $$f^*=\sum_{i=1}^{n+1}(f(a_i)+\sigma_i)f_i=f+\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i f_i. \tag{4.16}$$

若存在 i $(1\leqslant i\leqslant n)$使 $\sigma_i>0$，则表明 C_i 是 f 增广圈. 由假定有 $b(C_i)\geqslant 0$.

若存在 i $(1\leqslant i\leqslant n)$使 $\sigma_i<0$，则表明 C_i 逆向圈 $\overleftarrow{C}_i$(即沿 C_i 中边 a_i 的逆向)是最小费用流 f^* 的增广圈. 由必要性知 $b(\overleftarrow{C}_i)\geqslant 0$，所以

$$b(C_i)=-b(\overleftarrow{C}_i)\leqslant 0.$$

并注意到 $\sigma_{n-1}=0$，所以

$$\sigma_i b(C_i)\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n,n+1,$$

于是由(4.16)式和 $b(f_i)=b(C_i)$ 得

$$b(f^*)=b(f)+\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i b(f_i)$$
$$=b(f)+\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i b(C_i)\geqslant b(f).$$

充分性得证.

于是定理证毕. □

定理 4.8 提供了解最小费用最大流问题的一个算法. 这个算法是 Klein (1967) 提出的. 算法的基本想法是: 从 N 中任何一个 (x,y) 最大流 f 出发, 检查每个 f 增广圈. 若所有 f 增广圈的费用都是非负的, 则 f 就是所求的最小费用最大流. 若存在 f 增广圈 C 使得 $b(C)<0$, 则用修正流 $\tilde{f}$ 替代 f 再重复上述过程.

由此可以看出, 从一个最大流 f 过渡到另一个最大流 $\tilde{f}$ 的关键是寻找其费用为负的 f 增广圈. 我们可以通过作辅助图 $D(f)$ 来实现这一点.

设 $a\in E(D)$, 用 $\tilde{a}$ 表示通过改变 a 的方向而得到的新边. 定义加权图 $(D(f),w)$ 如下:

$$V(D(f)) = V(D).$$

设 $a\in E(D)$.

若 $f(a)=0$, 则 $a\in E(D(f))$ 且 $w(a)=b(a)$;

若 $f(a)=c(a)$, 则 $\tilde{a}\in E(D(f))$, 且 $w(\tilde{a})=-b(a)$;

若 $0<f(a)<c(a)$, 则 $a,\tilde{a}\in E(D(f))$, $w(a)=b(a)$ 且 $w(\tilde{a})=-b(a)$.

例如, 参见图 4.13(d) 中所示的就是 (b) 中所示的 (x,y) 流 f 的 $D(f)$, 其中曲有向边表示 $\tilde{a}$.

设 C 是 D 中 f 增广圈, 则对任何 $a\in E(C)$, 均有 $0<f(a)<c(a)$. 因而 $a,\tilde{a}\in E(D(f))$. 设 $\overleftarrow{C}$ 是 $D(f)$ 中对应于 C 的有向圈使 $C^+\subseteq E(\overleftarrow{C})$. 令 $\overleftarrow{C}^+=C^+$, $\overleftarrow{C}^-=E(\overleftarrow{C})\setminus\overleftarrow{C}^+$, 则 C 的费用

$$\begin{aligned} b(C) &= \sum_{a\in C^+} b(a) - \sum_{a\in C^-} b(a) \\ &= \sum_{a\in \overleftarrow{C}^+} w(a) - \sum_{\tilde{a}\in \overleftarrow{C}^-} (-w(\tilde{a})) \\ &= \sum_{a\in E(\overleftarrow{C})} w(a) = w(\overleftarrow{C}). \end{aligned}$$

反之, 设 $\overleftarrow{C}$ 是 $D(f)$ 中有向圈, 令

$$\overleftarrow{C}^+ = \{a\in E(\overleftarrow{C}):\ w(a)>0\},$$
$$\overleftarrow{C}^- = E(\overleftarrow{C})\setminus \overleftarrow{C}^-.$$

则 $\overleftarrow{C}^+\subset E(D)$ 且 $\overleftarrow{C}^-$ 中边全为 $\tilde{a}$. 令

$$C^+ = \overleftarrow{C}^+,\qquad C^- = \{a\in E(D):\ \tilde{a}\in \overleftarrow{C}^-\}.$$

则容易验证 $C^+\cup C^-$ 构成 D 中 f 增广圈, 并且

$$w(\overleftarrow{C}) = \sum_{a\in E(\overleftarrow{C})} w(a) = \sum_{a\in \overleftarrow{C}^+} w(a) - \sum_{\tilde{a}\in \overleftarrow{C}^-} (-w(\tilde{a}))$$

$$= \sum_{a\in C^+} b(a) - \sum_{a\in C^-} b(a) = b(C).$$

于是寻找 D 中其费用<0 的 f 增广圈就等价于在 $D(f)$ 寻找负权和的有向圈. 此有向圈称为负圈. 于是我们得到：

定理 4.9 N 中 (x,y) 流 f 是最小费用流 $\Leftrightarrow D(f)$ 中不含负圈.

Klein 算法

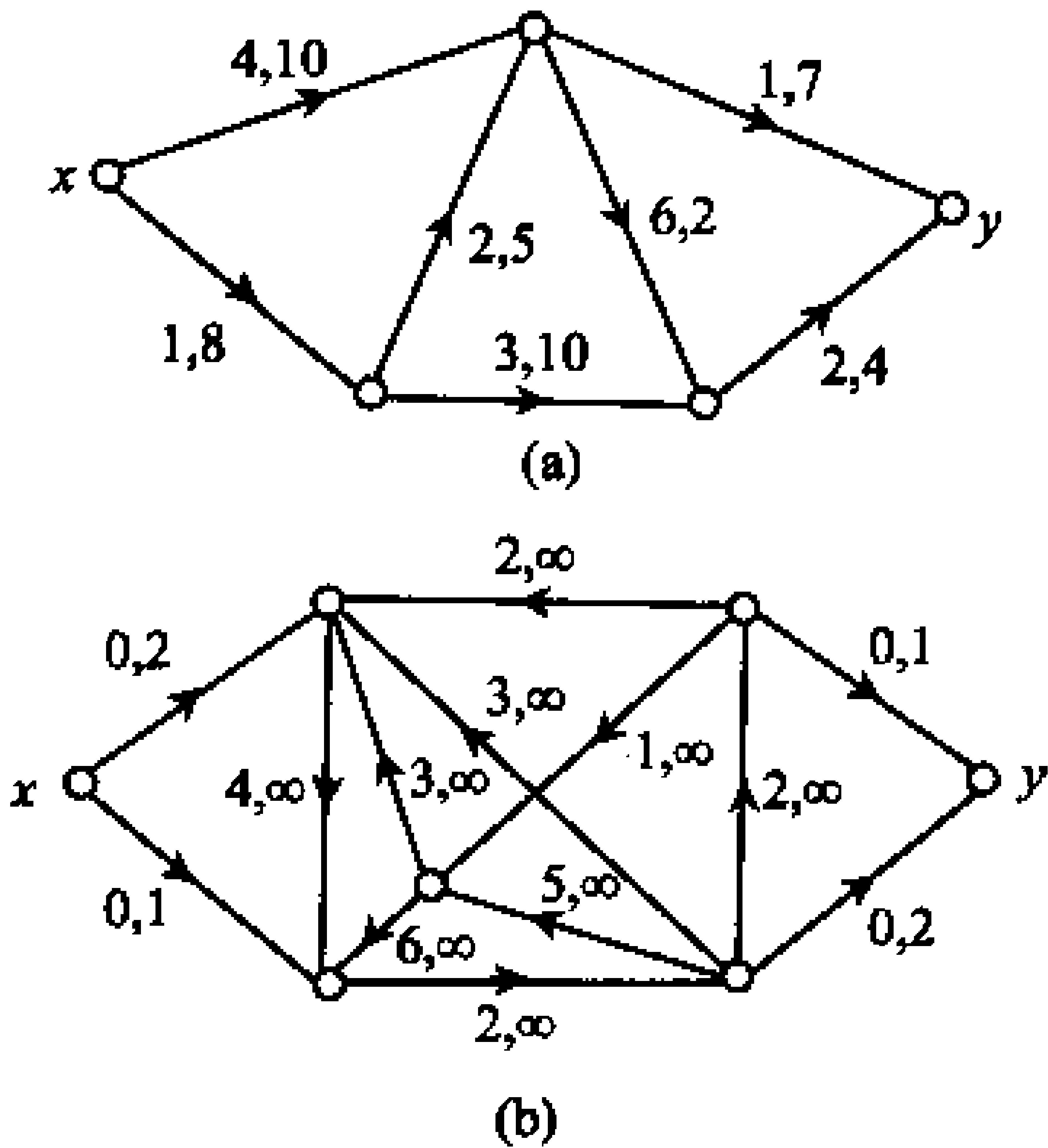
1. 求 N 中的最大 (x,y) 流 f；
2. 构造 $D(f)$；
3. 求 $D(f)$ 中的负圈. 若无负圈，则停止，此时 f 是最小费用最大流. 若 $D(f)$ 含负圈 $\overleftarrow{C}$，则 $C^+\cup C^-$ 是 f 增广圈(其正向与 $\overleftarrow{C}$ 的方向一致)，作修正流 $\tilde{f}$，并用 $\tilde{f}$ 代替 f 转入第1步.

例 4.5.2 考察图 4.13(a)所示的网络，其中边 a 上的有序数对分别是 $b(a)$ 和 $c(a)$. 在例 4.4.2 中，我们已求得最大流 f 如图 4.13(b)所示. 由 Klein 算法构作的 $D(f)$ 如图 4.13(d)所示，粗弧表示的是一条负圈，对应的 f 增广圈如图 4.13(b)中粗边所示. 基于这个 f 增广圈的修正流 $\tilde{f}$ 如图 4.13(c)所示. 再执行 Klein 算法构作 $D(\tilde{f})$ 如图 4.13(e)所示，$D(\tilde{f})$ 中无负圈，所以 $\tilde{f}$ 是最小费用最大流. 事实上，$b(f)=62>56=b(\tilde{f})$. □

习 题

4.5.1 证明：由(4.14)式给出的 $\tilde{f}\in\mathscr{E}(D)$ 是 N 中的 (x,y) 流，并且 $\mathrm{val}\,\tilde{f}=\mathrm{val}\,f$.

4.5.2 利用 Klein 算法求下列两个网络的最小费用最大流，边 a 上的有序数对分别为 $b(a)$ 和 $c(a)$.



(a)

(b)

(习题 4.5.2)

4.5.3 设 f 是 (x,y) 流，P 是所有 f 增广路中费用 $b(P)$ 最小的一条，$\tilde{f}$ 是基于 P 的修正流.

(a) 证明：若 f 是最小费用流，则 $\tilde{f}$ 也是最小费用流.

(b) 证明：求 D 中最小费用 f 增广路⇔求 $D(f)$ 中最短 xy 路.

(c) 利用(a)和(b)设计一个求最小费用最大流的算法，并用此算法验证习题 4.5.2 求出的流是最小费用最大流(R. G. Busacker & P. J. Gowen, 1961).

4.6 中国投递员问题

一个投递员每次投递邮件都要走遍他所负责投递区域内的每条街道. 完成投递任务后回到邮局. 他应怎样选择路线使他所走的总路程最短? 国际上称这个问题为**中国投递员问题(Chinese postman problem)**. 它是由我国管梅谷教授(1960)首先提出并进行研究的.

我们把投递员所负责投递区域看作一个连通的加权有向图 (D,w)，其中 D 的顶点视为街道的交叉口，街道(单向)视为边，权视为街道的长度(当然是正数). 经过 (D,w) 中每条边至少一次的有向闭链称为**邮路(post-tour)**. 具有最小权的邮路称为**最优邮路(optimal post-tour)**. 解中国投递员问题就是在连通的加正权图 (D,w) 中找出一条最优邮路.

在现实生活中，有许多问题，比如城市里的洒水车、扫雪车、垃圾清扫车和参观展览馆等最佳行走路线问题都可以归结为中国投递员问题.

由于中国投递员问题的广泛应用，引起了人们极大的研究兴趣，提出了许多好的解决方法. 本节将介绍一个解中国投递员问题的有效算法. 它由 Edmonds 和 Johnson(1973)首先提出来的.

首先考虑最简单的情形，即 D 是 Euler 图的情形. 若 D 是Euler图，则由于任何 Euler 有向回都是一条通过 D 的每条边正好一次的邮路，因而是最优邮路. 在这种情形下，中国投递员问题是容易解决的. 因为在这样的图中存在着确定 Euler 有向回的有效算法.

因为 D 是 Euler 图，所以 D 是强连通的. 于是(习题 2.2.2)对任何 $x_0 \in V(D)$，D 中存在根在 x_0 的支撑树形图. 我们利用 Moore-Dijkstra算法可以求出一棵根在 x_0 的支撑树形图 T. 对应于 T，我们给出求 Euler 有向回的算法.

Edmonds-Johnson 算法：

1. 任取 $x_0 \in V(D)$，求出根在 x_0 的支撑树形图 T，并令 $P_0 = x_0$，
2. 设有向迹 $P_i = x_i a_i x_{i-1} a_{i-1} \cdots a_2 x_1 a_1 x_0$ 已确定. 取 $a_{i+1} \in E(D) \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$ 使

   (i) $\psi_D(a_{i+1}) = (x_{i+1}, x_i)$；

   (ii) $a_{i+1} \notin E(T)$ 除非没有别的边可供选择，

3. 若第二步不能再执行时，则停止.

定理 4.10 上述算法终止时构造出的有向迹是 D 中的一条 Euler 有向回.

证明 设 $P_n=x_n a_n x_{n-1} a_{n-1}\cdots a_2 x_1 a_1 x_0$ 是上述算法终止时构造出来的有向迹. 因为 D 是 Euler 图，所以由定理 1.5 知 D 是平衡图. 故有 $x_n=x_0$，即 P_n 是有向闭迹.

若 P_n 不是 Euler 有向回，则存在 $b_1\in E(D)$ 且 $b_1\notin E(P_n)$. 设 $\psi_D(b_1)=(x_i,x_j)$. 由算法的第 2 步(ii)，不妨设 $b_1\in E(T)$. 由于 $d_D^+(x_i)=d_D^-(x_i)$，且 $d_{P_n}^+(x_i)=d_{P_n}^-(x_i)$，所以必存在 $b_2\in E(D)$ 且 $b_2\notin E(P_n)$ 使 $\psi_D(b_2)=(x_k,x_i)$. 由算法第 2 步(ii)，不妨设 $b_2\in E(T)$. 同样理由可知存在 $b_3\in E(D)$ 且 $b_3\notin E(P_n)$ 使 $\psi_D(b_3)=(x_l,x_k)$，$b_3\in E(T)$. 于是我们得到一系列边 $b_1,b_2,b_3\cdots$，它们沿着 T 上的一条从 x_n 到 x_j 的有向路一直退到 $x_0=x_n$. 由于 $d_D^+(x_n)=d_D^-(x_n)$ 且 $d_{P_n}^+(x_n)=d_{P_n}^-(x_n)$，所以存在 $a'\in E_D^-(x_n)$ 使 $a'\notin E(P_n)$. 这矛盾于算法第 3 步. 因此 P_n 是 Euler 有向回. □

例 4.6.1 考察图 4.14 所示的图 D. 因 D 是连通的平衡图，所以由定理 1.5 知 D 是 Euler 有向图. 考虑根在 x_1 支撑树形图 T(由图中粗边所示). 由上述算法得到一条 Euler 有向回

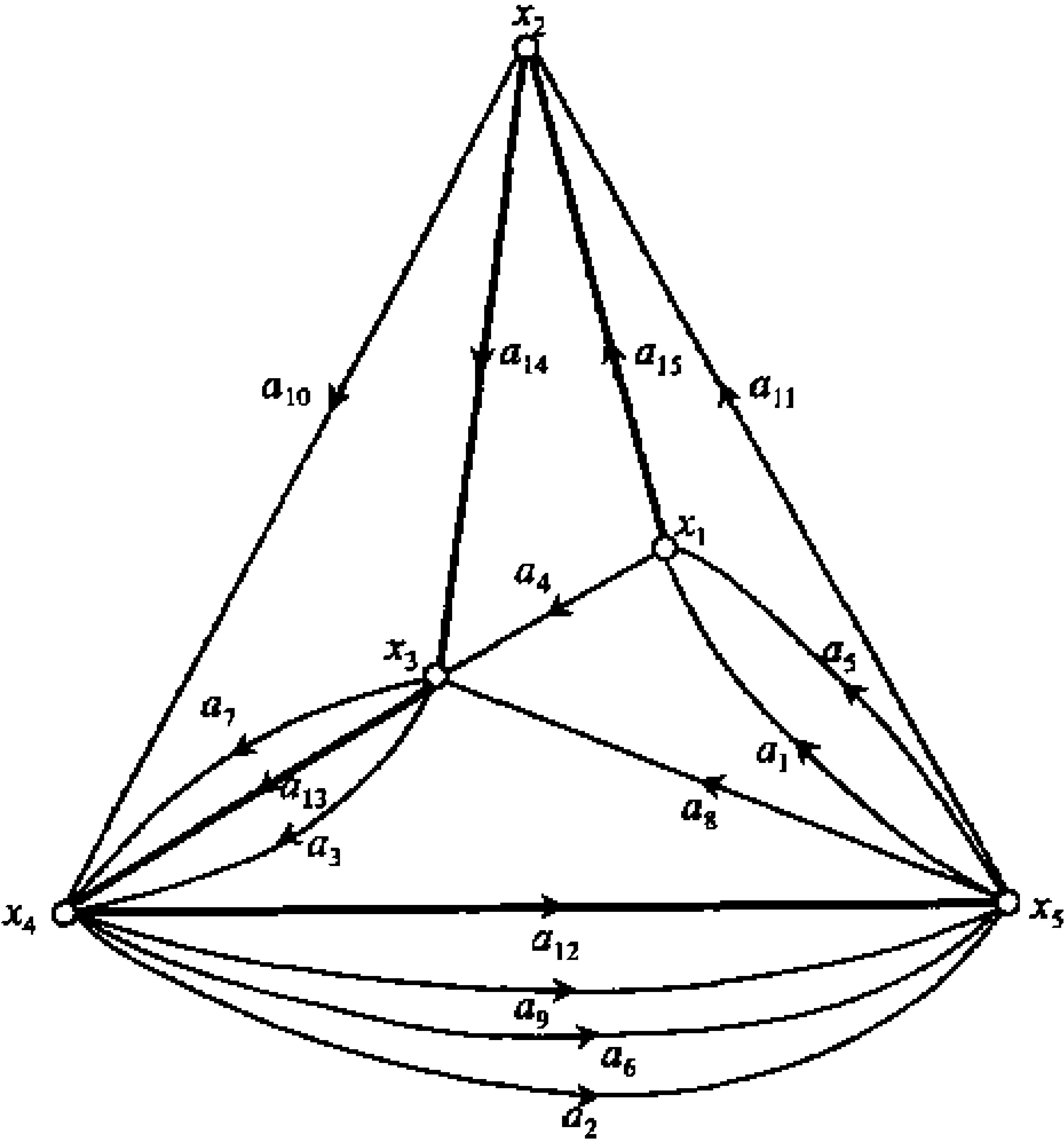


图 4.14

$P = x_1 a_{15} x_2 a_{14} x_3 a_{13} x_4 a_{12} x_5 a_{11} x_2 a_{10} x_4 a_9$

$x_5 a_8 x_3 a_7 x_4 a_6 x_5 a_5 x_1 a_4 x_3 a_3 x_4 a_2 x_5 a_1 x_1$. □

下面讨论图 D 不含 Euler 有向回的情形. 先解决此情形下邮路存在性问题. 如图 4.15 所示的图 D 中不存在邮路. 这是因为 D 中不存在从$\{y_1,y_2,y_3\}$到$\{x_1,x_2,x_3\}$的有向路,即 D 不是强连通的.

定理 4.11　图 D 有邮路$\Leftrightarrow D$ 强连通.

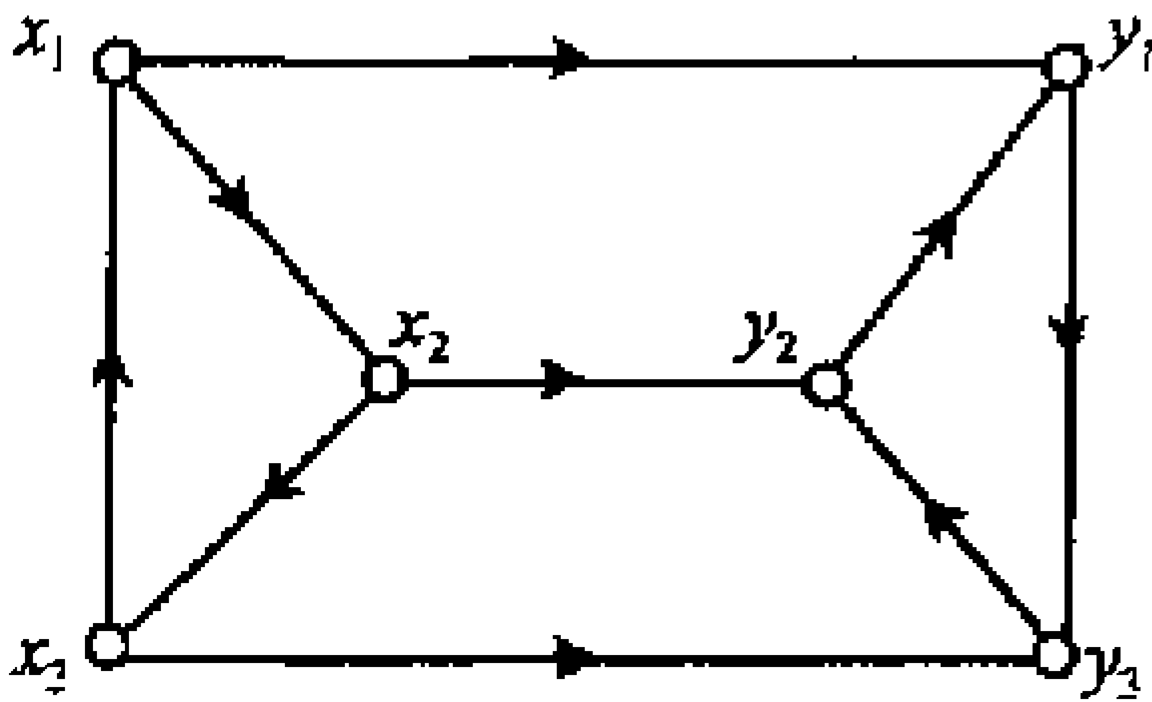


图 4.15

证明　($\Rightarrow$)由邮路的定义立即知 D 是强连通的.

($\Leftarrow$)设 D 是强连通图,所以 D 中必含有向圈. 取 D 中一条有向闭链 C 使其含 D 的边尽可能地多. 若 C 不是邮路,则必存在 $a\in E(D)$且 $a\notin E(C)$. 设 $\psi_D(a)=(x,y)$. 取 $u\in V(C)$. 由于 D 是强连通的,所以 D 中存在一条从 u 到 x 的有向路 P 和一条从 y 到 u 的有向路 Q. 于是 $C'=C\cup(P+a)\cup Q$ 为 D 中有向闭链,且 C'含 D 的边比 C 含 D 的边至少多一条(例如 a). 矛盾于 C 的选取. 所以 C 是 D 的邮路. □

设(D,w)是非平衡的强连通加权图,并设 P 是 D 的邮路. 因此某些边在 P 中重复出现. 用 $\gamma(a)$表示 $a\in E(D)$在 P 中出现的次数. 对任何 $a\in E(D)$,用 D^* 表示将 $\gamma(a)$条与 a 有相同方向的边替代 D 中的边 a 而得到的图. D^* 是 D 的母图而且是平衡的. 因此 D 中一条邮路 P 将对应着母图 D^* 中的一条 Euler 有向回. 于是中国投递员问题可以重叙如下:

给定强连通加权图(D,w),$w>0$.

(i)构造 D 的平衡母图 D^* 使添加的边集 E^* 有最小权;

(ii)求 D^* 中的 Euler 有向回.

Edmonds-Johnson 算法已提供了求解(ii)的有效算法. 下面我们讨论求解(i)的算法,它也是由 Edmonds 和 Johnson(1973)提出的.

设 $x\in V(D)$,令 $\rho(x)=d_D^-(x)-d_D^+(x)$. 并令

$$X=\{x\in V(D):\rho(x)>0\},$$

$$Y=\{y\in V(D):\rho(y)<0\}.$$

由于 D 是非平衡图,所以由定理 1.1 知 $X\neq\varnothing$,$Y\neq\varnothing$,并且

$$\sum_{x\in X}\rho(x)=-\sum_{y\in Y}\rho(y).$$

记上式两边的值为 $\rho(D)$.

例如,对于图 4.16 中所示的加权有向图(D,w)有,$\rho(x_1)=-1$, $\rho(x_2)=0$. $\rho(x_3)=2$, $\rho(x_4)=1$, $\rho(x_5)=-2$. 于是 $X=\{x_3,x_4\}$, $Y=\{x_1,x_5\}$,且

$\rho(D)=3$.

假定满足(i)中要求的母图 D^* 及 E^* 已选定. 例如,见图4.17(a)中图即为图 4.16 中图 D 的母图 D^*,其中 E^* 中边由曲有向边表示. 令 $H=D^*[E^*]$. 则 H 是由$\rho(D)$条边不交的起点在 X 中而终点在 Y 中有向路之并. 例如,图 4.17(a)中由曲有向边集 E^* 导出子图 H(如图 4.17(b)所示)中有 $\rho(D)=3$ 条边不交有向路:

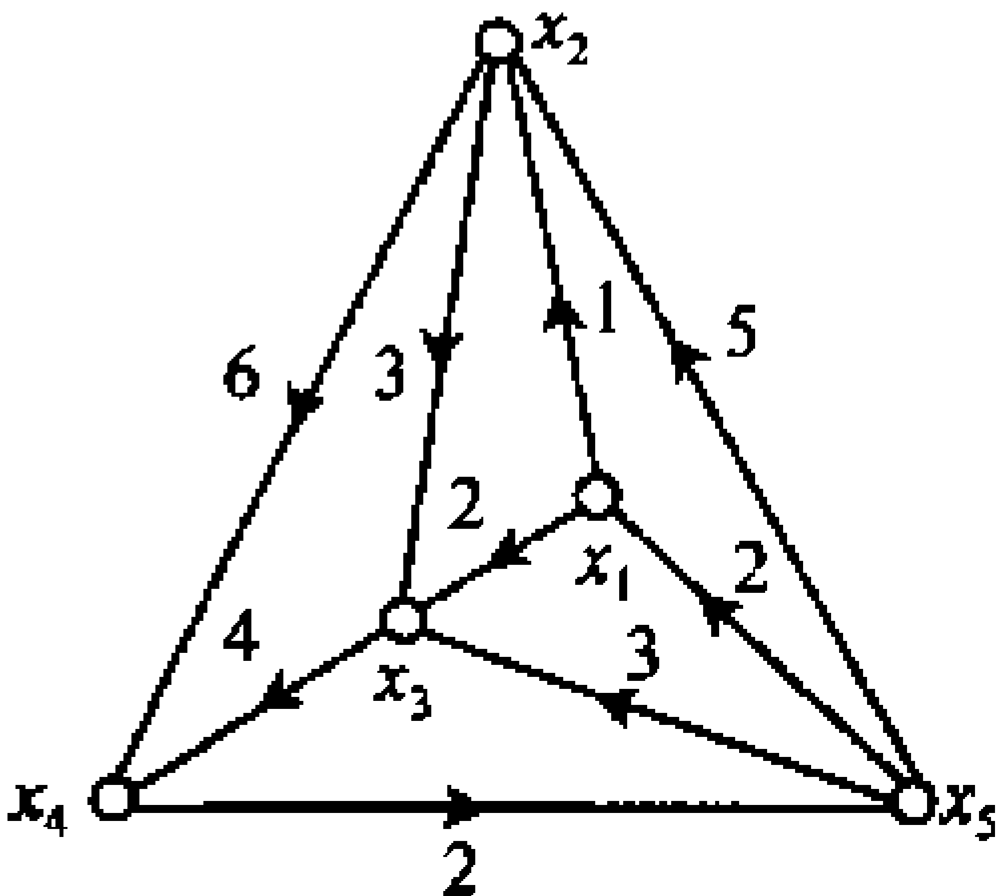


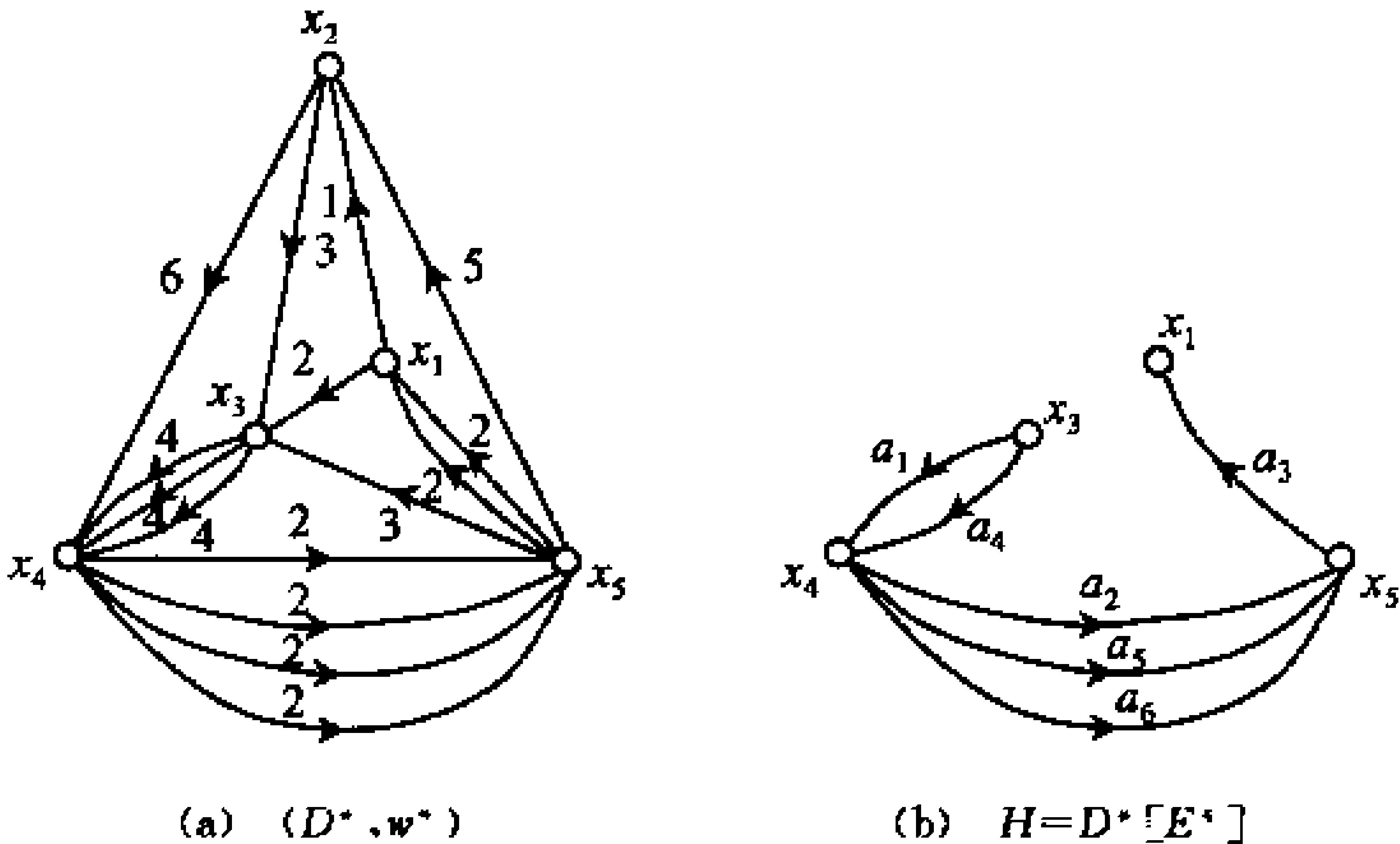
图 4.16 加权有向图(D,w)

$$P_1=x_3a_1x_4a_2x_5a_3x_1, \quad P_2=x_3a_4x_4a_5x_5,$$
$$P_3=x_4a_6x_5.$$

反之,任何 $\rho(D)$条起点在 X 中而终点在 Y 中且权最小的有向路的边集 E^*(其中若边 a 是 m 条有向路的公共边,则计算 m 次)都是(i)的解(因为此时 D^* 为平衡图). 于是(i)的解归结为在 D 中选取 $\rho=\rho(D)$条起点在 X 而终点在 Y 的有向路 $P_1,P_2,\cdots,P_\rho$ 使权和

$$w(P_1)+w(P_2)+\cdots+w(P_\rho)$$

最小.



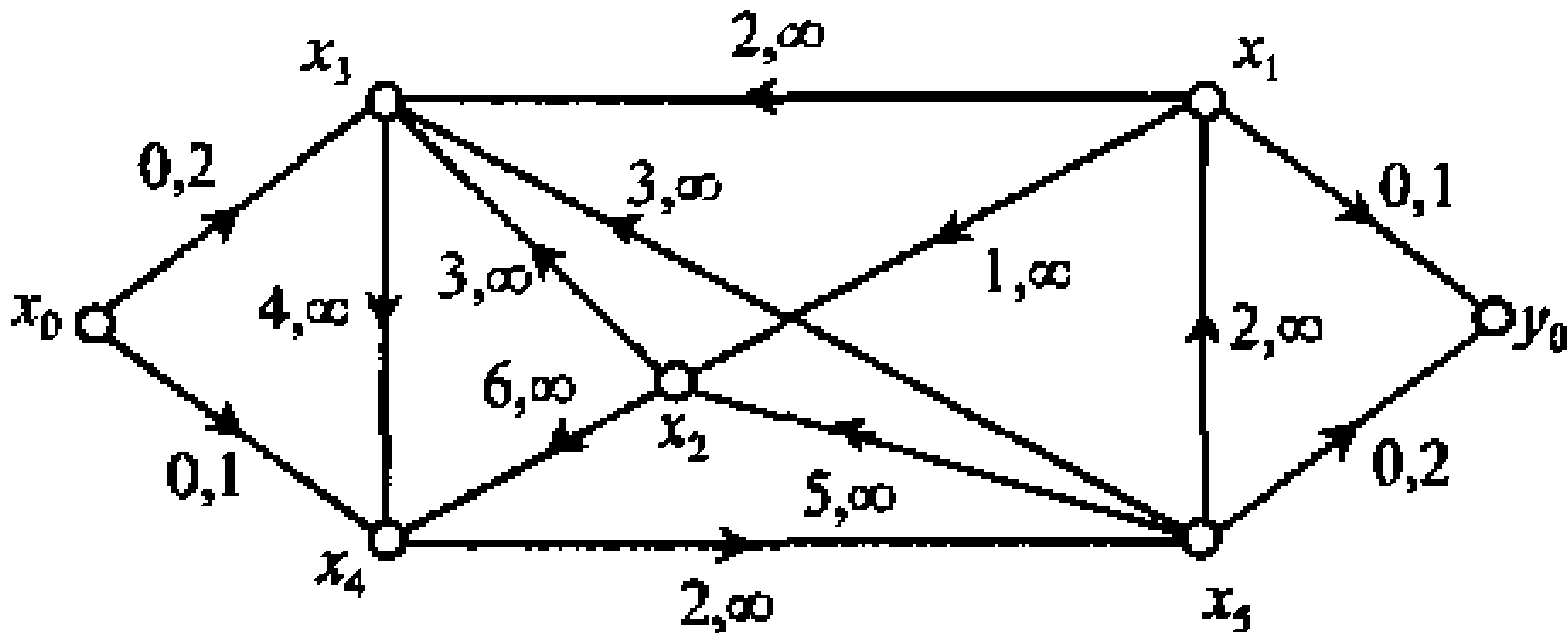
(a) (D^*,w^*)　　(b) $H=D^*[E^*]$

图 4.17

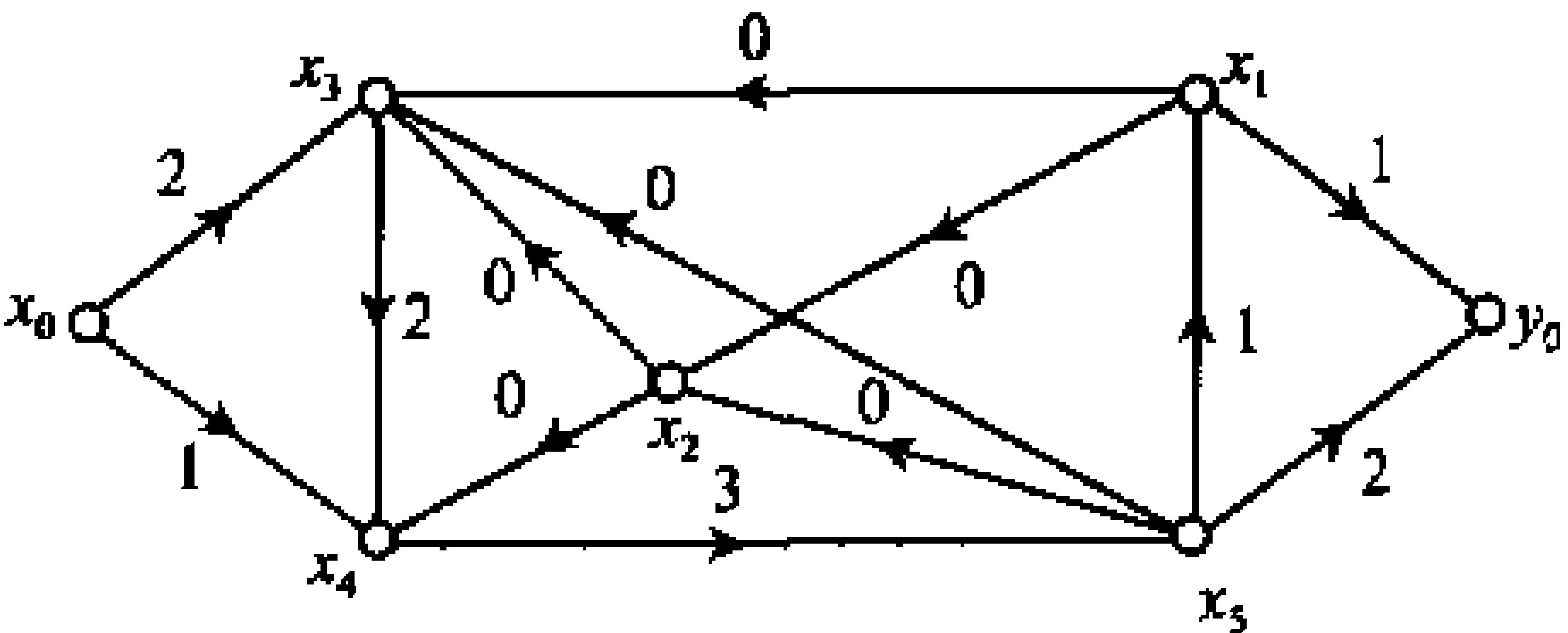
为此,我们构作费用容量网络 $N=(D'_{x_0y_0},b,c)$,其中 D'为在D 上添加两个新顶点 x_0 和 y_0,然后用容量为 $\rho(x)$,费用为 0 的起点 x_0 的边连接 x_0 到 X 中每个顶点 x;用容量为$-\rho(y)$,费用为 0 的终点为 y_0 的边连接 Y 中每个顶点 y 到 y_0. 当 $a\in E(D)$时,$b(a)=w(a)$,$c(a)=\infty$. 图 4.18(a)所示是 D'和 $N=(D'_{x_0y_0},b,c)$,其中 D 是图 4.16 中图.

于是 N 中每个单位(x_0,y_0)流 f_0 都可以视为 D 的一条(x,y)路 P_0,其中 $x\in X$,$y\in Y$. f_0 的费用 $b(f_0)=w(P_0)$. 由于 $E^+_{D'}(x_0)$和$E^-_{D'}(y_0)$都是 D'的$(x_0$,

y_0)截边集且容量均为 $\rho(D)$，D'的任何其它(x_0，y_0)截边集都有容量∞，所以 $E^+_{D'}(x_0)$和$E^-_{D'}(y_0)$都是 N 中具有最小容量的(x_0，y_0)截边集. 由最大流最小截定理(4.1)知，N 中最大(x_0，y_0)流 f 的流量 val $f=\rho(D)$. 因此，求解(i)的问题归结为求 N 中最小费用最大流问题. 而求后者已有 Klein 算法(见 4.5 节).



(a)　费用容量网络 $N=(D'_{x_0y_0},b,c)$



(b)　N 中最小费用最大流

图 4.18

归纳上述过程，我们叙述如下.

Edmonds-Johnson 算法：

1. 构造 D'和 $N=(D'_{x_0y_0},b,c)$；
2. 求 N 中最小费用最大流；
3. 构造 D^*；
4. 求 D^* 中 Euler 有向回，即最优邮路.

例 4.6.2　考虑图 4.16 中所示的强连通加权图(D，w). 由Edmonds-Johnson 算法，先构作 D'和 $N=(D'_{x_0y_0},b,c)$. 如图 4.18(a)中所示，边 a 上的数值分别是费用 $b(a)$和容量 $c(a)$. 利用 Klein 算法(当然，这里通过观察就可以)求出最小费用最大流 f 如图 4.18(b)中所示. 其中 $f(a)$表示边 a 在E^* 中出现的次数. D^*(即图 4.14 或图 4.17(a)中所示的图)和最优邮路

$$P=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_2,x_4,x_5,x_3,x_4,x_5,x_1,x_3,x_4,x_5,x_1)$$

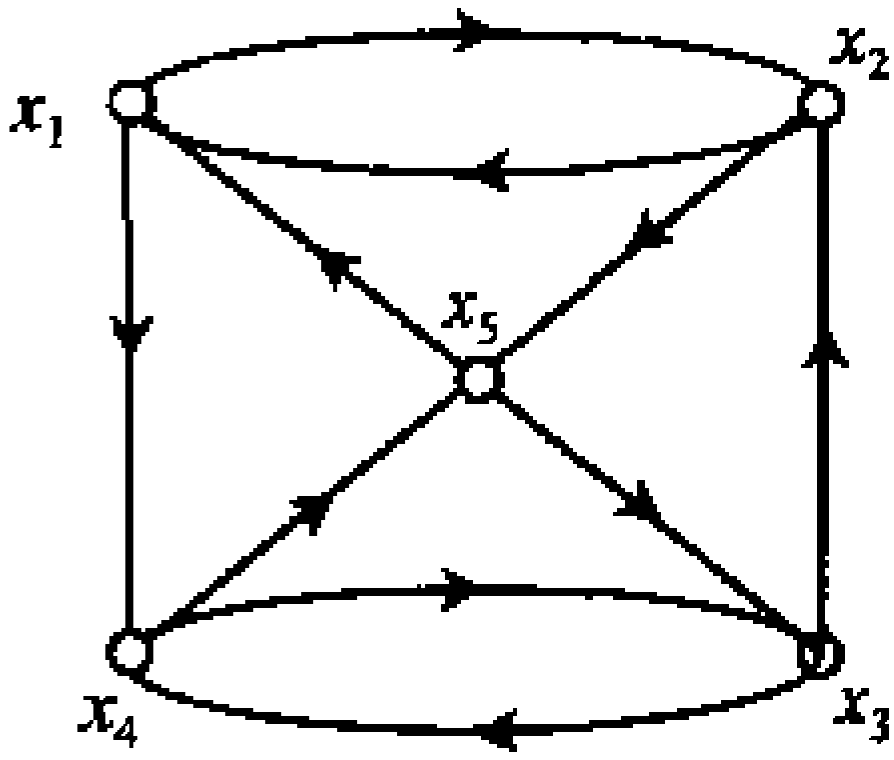
如图 4.17(a)所示，$w(P)=44$.　□

习　题

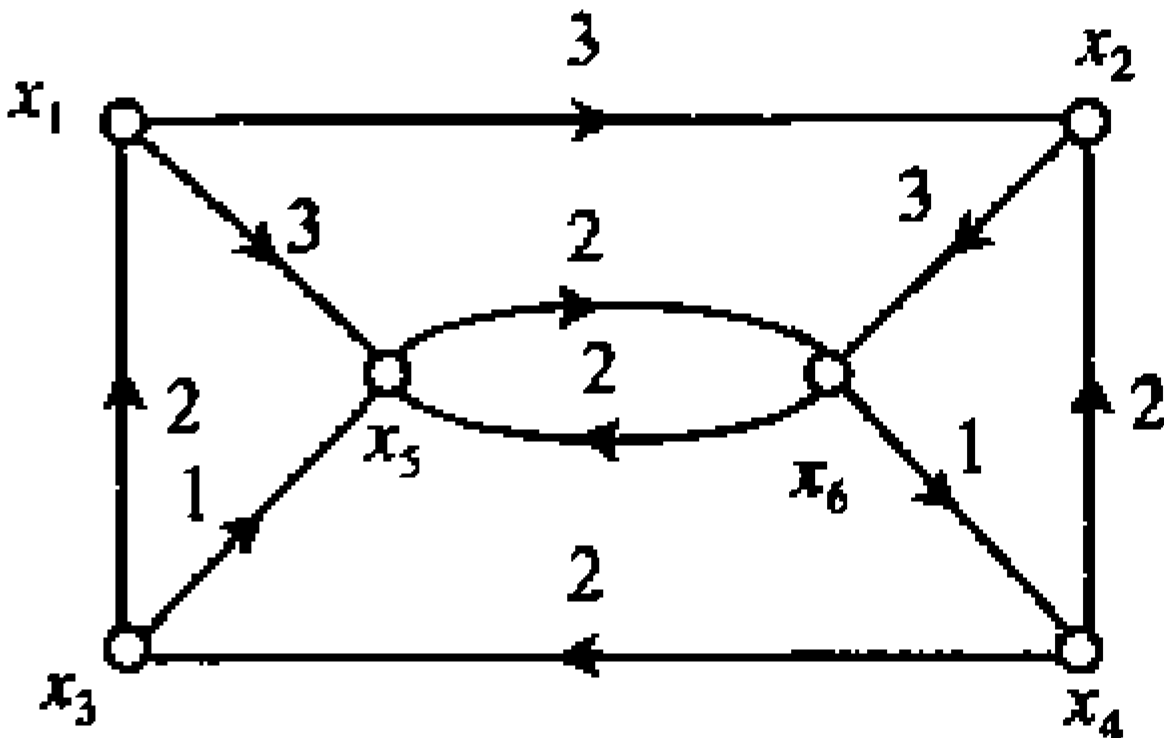
4.6.1　找出一个不含邮路的连通有向图.

4.6.2　利用 Edmonds-Johnson 算法求下列图中的一条 Euler 有向回.

4.6.3　求下列加权图中的一条最优邮路,并求其权和.

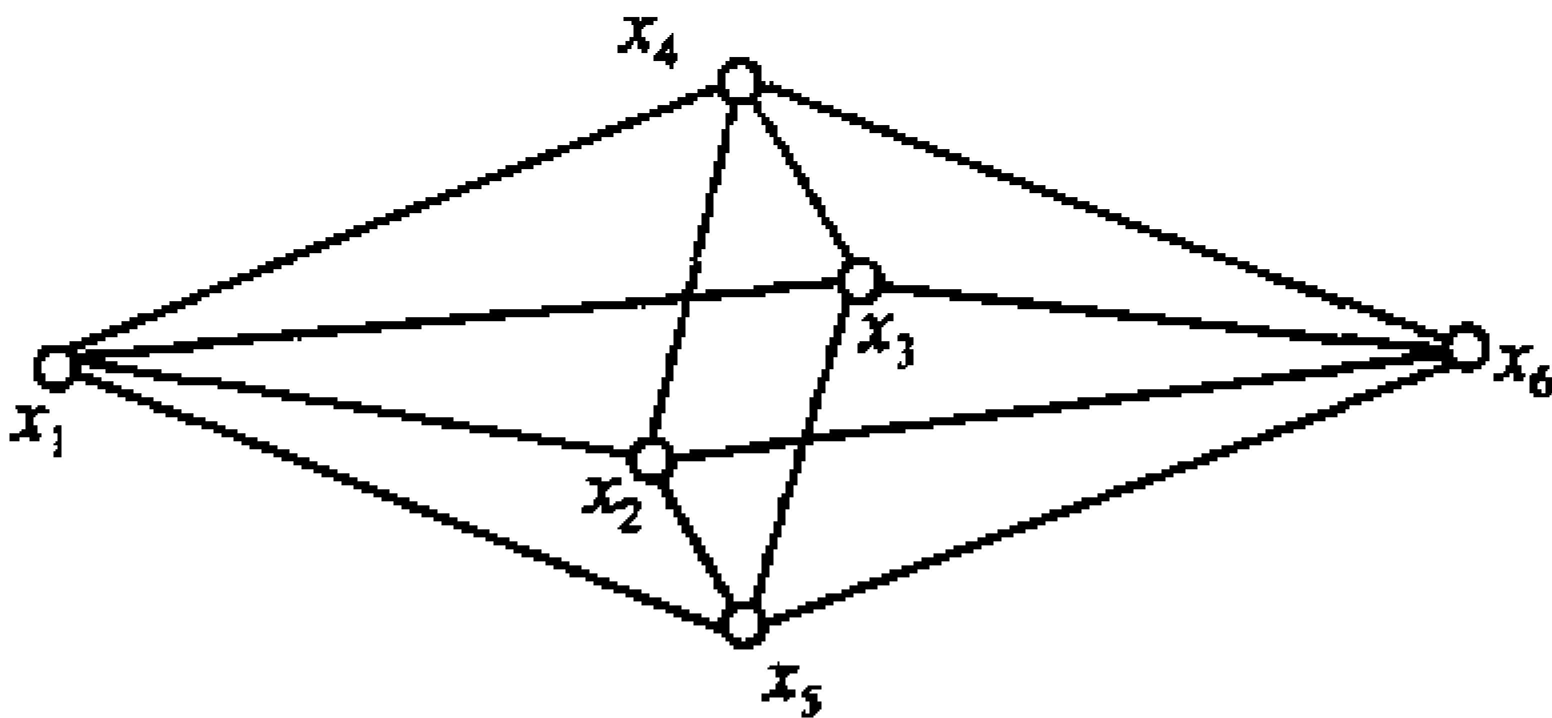


(习题 4.6.2)



(习题 4.6.3)

4.6.4　设 G 是 Euler 图. 求 G 中 Euler 回有下列有效的 **Fleury 算法**



(习题 4.6.4)

1. 令 $P_0=x_0$;
2. 假设 $P_i=x_0e_1x_1\cdots x_{i-1}e_ix_i$ 已确定. 取 $e_{i+1}\in E(G)\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 使得
   (i) $\psi_G(e_{i+1})=x_ix_{i+1}$;
   (ii) 除非无别的边选择,e_{i+1} 不是 $G_i=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 的割边.
3. 当第二步不能再执行时,停止.

(a)证明:若 G 是Euler图,则由Fleury算法构造出的迹 P 是 G 中一条Euler回.

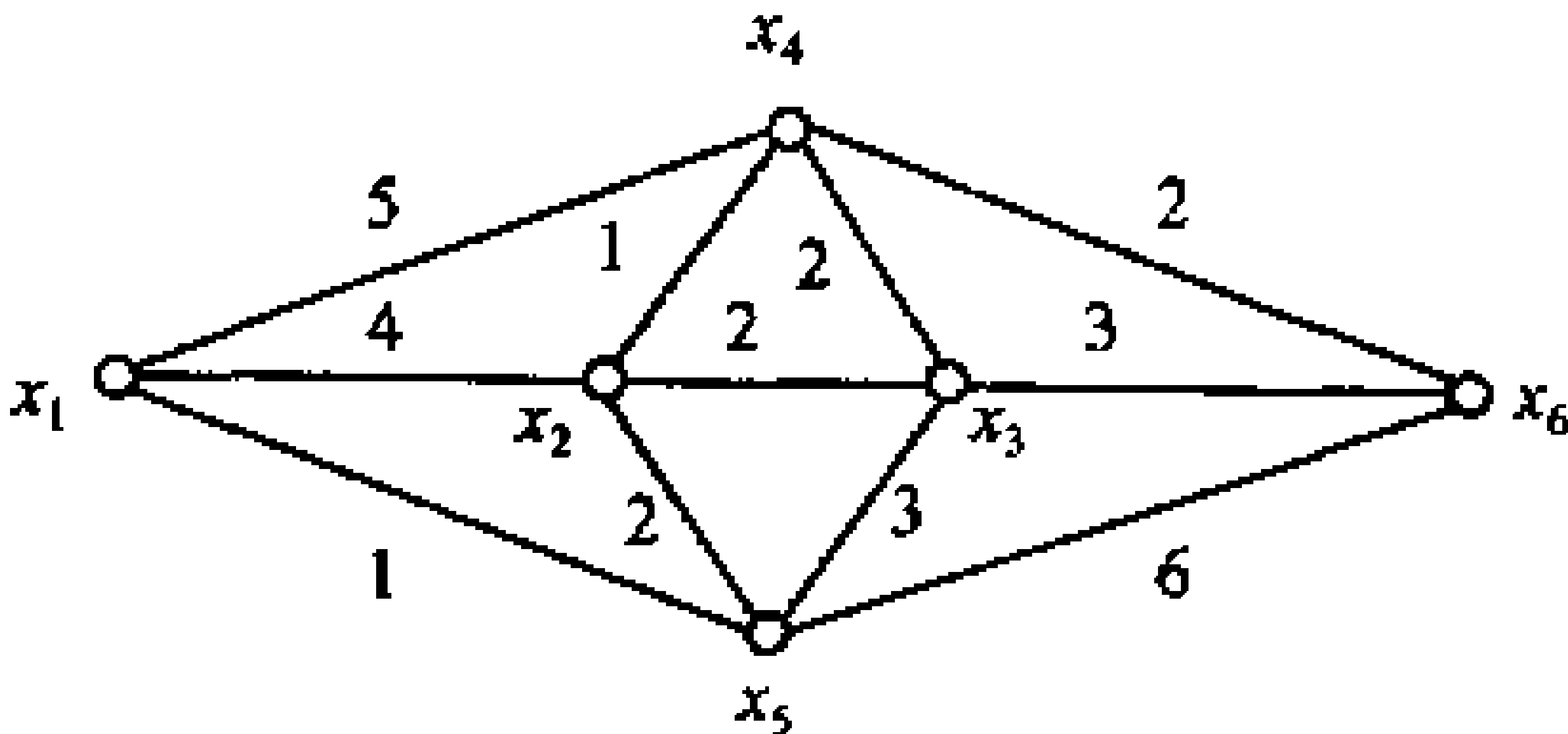
(b)利用 Fleury 算法求出上列图 G 中一条 Euler 回.

4.6.5　证明:加权无向图(G,w)中邮路 P 是最优的当且仅当它满足:

(i) P 中没有二重以上的边;

(ii) 在 G 的每条圈 C 中,属于重边集 E^* 的边权之和$\leqslant\frac{1}{2}w(C)$.　　(管梅谷, 1960)

4.6.6　求下列加权无向图中的一条最优邮路,并求其权和.



(习题 4.6.6)

4.7　方化矩形的构造

方化矩形(**squared rectangle**)是指可以剖分成有限个(至少两个)正方形的矩形. 若剖分出的任意两个正方形的大小均不相等,则称这个方化矩形是**完美的**(**perfect**). 剖分出来的正方形的数目称为这个方化矩形的**阶**(**order**). 若剖分出的正方形中包含一个较小的方化正方形,则称这个方化矩形为**复合的**,反之称为**简单的**. 显然每个方化矩形均由若干个简单方化矩形所组成.

图 4.19 表示一个 9 阶的简单完美矩形,它是由 Moron(1925)首先发现的.

方化矩形问题是个典型的组合数学问题,20 世纪 30 年代起,它引起了人们的兴趣. 到 40 年代,Brooks、Tutte 等人(1940)利用图论把完美矩形的构造发展成系统化的方法. 首先给出 9～11 阶完美矩形的一个明细表,并证明了完美矩形的最低阶是 9. 后来 Bouwkamp 等人(1964)用电子计算机列出了 9～18 阶的所有完美矩形. 各阶完美矩形的数目见下表所示.

阶 数	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
数 目	2	6	22	67	213	744	2609	9016	31427	110384

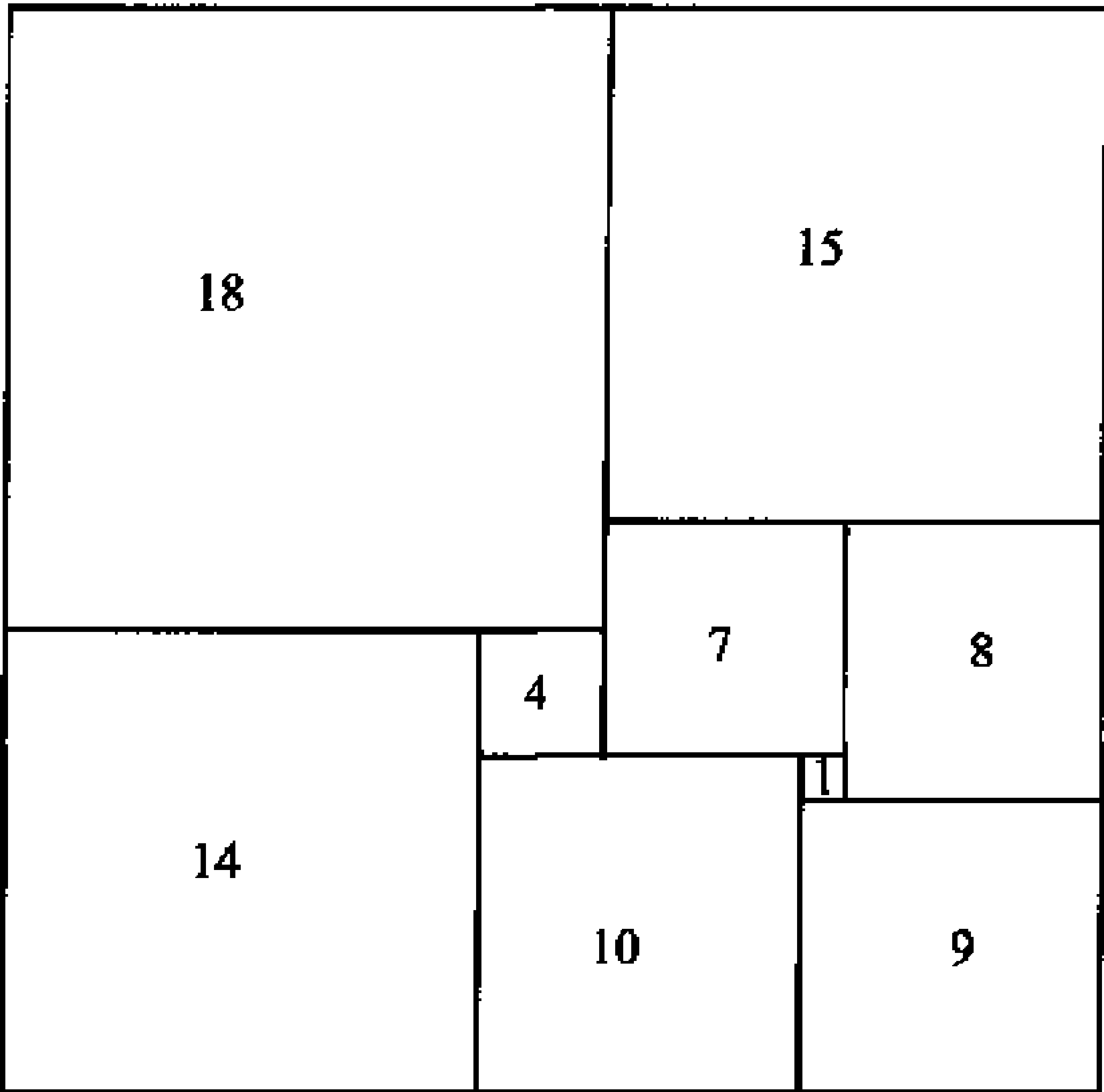


图 4.19　9 阶简单完美矩形

在很长一段时间内,人们不知道有完美正方形. Sprague(1939)通过把已求出的完美矩形中的某些拼起来,从而第一次发现了一个边长为 4205 的 55 阶完美正方形. Brooks 等人(1940)也利用这个方法得到一个边长为 608 的 26 阶完美正方形. Wilson 利用电子计算机找出一个边长为 112 的 25 阶完美正方形.

直到 1978 年，Duijvestijn 用电子计算机找到一个边长为 112 的 21 阶的完美正方形（见图 4.20）。它是唯一的 21 阶完美正方形而且是最低阶的完美正方形.

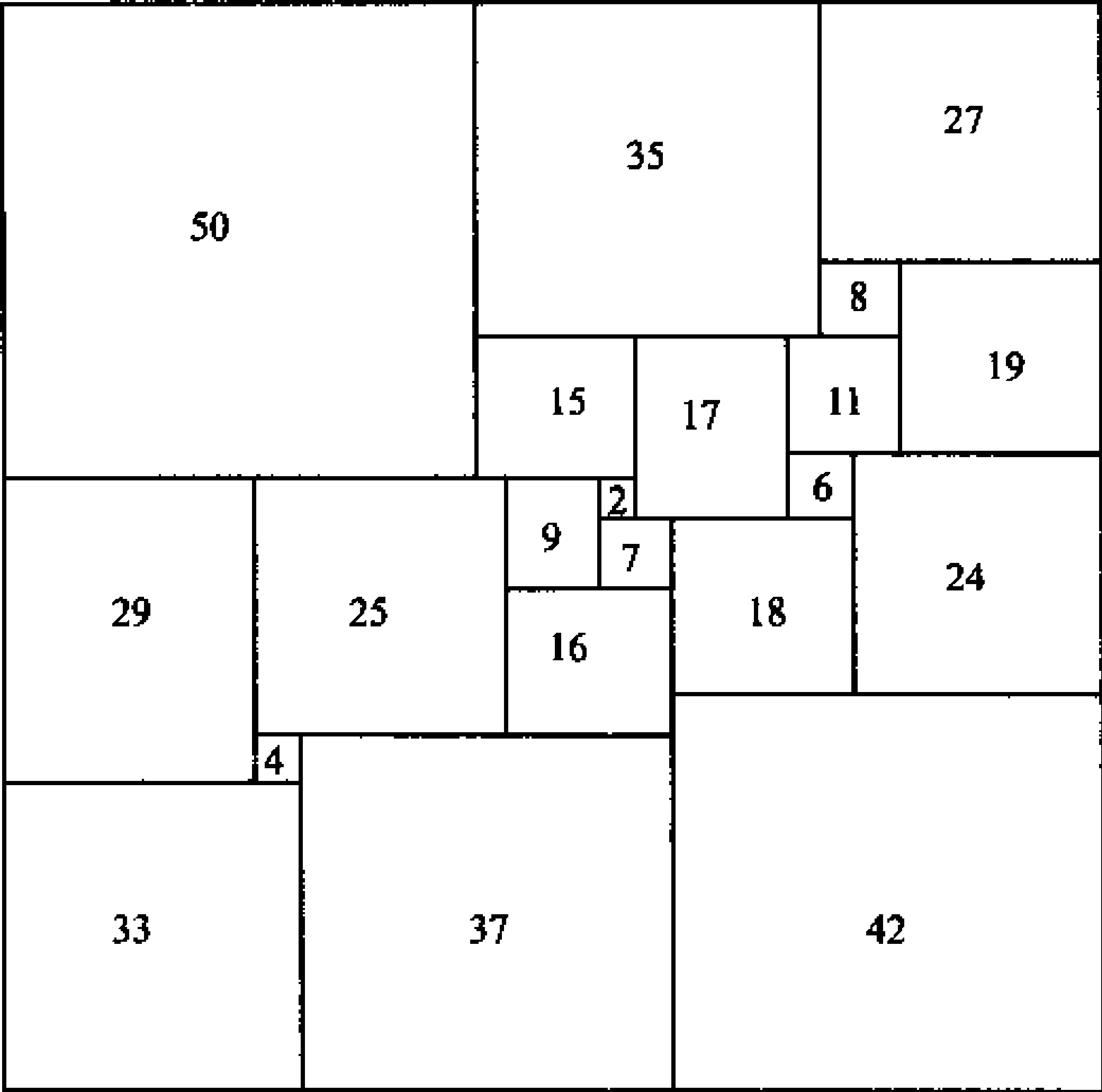


图 4.20　21 阶简单完美正方形

到目前为止，几个较低阶的完美正方形的数目如下表中所示.

阶 数	21	25	26	27	31
数 目	1	8	28	6	4

本节将 Brooks、Tutte 等人(1940)构造完美矩形的系统化方法做个简短介绍.

我们首先说明怎样把一个给定的 n 阶方化矩形 R 与一个简单有向图 D 联系起来. 剖分 R 成一些正方形的水平线段称为水平剖分线. 在图 4.21 中，水平剖分线用粗线标出.

设 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是 R 的所有水平剖分线. 定义图 D 如下：$V(D)=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$(x_i, x_j)\in E(D)\Leftrightarrow H_i$ 和 H_j 分别是某个正方形的上底和下底. 易知 $\varepsilon(D)=n$. 图 4.21(b)表示对应于图 4.21(a)中的方化矩形所对应的图 D.

于是寻找 n 阶完美矩形的一个可能的方法是：

对应于 R 的上底和下底的顶点分别用 x 和 y 表示.

定义 $p\in \mathscr{V}(D)$，对每个 $x_i\in V(D)$，$p(x_i)$为 x_i 对应的水平剖分线的高(超

过 R 下底的高度). 若我们将 x 和 y 分别看成发点和收点，则 D 可以看成是一个具有充分大容量的网络. 容易验证(习题 4.7.1)，由割向量 $g\in\mathscr{C}(D)$：

$$g(a)=p(x_i)-p(x_j),\quad \forall a=(x_i,x_j)\in E(D)$$

确定了一个(x,y)流(例如，见图 4.21(c)，其中(x,y)流 g 的流量 val $g=69$).

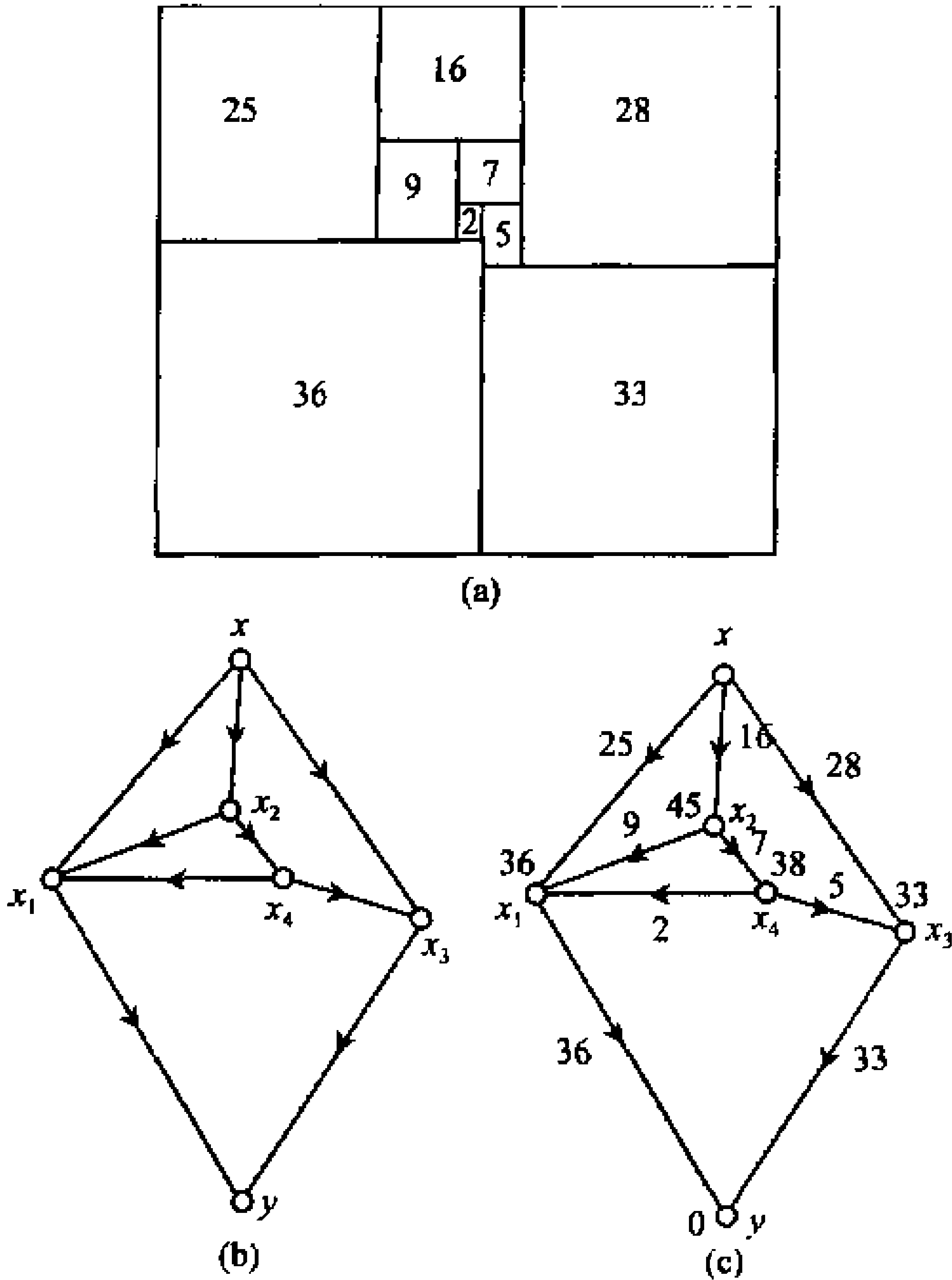


图 4.21　方化矩形和对应的有向图

设 D 是对应于方化矩形 R 的图，并设 G 是 D 的基础图，则 $G+xy$ 称为 R 的**水平图**. Brooks 和 Tutte 等人(1940)证明了：

任何简单方化矩形的水平图都是 3 连通平面图. 反之，若 H 是 3 连通平面图，并且 $xy\in E(H)$，则 $H-xy$ 中任一个由割向量确定的(x,y)流都确定一个方化矩形.

1. 列出所有具有$(n+1)$条边的 3 连通平面图；
2. 对每个这样的图 H 以及 H 中每条边 xy，在 $H-xy$ 中求出一个由割向量确定的(x,y)流.

下面介绍如何来计算图 D 中这样一个(x,y)流.

设 $\boldsymbol{g}\in\mathscr{B}(D)$是一个$(x,y)$流，并设 $\mathrm{val}\boldsymbol{g}=\sigma$，则

$$\sum_{a\in E} m_x(a)\boldsymbol{g}(a)=\sigma. \tag{4.17}$$

而对任何 $x_i\in V(D)\setminus\{x,y\}$有

$$\sum_{a\in E} m_{x_i}(a)\boldsymbol{g}(a)=0, \tag{4.18}$$

其中 $m_{x_i}(a)$表示 D 的关联矩阵$\boldsymbol{M}(D)$中顶点 x_i 所在行对应于边 a 的元素. 由于 $\boldsymbol{g}$ 是 D 的割向量，所以由定理 2.7 知它正交于每个圈向量，即

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{g}^T=0, \tag{4.19}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是圈空间 $\mathscr{C}(D)$中对应于某支撑树 T 的基矩阵，而 $\boldsymbol{g}^T$ 是向量 $\boldsymbol{g}$ 的转置. 由(4.17)~(4.19)式我们得到矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\boldsymbol{g}^T=\begin{bmatrix}\sigma\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是从 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中删去顶点 y 所在行后所得到的矩阵. 这个矩阵方程可以用 Cramer 法则求解. 由于

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\pm\tau(D)$$

(习题 2.4.1)，所以当 $\sigma=\tau(D)$时方程(4.20)有整数解. 于是在计算流 $\boldsymbol{g}$ 时，取值 $\mathrm{val}\,\boldsymbol{g}=\tau(D)$是合宜的.

下面举例说明上述方法.

例 4.7 考察图 4.22(a)中所示的 3 连通平面图 G，(b)所示的是 $G-xy$ 的

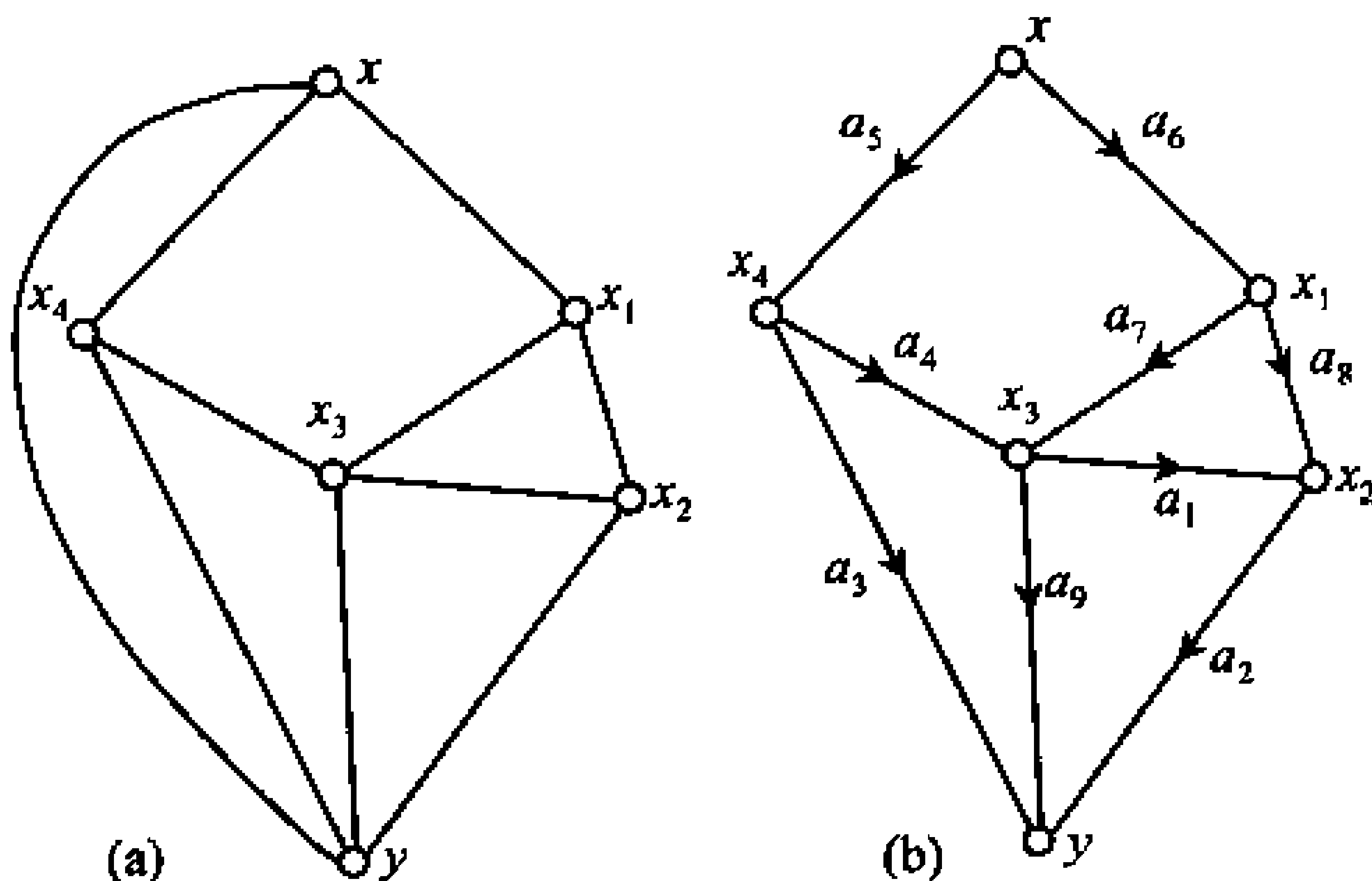


图 4.22

一个定向图 $D=(V(D),E(D))$，其中

$$V(D)=\{x,x_1,x_2,x_3,x_4,y\},$$

$$E(D)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}.$$

令 K 为 D 的关联矩阵 M 去掉 y 所在行后得到的矩阵，即

$$K=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1&1&1&0\\-1&1&0&0&0&0&0&-1&0\\1&0&0&-1&0&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\det KK^T=66$（见例 2.4.3），即 $\tau(D)=66$.

令 T 是由 $\{a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}$ 导出的支撑树. 于是圈空间 $\mathscr{C}(D)$ 中对应于支撑树 T 的基矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&0&0&-1&1&-1\\0&0&1&0&1&-1&-1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

设所要求的割向量 $g\in\mathscr{B}(D)$ 为

$$g=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7,g_8,g_9),$$

其中
$$g_i=g(a_i),\quad a_i\in E(D).$$

则由(4.19)式得下述由九个方程组成的方程组为

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1&1&1&0\\-1&1&0&0&0&0&0&-1&0\\1&0&0&-1&0&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&0&0&-1&1&-1\\0&0&1&0&1&-1&-1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\\g_4\\g_5\\g_6\\g_7\\g_8\\g_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}66\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

这个方程组的解是

$$(g_1,g_2,g_3,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7,g_8,g_9)$$
$$=(36,30,14,16,20,2,18,28,8).$$

基于这个割向量的方化矩形恰好是图 4.19 所示完美矩形中所有尺寸都放大一倍而得到的矩形. □

习　题

4.7.1　证明：在与方化矩形对应的有向图 D 中定义的割向量 $g\in\mathscr{B}(D)$ 确定了一个 (x,y) 流.

4.7.2　利用 Brooks 和 Tutte 等人的方法确定图 4.21(b)所示的图 D 中的一个 (x,y) 流 $g\in\mathscr{B}$

(D),并指出这个流所对应的方化矩形是什么?

4.7.3 证明:任何方化矩形的相邻两边长之比为有理数.

4.7.4 **完美立方体**是指能剖分为有限个(至少两个)较小立方体的一种立方体,且其中任两个小立方体的体积都不相同. 证明:不存在完美立方体.

小结与参考文献

本章介绍了连通度和网络流的基本理论和应用. Menger 定理和最大流最小截定理有一个共同的特点,即:已知两个函数 f 和 g,显然有 $f \leqslant g$,我们要证明 $\max f = \min g$. 这就是所谓的最小最大定理(minimax-theorem). 图论中这类定理很多,在第 5 章我们还要介绍一些. 有关这方面的材料,读者可参阅 Woodall(1978)的一篇综述文献以及田丰和马仲蕃(1987)著作的第十一章.

Menger 定理(4.3)的原始证明见 Menger(1927),它的背景材料见 Menger(1981). 它有许多变型和推广. 本章叙述的形式属于 Dirac(1963),它的最简单的直接证明见 Pym(1969)和 McCuaig(1984). 边形式的 Menger 定理(4.2)是由 Ford & Fulkerson(1956)和 Elias, Feinstain & Shannon(1956)在研究网络理论时,作为副产品独立发现的. 关于连通度研究结果和进展可参阅 Mader(1979), Bermond, Homopono & Peyrat(1989)和 Faudree(1993)的综述文献以及 Bollabás(1978)的著作第一章.

网络流理论是 Ford & Fulkerson(1962)建立和发展起来的. 最大流最小截定理(4.1)的发现和应用密切了图论与运筹学,特别是线性规划之间的关系. 标号法的复杂度为 $O(\nu\varepsilon^2)$. 20 世纪 70 年代之后,围绕减少最大流算法的复杂度相继出现了许多改进的方法. 有兴趣的读者可参阅田丰和马仲蕃(1987)著作的第九章. 关于中国投递员问题的研究进展、算法改进、问题的变型和推广以及各方面的应用,可参见管梅谷(1984)的综述报告. 方化矩形的历史及其研究进展可参见 Federico(1979)的综述文章,本节材料主要来源于 Bondy & Murty(1976)的第十二章.

连通度在计算机和通讯网络中有着重要的应用,是大规模并行和互连容错网络可靠性和有效性分析的基础. 鉴于篇幅有限,本书对此不能作介绍. 有兴趣的读者可参阅 Bermond, Homobono & Peyrat(1989), Boesch(1986), Faudree(1984)和 Hsu(1994)的报道和 Xu(2001)的专著.

1 Bermond J C, Homobono N and Peyrat C. Large fault-tolerant interconnection networks. *Graphs and combinatorics*, 1989, **5**: 107~123

2 Boesch F T. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network syn-

thesis. *J Graph Theory*, 1986, **10**: 339～352

3　Bollabás B. *Extremal Graph Theory*. London: Academic Press, 1978

4　Bondy J A and Murty U S R. *Graph Theory with Applications*. London and Basingstoke: MacMillan Press, 1976

5　Bouwkamp C J, Duijvestijn A J and Haubich J. Catalogue of simple perfect squared rectangles of 9 through 18. Philips Research Laboratories, Eindhoven, Netherlands, 1964 (unpublished, 12 vol. 3090 pp. listing 154,490 simple squared rectangles)

6　Brooks R L, Smith C A B, Stone A H and Tutte W T. The dissection of rectangles into squares. *Duke Math J*, 1940, **7**: 312～340

7　Dirac G A. Extensions of Menger's theorem. *J London Math Soc*, 1963, **38**(3): 148～161

8　Duijvestijn A J W. Simple perfect squared of lowest order. *J. Combinatorial Theory* (B) 1978, **25**: 240～243

9　Edmonds J and Karp R M. Theoretical improvements. *J Assoc Comput Math*, 1972, **19**: 248～264

10　Edmonds J and Johnson E L. Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Math Programming*, 1973, **5**: 88～124

11　Elias P, Feinstain A and Shannon C F. A note on the maximum flow through a networks. *IRE Trans Inform Theory*, 1956, IT-**2**: 117～119

12　Faudree R J. Some strong veriations of connectivity. *Combinatorics, Paul Erdös is Eighty* (Volume **1**). Hungary: Keszthely, 1993, 125～144

13　Federico P J. Squaring rectangles and squares. *Graph Theory and Related Topics* (edited by Bondy J A and Murty U S R). New York: Academic Press, 1979. 173～196

14　Ford L R Jr and Fulkerson D R. Maximal flow through a network. *Canad J Math*, 1956, **8**: 399～404

15　Ford L R Jr and Fulkerson D R. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. *Canad J Math*, 1957, **9**: 210～218

16　Ford L R Jr and Fulkerson D R. *Flows in Networks*. Princeton: Princeton University Press, 1962

17　管梅谷. 奇偶点图上作业法. 数学学报, 1960, **10**: 263－266

18　管梅谷. 中国投递员问题综述. 数学研究与评论, 1984, **4**(1): 113－119

19　Hsu D F. On container width and length in graphs, groups and networks. *IEICE Trans Fundam*, 1994, E(**77**A): 668～680

20　Klein M. A primal method for minimal cost flows. *Man Sci*, 1967, **14**: 205～220

21　Lovász L. Connectivity in digraphs. *J Combin Theory* (B), 1973, **15**: 174－177

22　Mader W. Connectivity and edge-connectivity in finite graphs. *London Math Lecture, Note Series*, 1979, **38**: 66～95

23　McCuaig W. A simple proof of Menger's theorem. *J Graph Theory*, 1984, **8**: 427～429

24　Menger K. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Math*, 1927, **10**: 96～115

25 Menger K. On the origin of the n-arc theorem. *J Graph Theory*, 1981, **5**: 341～350

26 Moron Z. On the dissection of a rectangle into squares. *Przeglad Mati Fiz*, 1925, **3**: 152～153

27 Pym J S. A proof Menger's theorem *Monatsh Math*, 1969, **73**: 81～83

28 Sprague R. Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate. *Math Z*, 1939, **45**: 607～608

29 田丰，马仲蕃. 图与网络流理论. 北京：科学出版社，1987

30 Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer J Math*, 1932, **54**: 150～168

31 Woodall D R. Minimax theorems in graph theory. *Selected Topics in Graph Theory* (edited by Beineke L W & Wilson R J). London: Academic Press, 1978. 237～269

32 Xu Junming(徐俊明). *Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001

第 5 章　匹配与独立集

本章主要介绍匹配(即互不相邻的边子集)的基本理论和应用. 很多问题通过构造适当的图就可以直接归结为匹配问题。有些问题虽然不能直接归结为匹配问题,但其中某些子问题的解决需要借助于匹配,如 5.5 节中的货郎担问题. 在第六章,我们还将看到,所谓图的边色数就是该图中边不交匹配的最小数目. 本章介绍的有关匹配理论,如 Hall 定理,König 定理以及 Tutte 定理都是 Menger 定理或者最大流最小截定理的直接应用. 因此,这一章实质上是第四章内容的延续和发展. 这些定理的发现是独立的,然而它们之间都是等价的. 正是这些等价定理把图论,组合数学,矩阵论和线性规划紧密地联系在一起. 这决不是偶然的巧合,而恰恰是从各个不同的角度揭示了图论的数学本质。

与匹配相对应的概念是顶点独立集(即互不相邻的顶点子集). 独立集也是图论中 重要概念,我们将在 5.2 节介绍它. 我们还介绍最大独立集与连通度,最大独立集与 Hamilton 圈之间的关系.

在应用部分,我们介绍人员安排问题和最优安排问题的两个有效算法,即匈牙利算法和 Kuhn-Munkres 算法,其实质是判定已知 2 部分图中是否存在完备匹配和求最大权或最小权完备匹配. 作为匹配理论和 Kuhn-Munkres 算法的应用,我们将给出工作排序问题和货郎担问题的一个近似解. 最后介绍求最大独立集的枚举法。

本章所涉及的图都是无环图.

5.1　匹　配

设 D 是无环非空图,M 是 $E(D)$ 的非空子集. 若 M 中任何两条边在 D 中均不相邻,则称 M 为 D 的**匹配(matching)**. 例如,在图 5.1 所示图中,粗边所示的边集是该图的一个 匹配. D 中与 M 中边关联的顶点称为 M **饱和点(saturated vertex)**. 反之,称为**非 M 饱和点(unsaturated vertex)**. 设 $X\subseteq V(D)$. 若 X 中每点都是 M 饱和点,则称 M **饱和** X. 若 M 饱和 $V(D)$,则称 M 为 D 的**完备匹配(perfect matching)**. 若对 D 的任何匹配 M' 均有 $|M'|\leqslant|M|$,则称 M 为 D 的**最大匹配(maximum matching)**. 显然,每个完备匹配都是最大匹配,反之不真.

由于这些概念均与边的方向无关,所以我们只需讨论无向图 G 中的匹配问

题. 图 5.1 中粗边所示的匹配分别是该图的最大匹配和完备匹配.

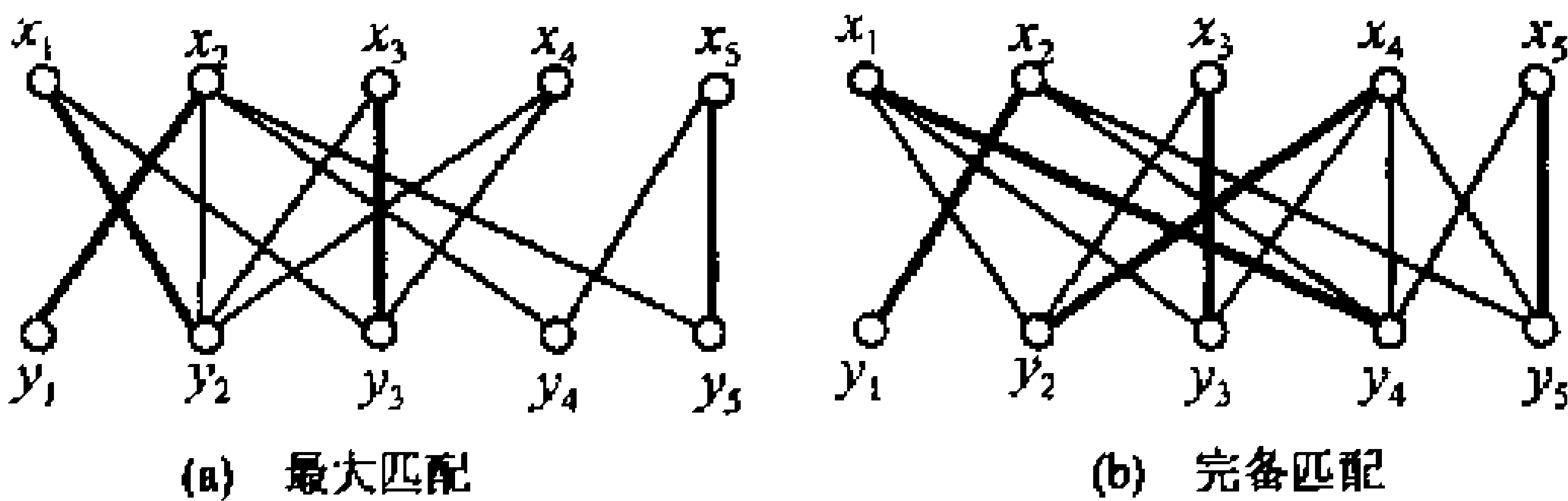


图 5.1

图 G 应满足什么条件才有完备匹配呢? 这是我们在本节中关心的主要问题. 先看 G 是 2 部分图的情形.

下面的定理被称为 Hall 定理,是组合数学中最基本的定理之一. 它有各种表达形式, 其图论表达形式为

定理 5.1(Hall 定理,Hall,1935) **设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图, 则: G 有饱和 X 的匹配**$\Leftrightarrow$

$$|N_G(S)|\geqslant|S|,\qquad \forall S\subseteq X. \tag{5.1}$$

证明 ($\Rightarrow$)设 M 是 G 中饱和 X 的匹配,并设 $S\subseteq X$. 由于 M 将 S 中每个顶点与 $N_G(S)$ 中顶点配对,所以应有

$$|N_G(S)|\geqslant|S|.$$

($\Leftarrow$)令 M 是 G 中最大匹配. 我们只需证明 $|M|\geqslant|X|$.

令 H 是由 G 的每条边给定从 X 到 Y 的方向后所得到的定向图. 构作有向图 D(参见图 5.2):

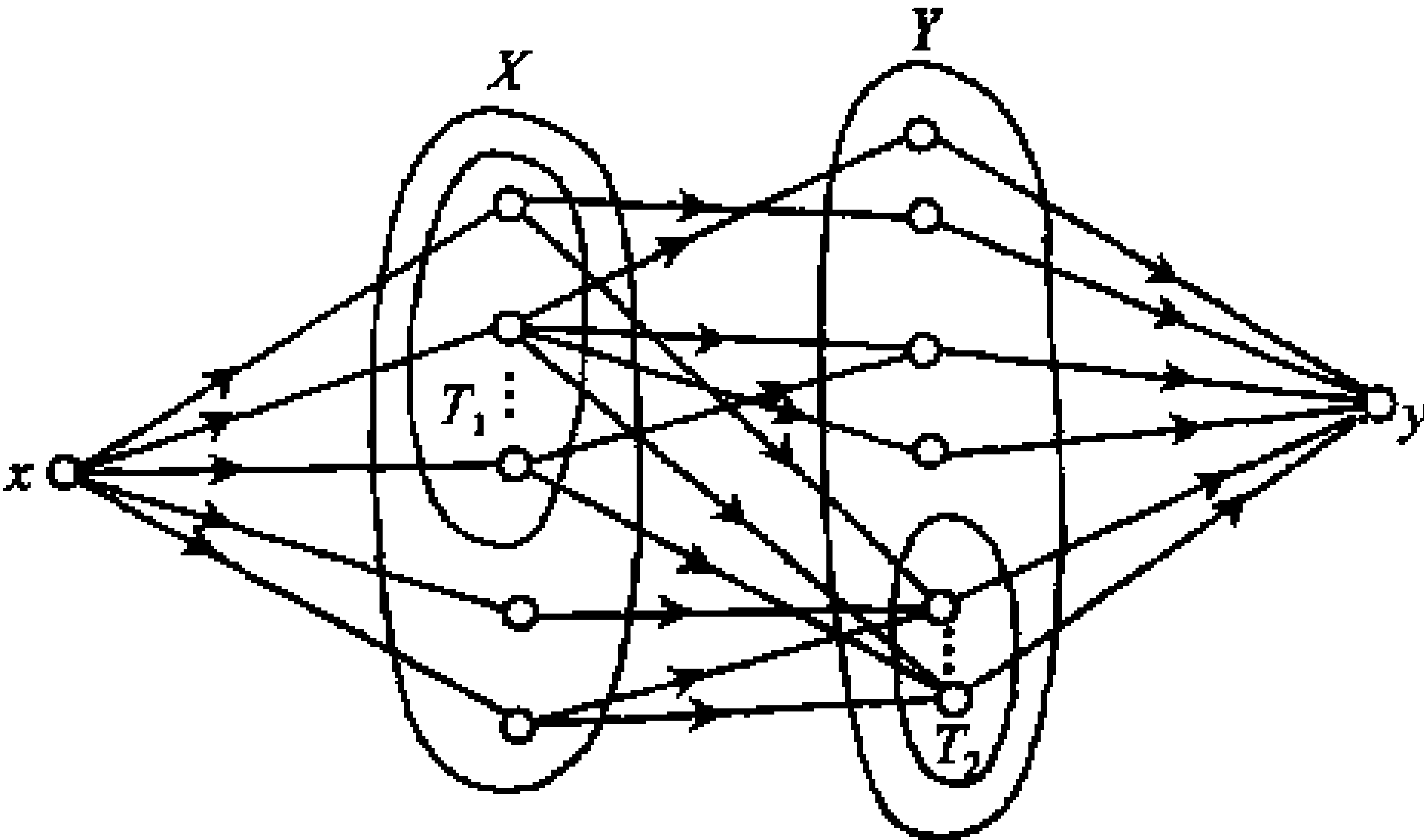


图 5.2

$$V(D)=V(H)\cup\{x,y\},$$

$$E(D)=E(H)\cup\{(x,x'):x'\in X\}\cup\{(y',y):y'\in Y\}.$$

因此,D 中内点不交从 x 到 y 有向路的最大条数为 $|M|$. 令 T 是 D 中最小 (x,y) 分离集. 由 Menger 定理(4.3),有

$$|M| = \zeta_D(x,y) = \kappa_D(x,y) = |T|.$$

令

$$T_1 = T\cap X, \qquad T_2 = T\cap Y.$$

则 $E_D(X\setminus T_1, Y\setminus T_2)=\varnothing$，即 $N_D^+(X\setminus T_1)\subseteq T_2$. 所以

$$\begin{aligned}|M| &= |T_1| + |T_2| \\ &\geqslant |T_1| + |N_D^+(X\setminus T_1)| \\ &= |T_1| + |N_G(X\setminus T_1)| \\ &\geqslant |T_1| + |X\setminus T_1| = |X|.\end{aligned}$$ □

我们已从 Menger 定理导出 Hall 定理，但也可以从 Hall 定理导出 Menger 定理，其证明留给读者(习题 5.1.11).

Hall 定理(5.1)有许多个直接证明. 下面给出两个，以飨读者. 只需证明条件(5.1)的充分性.

证法 1 (Halmos & Vaughan，1950)　对 $|X|\geqslant 1$ 用归纳法.

当 $|X|=1$ 时，条件(5.1)显然是充分的，以下进行归纳步骤.

假设对任何 $\varnothing\neq S\subseteq X$ 均有 $|N_G(S)|\geqslant|S|+1$. 取 $x\in S, y\in N_G(x)$. 则 $G'=G-\{x,y\}$ 是 2 部分图且满足条件(5.1). 于是由归纳假设，G' 中有饱和 $(X\setminus\{x\})$ 的匹配 M'. 因此，$M=M'\cup\{xy\}$ 是 G 中饱和 X 的匹配.

假设存在 $\varnothing\neq S\subseteq X$ 使 $|N_G(S)|=|S|$. 令 $G_1=G[S\cup N_G(S)]$，$G_2=G-(S\cup N_G(S))$. 则 G_1 和 G_2 都是 2 部分图，而且 G_1 显然满足条件(5.1). 任取 $\varnothing\neq S'\subseteq X\setminus S$，则

$$\begin{aligned}|N_{G_2}(S')| &\geqslant |N_G(S\cup S')| - |N_{G_1}(S)| \\ &\geqslant |S\cup S'| - |S| = |S'|.\end{aligned}$$

所以 G_2 也满足条件(5.1). 于是，由归纳假设，G_1 中存在饱和 S 的匹配 M_1，G_2 中存在饱和 $(X\setminus S)$ 的匹配 M_2. 因此 $M=M_1\cup M_2$ 是 G 中饱和 X 的匹配. □

证法 2 (Rado，1967)　设 G 是满足条件(5.1)，而且边数尽可能少的图. 我们只需证明 G 的边集正好是一个由 $|X|$ 条边组成的匹配.

(反证法)若不然，则存在两条边 x_1y, x_2y，其中 $x_1, x_2\in X, y\in Y$. 由 G 的极小性，删去这两条边中任何一条都将导致条件(5.1)不成立. 于是存在子集 X_1，$X_2\subset X$ 使得 $|N(X_i)|=|X_i|$，且 x_i 是 X_i 中唯一与 y 相邻的顶点$(i=1,2)$，即有

$$\begin{aligned}|N(X_1)\cap N(X_2)| &= |N(X_1\setminus\{x_1\})\cap N(X_2\setminus\{x_2\})|+1 \\ &\geqslant |N(X_1\cap X_2)|+1\geqslant |X_1\cap X_2|+1.\end{aligned}$$

由此得

$$|N(X_1\cup X_2)| = |N(X_1)\cup N(X_2)|$$

$$
\begin{aligned}
&=|N(X_1)|+|N(X_2)|-|N(X_1)\cap N(X_2)|\\
&\leqslant|X_1|+|X_2|-|X_1\cap X_2|-1\\
&=|X_1\cup X_2|-1.
\end{aligned}
$$

这矛盾于条件(5.1). □

由 Hall 定理,我们立即得到判别 2 部分图是否有完备匹配的下列准则.

推论 5.1.1(婚姻定理,Forbenius,1917)　**2 部划分为**$\{X,Y\}$**的 2 部分图** G **有完备匹配**$\Leftrightarrow|X|=|Y|$**,并且对任何** $S\subseteq X$(**或** Y)**均有**$|N_G(S)|\geqslant|S|$.

推论 5.1.2(König,1916)　**设** G **是** $k(>0)$**正则 2 部分图,则** G **有完备匹配.**

证明　设 G 是 2 部划分为$\{X,Y\}$的 k 正则 2 部分图,则

$$k|X|=|E(G)|=k|Y|.$$

由于 $k\neq0$,所以$|X|=|Y|$. 任取 $S\subseteq X$,并用 E_1 和 E_2 分别表示 G 中与 S 和 $N_G(S)$中点关联的边集,则 $E_1\subseteq E_2$. 因而

$$k|N_G(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k|S|,$$

即

$$|N_G(S)|\geqslant|S|,\quad\forall S\subseteq X.$$

由 Hall 定理(5.1)知 G 有饱和 X 的匹配 M. 由于$|X|=|Y|$,所以 M 是完备匹配. □

注　推论 5.1.2 中条件"G 是 2 部分图"不可少. 事实上,对任何 $k(\geqslant2)$,存在 k 正则简单图使其不含完备匹配(习题 5.1.2(c)).

推论 5.1.3　**设** G **是 2 部划分为**$\{X,Y\}$**的简单 2 部分图,而且**$|X|=|Y|=n$. **若** $\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$,则 G 有完备匹配.

证明　任取 $S\subseteq X$. 若$|N(S)|<|S|$,则由于 G 是简单 2 部分图且 $\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$,所以$|S|>|N(S)|\geqslant\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$, 而且 $Y\backslash N(S)\neq\varnothing$. 令 $u\in Y\backslash N(S)$,则 $N(u)\subseteq X\backslash S$,即

$$\delta(G)\leqslant d_G(u)=|N(u)|\leqslant|X|-|S|<n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2},$$

矛盾于 $\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$的假定. 因此有

$$|N(S)|\geqslant|S|,\quad\forall\ S\subseteq X.$$

由 Hall 定理和$|X|=|Y|$知 G 有完备匹配. □

注　条件“$\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$”不能修改为“$\delta(G)\geqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$”. 例如，$G=K_{2,3}+K_{3,2}$ 中不含完备匹配.

对于一般的图有完备匹配的一个充要条件由 Tutte(1947)获得. 下面的定理有许多证明，这里的证明是 Mader(1973)给出的.

定理 5.2(Tutte 定理)　**G 有完备匹配$\Leftrightarrow$**

$$o(G-S)\leqslant|S|\quad\forall\ S\subset V(G)\tag{5.2}$$

其中 $o(G-S)$ 是 $G-S$ 的奇阶连通分支数目.

证明　显然只须对简单图证明这个定理就行了.

($\Rightarrow$)设 M 是 G 的一个完备匹配，并设 $S\subset V(G)$，$G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 $G-S$ 的奇阶连通分支. 所以存在 $u_i\in V(G_i)$ 和 $w_i\in S$ 使 $\{u_iw_i:\ i=1,2,\cdots,n\}\subseteq M$. 于是

$$o(G-S)=n=|\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}|\leqslant|S|.$$

($\Leftarrow$)当 $S=\varnothing$ 时，由(5.2)式有 $o(G-S)=0$，所以 ν 为偶数. 对偶数 $\nu\geqslant2$ 用归纳法. 当 $\nu=2$，结论成立. 假设结论对任何 $<\nu$(偶)阶且满足(5.2)式的图成立，并设 G 是满足(5.2)式的 $\nu(\geqslant4$ 的偶数)阶图. 设 U 是 $V(G)$ 中使(5.2)式等号成立的最大非空子集. 令 $|U|=m$，并令 $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 是 $G-U$ 的奇分支，则有下列三个结论：

(i)$G-U$ 无偶分支. 事实上，设 H 是 $G-U$ 的一个偶分支，$u\in V(H)$，则

$$m+1\leqslant o(G-(U\cup\{u\}))\leqslant|U\cup\{u\}|=m+1,$$

即 $o(G-(U\cup\{u\}))=|U\cup\{u\}|$. 矛盾于 U 的选取.

(ii)任取 $x\in G_i$，则 G_i-x 有完备匹配. 若不然，由归纳假设存在 $S\subset V(G_i-x)$ 使得 $o((G_i-x)-S)>|S|$. 由于 $o((G_i-x)-S)$ 与 $|S|$ 有相同的奇偶性. 所以

$$o((G_i-x)-S)\geqslant|S|+2.$$

于是

$$\begin{aligned}|U|+1+|S|&=|U\cup S\cup\{x\}|\\&\geqslant o(G-(U\cup S\cup\{x\}))\\&=o(G-U)-1+o((G_i-x)-S)\\&\geqslant|U|+1+|S|.\end{aligned}$$

即
$$o(G-(U\cup S\cup\{x\}))=|U\cup S\cup\{x\}|>|U|,$$

矛盾于 U 的选取.

(iii)G 含匹配 $M=\{s_it_i:\ s_i\in U,t_i\in V(G_i),i=1,\cdots,m\}$. 事实上，考虑 2 部划分为 $\{V_1,V_2\}$ 的 2 部分图 H，其中 $V_1=\{G_1,\cdots,G_m\}$，$V_2=U$，G_i 与 U 中点 s 在 H 中相邻$\Leftrightarrow G$ 含从 s 到 G_i 中点的边. 于是(iii)成立$\Leftrightarrow H$ 有饱和 V_1 的匹配. 任取 $A\subseteq V_1$，并令 $B=N_H(A)\subseteq V_2$. 则由于 A 中元素都是 $G-B$ 的奇分支和

(5.2),有

$$|A|\leqslant o(G-B)\leqslant|B|=|N_H(A)|,$$

即 A 满足 Hall 定理中条件(5.1). 于是(iii)成立.

综合(i),(ii),(iii)(参见图 5.3),定理得证. □

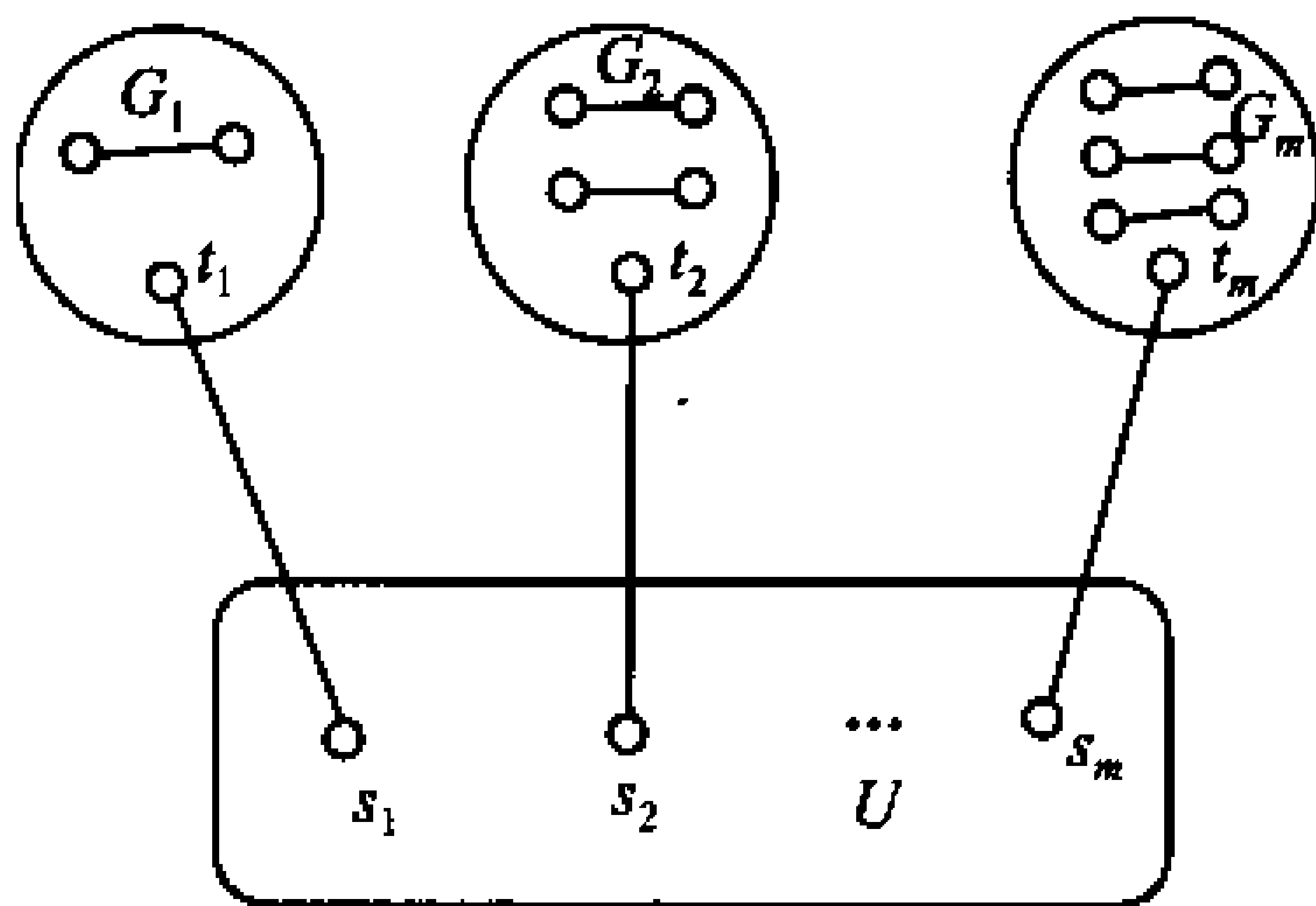


图 5.3

推论 5.2　偶阶$(k-1)$边连通 $k(\geqslant1)$正则图有完备匹配.

证明　当 $k=1$ 时,结论显然成立. 以下假定 $k\geqslant2$. 令 S 是偶阶$(k-1)$边连通 k 正则图 G 的非空顶点子集,$G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 $G-S$ 的奇分支,$m_i=|E_G(V(G_i),S)|$, $\nu_i=\nu(G_i)$. 由于$\lambda(G)\geqslant k-1$,所以 $m_i\geqslant k-1(i=1,2,\cdots,n)$. 若存在某个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$使 $m_i=k-1$,则

$$\varepsilon(G_i)=\frac{1}{2}(k\nu_i-k+1)=\frac{1}{2}k(\nu_i-1)+\frac{1}{2}.$$

上式右端不为整数,所以 $m_i\geqslant k,i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$o(G-S)=n\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}m_i\leqslant\frac{1}{k}\sum_{u\in S}d_G(u)=|S|.$$

当 $S=\varnothing$时,由于 ν 为偶数,所以

$$o(G-S)=o(G)=0=|\varnothing|.$$

因此　　$o(G-S)\leqslant|S|,\ \forall S\subset V(G).$

所以 S 满足(5.2)式. 由 Tutte 定理知 G 有完备匹配. □

推论 5.2.1(Petersen,1891)　**2 边连通 3 正则图有完备匹配.**

证明　因为 G 是 3 正则图,所以由推论 1.1.2 知 G 是偶阶. 再由推论 5.2,立即可知该结论成立. □

注　推论 5.2.1 中条件"2 边连通"是不可缺少的. 一个著名的例子见图 5.4 所示. 因为 $o(G-x)=3$,所以由 Tutte 定理知其不含完备匹配.

由推论 5.2 知,偶阶完全图 $K_{2n}(n\geqslant1)$有完备匹配. 事实上,我们可以直接

构造出 K_{2n} 的 $(2n-1)$ 个互不相交的完备匹配. 作为推论 5.2 的推论叙述如下.

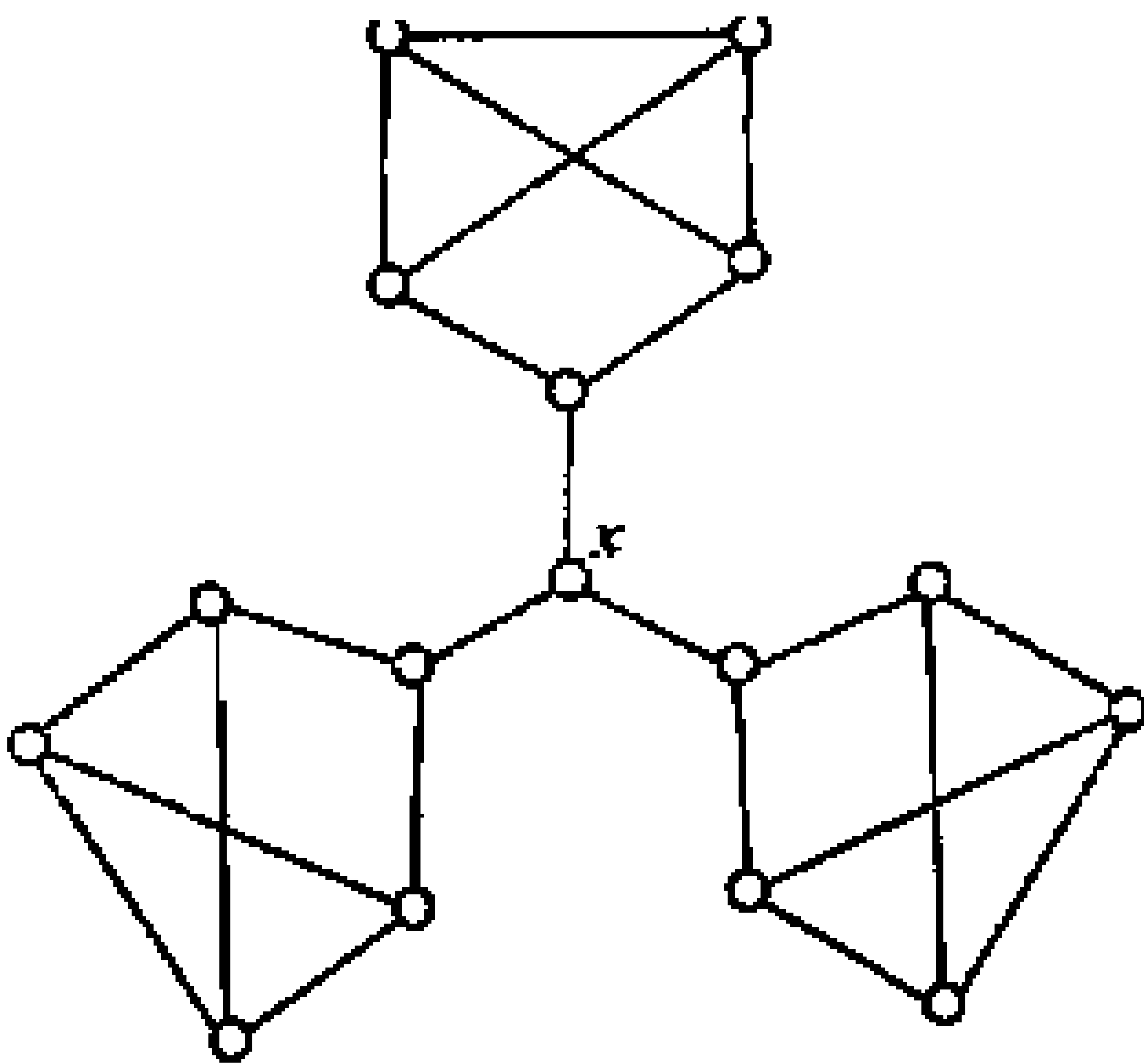


图 5.4

推论 5.2.2 完全图 K_{2n} 有 $(2n-1)$ 个互不相交的完备匹配.

证明 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 下设 $n\geq 2$.

令 $V(K_{2n})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\}$, 并对每个 $i=1,2,\cdots,2n-1$, 令 $E(K_{2n})$ 的子集

$$M_i=\{x_ix_{2n}\}\cup\{x_{i-j}x_{i+j}:j=1,2,\cdots,n-1\},$$

其中 $(i-j)$ 和 $(i+j)$ 都是 $(\bmod 2n-1)$ 的. 也可以按下列方法得到 M_i: 将平面上正 $(2n-1)$ 边形的点代表 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n-1}$, 而该正边形的中心点代表 x_{2n}, 并用直线段连接每对顶点. 于是 M_i 的边即为 x_ix_{2n} 和所有与 x_ix_{2n} 垂直的边. 例如, 当 $n=3$ 时, $M_i(i=1,2,\cdots,5)$ 如图 5.5 所示.

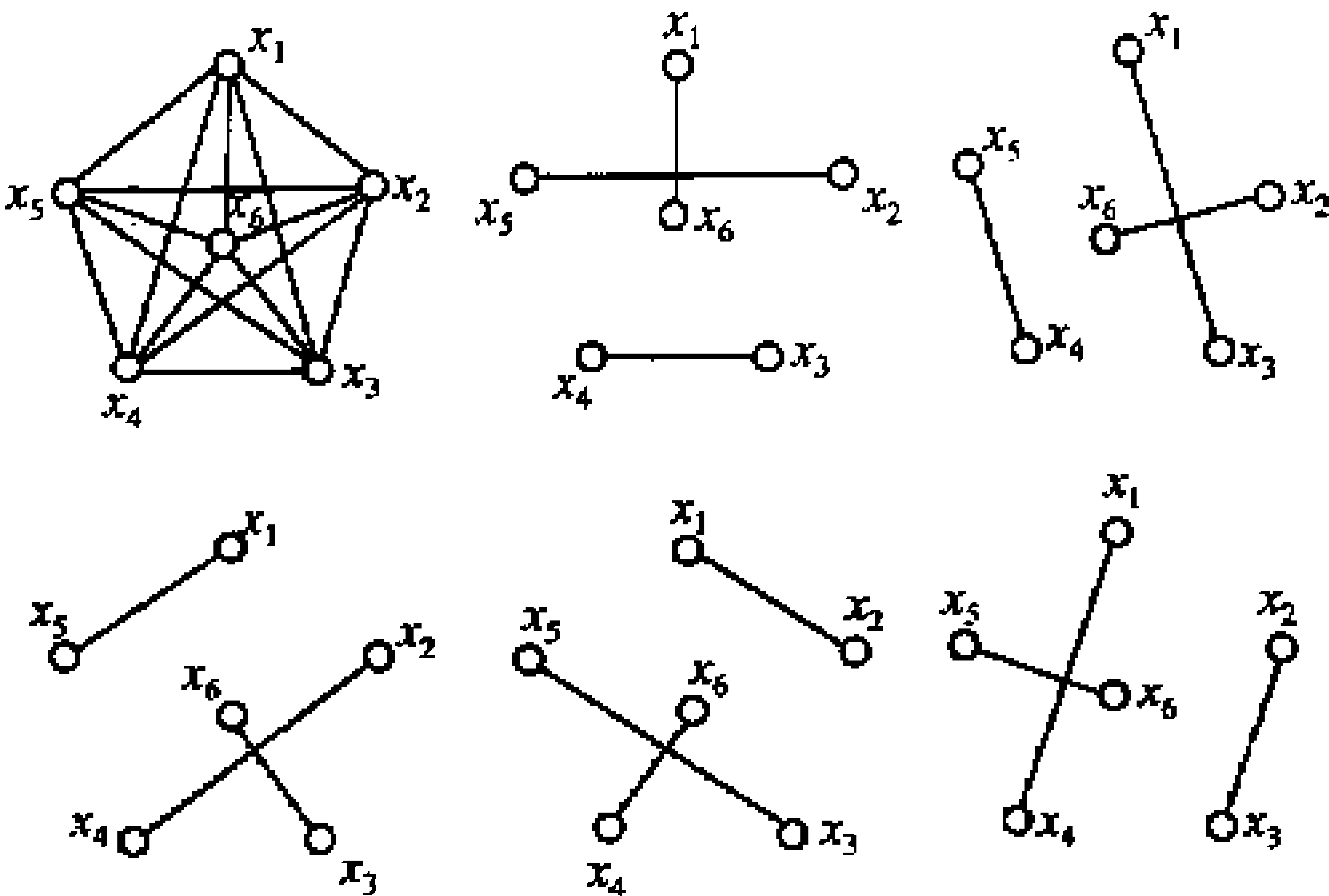


图 5.5 K_6 的 5 个互不相交的完备匹配

如此得到的 $M_i(i=1,2,\cdots,2n-1)$ 为 K_{2n} 的 $(2n-1)$ 互不相交的完备匹配.

□

我们已从 Hall 定理(5.1)导出 Tutte 定理(5.2). 事实上, 我们也可以从

Tutte 定理导出 Hall 定理，其证明留给读者（习题5.1.11）.

下面我们给出 Lovász (1973)对定理(5.2)的直接证明．只需证明条件(5.2)的充分性．

($\Leftarrow$)（反证法）设 $V(G)$ 的任何真子集 S 满足(5.2)式但 G 没有完备匹配．不妨设 G 是没有完备匹配的极大简单图 G^* 的支撑子图．这里的极大是指在 G^* 的任何不相邻两顶点之间添加一条边 e，则 G^*+e 含有完备匹配．由于 $G-S$ 是 G^*-S 的支撑子图，所以 $o(G^*-S)\leqslant o(G-S)$．因而由(5.2)式有

$$o(G^*-S)\leqslant|S|,\quad \forall\ S\subset V(G^*).\tag{5.2'}$$

特别令 $S=\varnothing$，则得 $o(G^*)=0$．因而 $\nu(G^*)=\nu(G)$ 为偶数．令

$$U=\{u\in V(G^*):\ d_{G^*}(u)=\nu-1\},$$

则 $U\neq V(G^*)$．若不然，G^* 是偶阶完全图，因而由推论 5.2.2 知 G^* 有完备匹配，矛盾于 G^* 的假设．由于 $V(G^*)$ 是偶数，所以，$|U|$ 与 $o(G^*-U)$ 有相同的奇偶性．

下面，我们证明 G^*-U 的每个分支都是完全图．

若不然，设 G_i 是 G^*-U 中非完全图的分支，则有 $\nu(G_i)\geqslant 3$．于是必存在 x，y、$z\in V(G_i)$，使得 $xy, yz\in E(G_i)$，而且 $xz\notin E(G_i)$（见例 1.5.6）．由于 $y\notin U$，所以存在 $w\in V(G^*-U)$，使得 $yw\notin E(G')$（参见图5.6）．

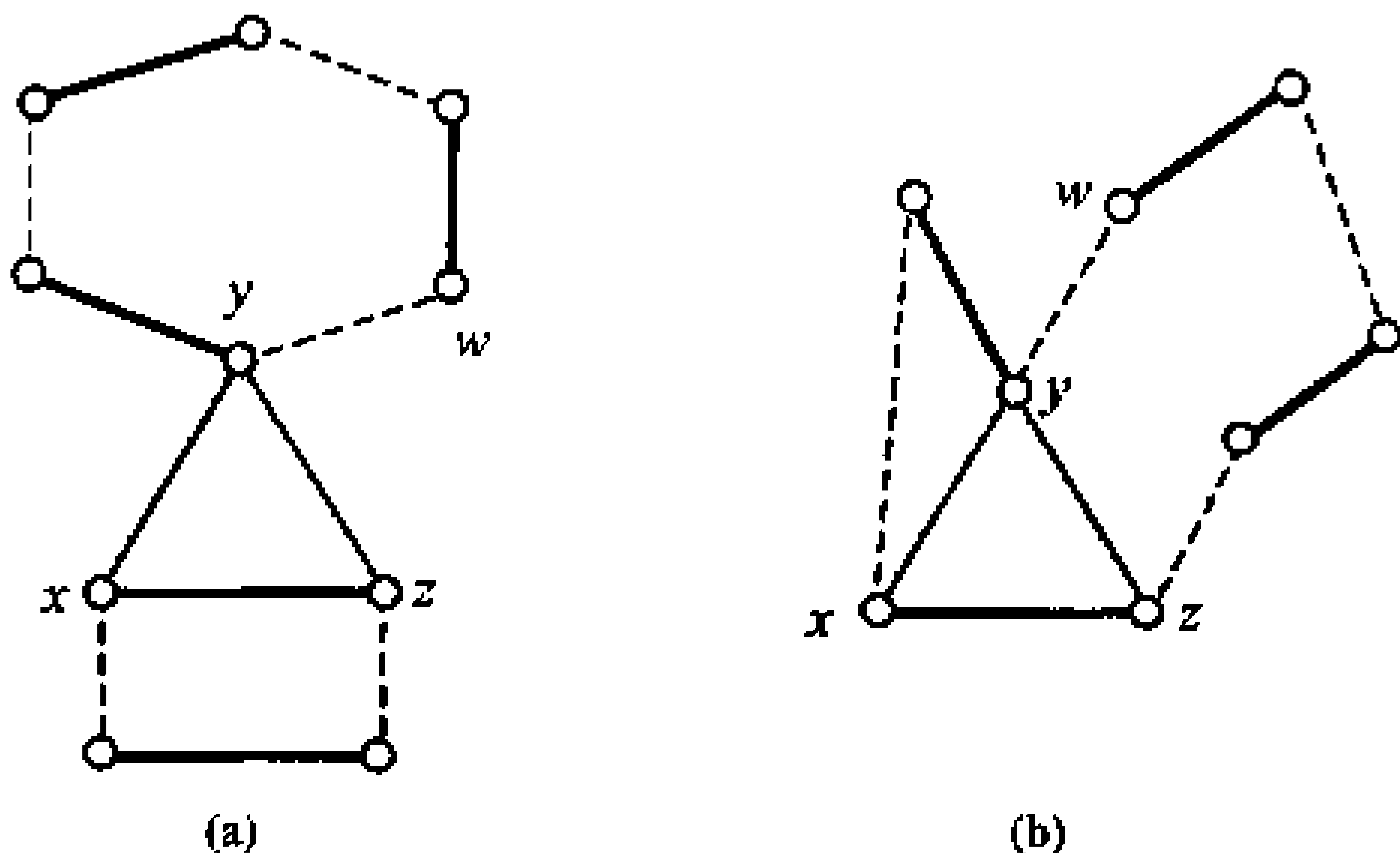


图 5.6 匹配 M_1（粗线）和匹配 M_2（虚线）

由于 G^* 是不含完备匹配的极大图，所以 G^*+xz 和 G^*+yw 都含有完备匹配，分别为 M_1 和 M_2．用 H 表示 $G^*\cup\{xz, yw\}$ 中由 $M_1\triangle M_2$ 导出的子图．由于对每个 $u\in V(H)$ 均有 $d_H(u)=2$，所以 H 的每个分支都是其边在 M_1 和 M_2 中交错出现的偶圈．分两种情形：

情形 1 xz 和 yw 分别在 H 的不同分支中．设 yw 在 H 的圈 C（见图 5.6(a)）中，则 $(M_1\cap E(C))\cup(M_2\setminus E(C))$ 是 G^* 的一个完备匹配，矛盾于 G^* 的选择．

情形 2 xz 和 yw 在 H 的同一分支 C 中．由 x 和 z 的对称性，不妨设 x，y，

w、z 在 C 中依次出现，并设 M_1 在 C 的 $yw\cdots z$ 段中的边集为 M'_1，M_2 在 C 的 $yw\cdots z$ 段中的边集为 M'_2（见图 5.6(b)）. 于是 $M'_1\cup\{yz\}\cup(M_2\backslash M'_2)$ 是 G^* 的完备匹配. 矛盾于对 G^* 的假定.

综合情形 1 和情形 2，于是证明了 G^*-U 的每个分支都是完全图.

令 $\omega=\omega(G^*-U)$，并令 $G_1,G_2,\cdots,G_o,G_{o+1},\cdots,G_\omega$ 是 G^*-U 的分支，其中 $G_1,G_2,\cdots,G_o$ 为奇分支. 取 $x_i\in V(G_i)$，令 $G'_i=G_i-x_i(i=1,2,\cdots,o)$. 于是 G'_i $(i=1,2,\cdots,o)$ 和 $G_j(j=o+1,o+2,\cdots,\omega)$ 都是偶阶完全图，因而存在完备匹配 $M_j(1\leqslant j\leqslant\omega)$. 由(5.2′)式有 $o(G^*-U)\leqslant|U|$，所以取 $y_i\in U$，$i=1,2,\cdots,o$. 由于 $U\backslash\{y_1,y_2,\cdots,y_o\}$ 在 G^* 中的导出子图是偶阶完全图，故有完备匹配 $M_{\omega+1}$. 再令 $M_{\omega+2}=\{x_iy_i:\ i=1,2,\cdots,o\}$. 于是

$$M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_{\omega+1}\cup M_{\omega+2}$$

是 G^* 中的完备匹配，矛盾于 G^* 的假定. 故 G 有完备匹配. □

在组合数学中，还有一个与 Hall 定理等价的结果，这就是 König 定理. 为叙述 König 定理，我们需要下述概念.

设 G 是无环非空图，S 是 $V(G)$ 的非空子集. 若 $E(G)$ 中每条边都与 S 中某点关联，则称 S 为 G 的**点覆盖(vertex-covering)**. 如果 G 中任何异于 S 的点覆盖 S' 均有 $|S'|\geqslant|S|$，则称 S 为**最小点覆盖(minimum verter-covering)**. 点覆盖 S 称为**极小的(minimal)**，若对任何 $x\in S$，$S\backslash\{x\}$ 都不是点覆盖. 显然，最小点覆盖一定是极小点覆盖，反之不真.

例如，图 5.7 中所示的 3 个图. 图中实顶点构成的集是该图的一个极小点覆盖，其中(b)和(c)中点覆盖都是最小点覆盖.

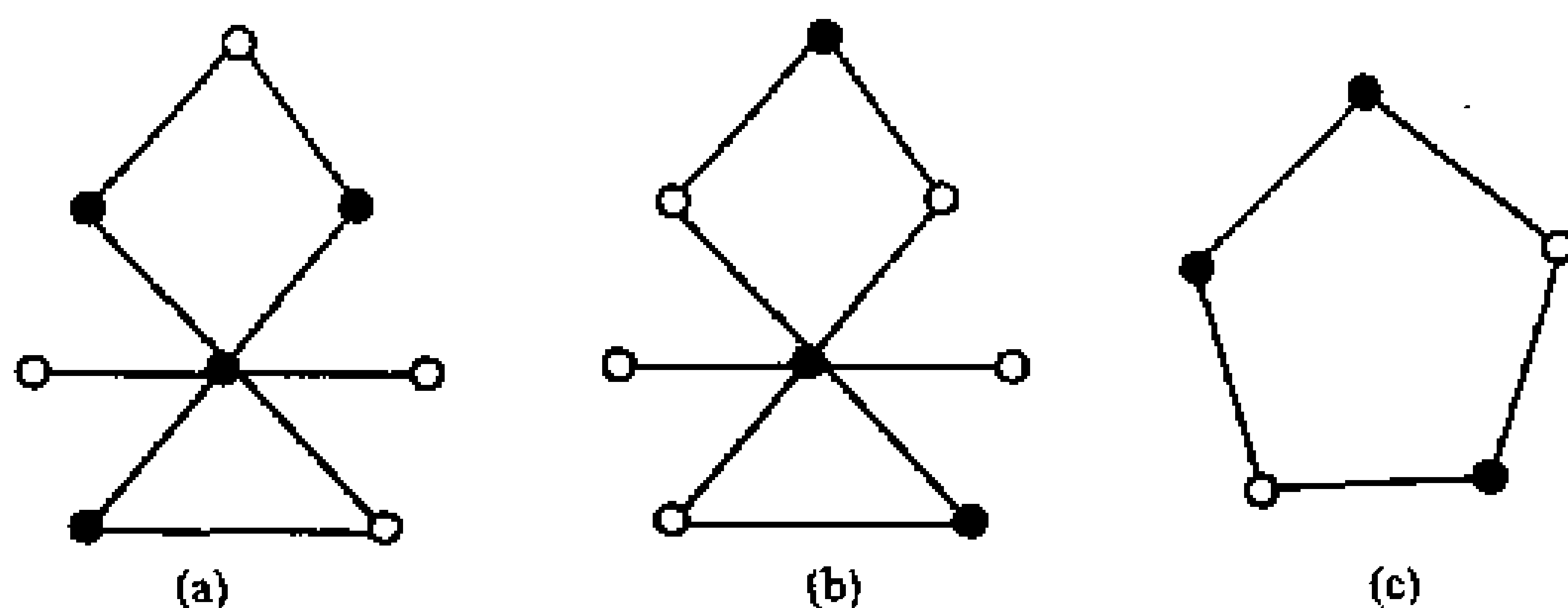


图 5.7

G 中最小点覆盖中的顶点数称为**点覆盖数(vertex-covering number)**，记为 $\beta(G)$. G 中最大匹配中的边数称为**匹配数 (matching number)**，记为 $\alpha'(G)$. 易知，

$\beta(K_{2n})=2n-1>n=\alpha'(K_{2n})$；

$\beta(K_{2n+1})=2n>n=\alpha'(K_{2n+1})$；

$\beta(C_{2n})=n=\alpha'(C_{2n})$；

$\beta(C_{2n+1})=n+1>n=\alpha'(C_{2n+1})$;

$\beta(K_{m,n})=\min\{m,n\}=\alpha'(K_{m,n})$.

设 G 是一个任意无环图，S 是 G 中任何一个点覆盖，M 是 G 中任何一个匹配. 由于 M 中任何一条边 e 的两端点至少有一个属于 S，因此

$$\alpha'(G)\leqslant\beta(G). \tag{5.3}$$

由上述例子看出，对于一般的图，(5.3)式中的等号不成立. 然而，对于 2 部分图，(5.3) 式中等号恒成立. 这就是下列著名的 König 定理.

定理 5.3(König 定理，König，1931) **对任何 2 部分图 G 有**

$$\alpha'(G)=\beta(G).$$

证明 利用 Menger 定理(4.3)作类似于 Hall 定理(5.1)的证明立即可得，其中 $\alpha'(G)=|M|$，$\beta(G)=|T|$(参见图 5.2). 下面，我们利用 Hall 定理来给出证明. 由(5.3)式，我们只需证明$\beta(G)\leqslant\alpha'(G)$.

设 G 是 2 部划分为$\{X,Y\}$的 2 部分图，Z 是 G 的最小点覆盖，并令

$$S=Z\cap X,\quad T=Z\cap Y,\quad S'=X\backslash S,\quad T'=Y\backslash T.$$

由点覆盖的定义知 S' 与 T' 之间无边相连. 考虑 G 的 2 部分子图 $H=G[S\cup T']$. 因为 Z 是 G 的最小点覆盖，所以对 S 的任何子集 R 均有 $|N_H(R)|\geqslant|R|$. 由 Hall 定理知 $G[S\cup T']$中存在饱和 S 的匹配，记为 M_1. 同样，$G[S'\cup T]$ 中存在饱和 T 的匹配，设为 M_2. 由于 $M_1\cup M_2$ 是 G 的匹配，而且 $M_1\cap M_2=\varnothing$，所以

$$\beta(G)=|Z|=|S|+|T|=|M_1|+|M_2|\leqslant\alpha'(G). \qquad \square$$

König 定理的发现早于 Hall 定理，其正确性当然不依赖于 Hall 定理. 事实上，这两个定理等价，其证明留给读者(习题5.1.11).

下面给出 Lovász(1975)对 König 定理的直接证明.

设 G 是 2 部划分为$\{X,Y\}$的 2 部分图. 我们对 $\varepsilon\geqslant1$ 用归纳法来证明 $\beta(G)\leqslant\alpha'(G)$. 若 $\delta(G)\leqslant1$，则结论显然成立. 不妨设存在 $x\in X$ 使 $d_G(x)\geqslant2$. 取 e_1，$e_2\in E(G)$ 使 $\psi_G(e_1)=xy$，$\psi_G(e_2)=xz$. 设存在 $G-e_1$ 的点覆盖 S_1 使 $|S_1|=\beta(G)-1$ 且存在 $G-e_2$ 的点覆盖 S_2 使 $|S_2|=\beta(G)-1$. 易见 $x\notin S_1$，$x\notin S_2$，$y\in S_2\backslash S_1$，$z\in S_1\backslash S_2$. 于是

$$|((S_1\cap S_2)\cap X)\cup((S_1\cup S_2)\cap Y)|\geqslant\beta(G),$$

$$|((S_1\cup S_2\cup\{x\})\cap X)\cup((S_1\cap S_2))\cap Y|\geqslant\beta(G).$$

两式相加，得

$$|S_1\cup S_2|+|S_1\cap S_2|+1\geqslant2\beta(G).$$

于是

$$2\beta(G)-2=|S_1|+|S_2|\geqslant2\beta(G)-1.$$

这是不可能的. 于是$\beta(G-e_1)=\beta(G)$或者$\beta(G-e_2)=\beta(G)$. 不妨设$\beta(G-e_1)=\beta(G)$. 于是由归纳假设

$$\beta(G)=\beta(G-e_1)\leqslant\alpha'(G-e_1)\leqslant\alpha'(G).$$

定理得证. □

推论 5.3 设G是2部划分为$\{X,Y\}$的2部分简单图,$k\geqslant1$. 若$|X|=|Y|=n$,且$\varepsilon>(k-1)n$,则$\alpha'(G)\geqslant k$.

证明 因为G是2部分简单图,并且$|X|=|Y|=n$,所以$\Delta(G)\leqslant n$. 于是G的每个顶点最多覆盖n条边. 由于$\varepsilon>(k-1)n$,所以我们断定有$\beta(G)\geqslant k$. 若不然,设$\beta(G)\leqslant k-1$,则

$$\varepsilon(G)\leqslant\beta(G)n\leqslant(k-1)n.$$

矛盾于$\varepsilon>(k-1)n$的假定. 由 König 定理(5.3)立即有

$$\alpha'(G)=\beta(G)\geqslant k.$$ □

匹配理论有许多很有趣的应用,例举几个如下.

例 5.1.1 图5.8(a)所示的图形是由14个大小相同的正方形组成的图形. 试证明:不论如何用剪刀沿着图形中所画的直线对它进行裁剪,总剪不出7个由相邻的两个小正方形组成的矩形来(中国科学技术大学1977年招收少年班试题第2题).

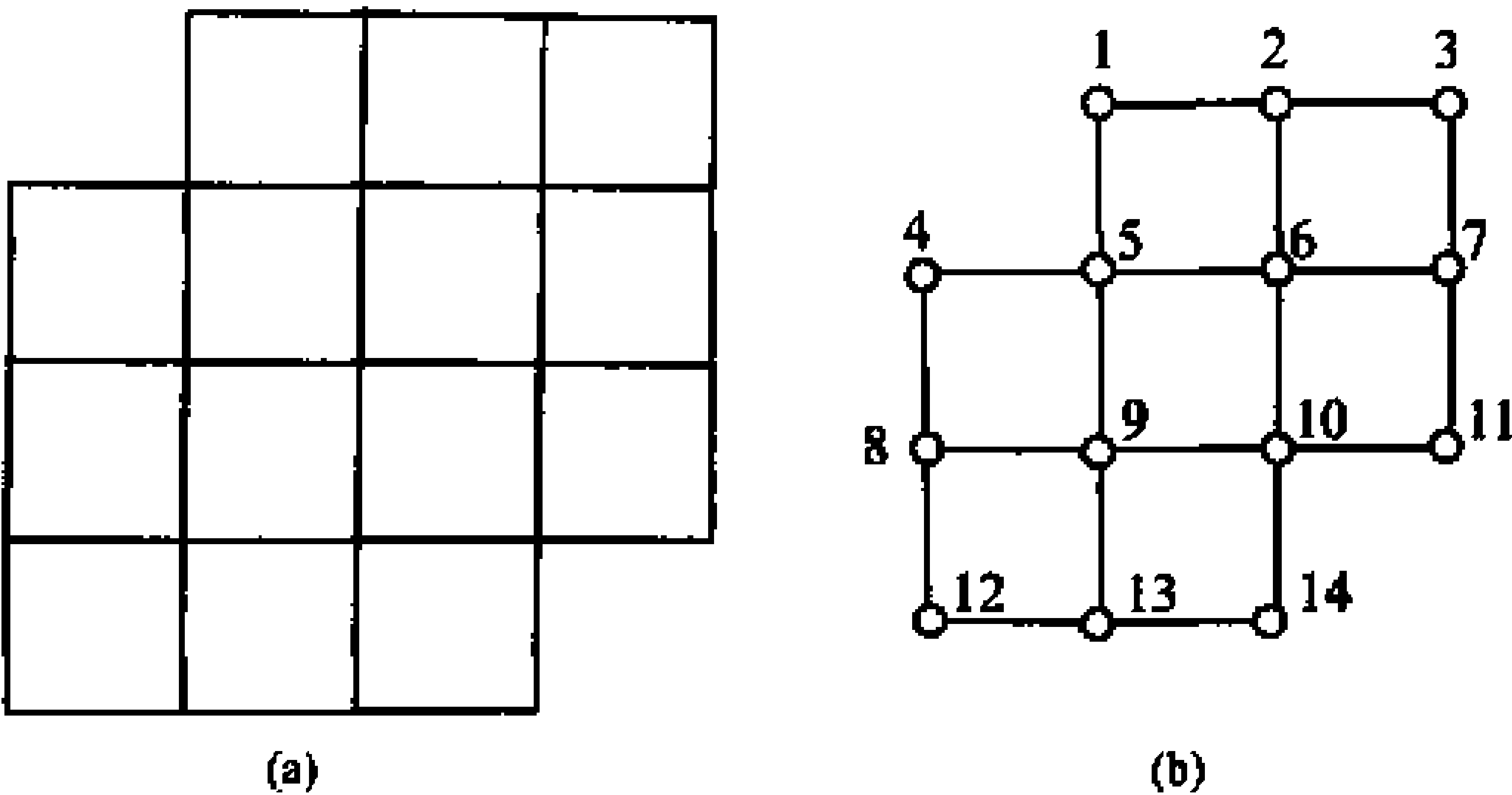


图 5.8

证明 将图形中方格编号从1到14. 以方格为顶点集作简单无向图$G=(V,E)$,$ij\in E(G)\Leftrightarrow i$和$j$所在的方格在图形中相邻. 这样得到的图$G$如图5.8(b)所示. 若能剪出7个由相邻的两个小正方形组成的矩形来,这7个矩形代表G中的7条边是G中一个完备匹配. 但这是不可能的. 因为G中无奇圈,所以由推论1.4.2知G是2部划分为$\{X,Y\}$的2部分图,其中$X=\{1,3,4,6,9,11,12,14\}$,$Y=\{2,5,7,8,10,13\}$,$|X|=8>6=|Y|$. 由推论5.1.1知G中不存在完备匹配。 □

例 5.1.2(P. Hall,1935) 设 H 是有限群,K 是 H 的子群. 证明:存在元素 $h_1,h_2,\cdots,h_n\in H$ 使得 $h_1K,h_2K,\cdots,h_nK$ 是 K 的左陪集,$Kh_1,Kh_2,\cdots,Kh_n$ 是 K 的右陪集.

证明 因为 H 中任何两个左陪集 aK 和 bK 或者恒等或者不相交. 所以 H 可按左陪集划分成 k 个左陪集之并,其中 k 等于商集 H/K 的元素个数. 作 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分无向图 G,其中 $X=\{hK: h\in H\}$,$Y=\{Kh: h\in H\}$;$x\in X$,$y\in Y$,x 与 y 之间有 l 条平行边相连$\Leftrightarrow hK$ 与 Kh 有 l 个公共元素. 易知 G 是 k 正则的. 由推论 5.1.2 知 G 有完备匹配 M. 设 $|M|=n$,并设与 M 中边 e_i 对应的左、右陪集公共元素为 h_i. 于是 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 即为所求. □

例 5.1.3(G. Birkhoff,1946 & J. von Neuman,1953) 设 Q 是行元素之和与列元素之和均为 1 的 $m\times n$ 阶非负实矩阵(这样的矩阵称为**双随机矩阵**(**doublystochastic matrix**)),则

(i)Q 是方阵;

(ii)Q 能表示成置换方阵的凸线性组合,即存在实数 c_i 使

$$Q=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_kP_k,$$

其中 $P_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为置换方阵,并且 $c_1+c_2+\cdots+c_k=1$.

证明 (i)为证明 Q 是方阵,只需证明 $m=n$. 实事上,由于 $Q=(q_{ij})_{m\times n}$ 的行元素之和与列元素之和均为 1,所以

$$n=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}q_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\right)=m.$$

(ii)对 n 阶双随机方阵中正元素数目 r 用归纳法. 由双随机方阵的定义知 $r\geqslant n$. 当 $r=n$ 时,任何双随机方阵都是一个置换方阵,结论成立. 假定对正元素数目 $r<m(m\geqslant n+1)$ 的所有 n 阶双随机方阵都能表示成置换方阵的凸线性组合. 设 Q 是一个 n 阶双随机方阵且有 $m(\geqslant n+1)$ 个正元素.

下证 Q 中每行每列都有一个公共的非零元素。为此,构造简单 2 部分图 $G=(X\cup Y,E)$,X 和 Y 分别是 $Q=(q_{ij})$ 的行号集和列号集,$x_i\in X$,$y_j\in Y$,$x_iy_j\in E(G)\Leftrightarrow q_{ij}>0$.

任取 $S\subseteq X$. 不妨设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,$Y\backslash N_G(S)=\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}$. 则 $q_{ij}=0,1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l$. 由于 Q 是双随机矩阵,$\sum\limits_{i=1}^{n}q_{ij}=1,1\leqslant j\leqslant l$. 所以

$$l=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}q_{ij}\right)=\sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{l}q_{ij}\right)\leqslant\sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\right)=n-k,$$

即有 $$|S|=k\leqslant n-l=|N_G(S)|,\quad \forall\ S\subseteq X.$$

由 Hall 定理知,G 中存在饱和 X 的匹配 M. 由(i)知 $|X|=|Y|$,所以 M 是 G 的完备匹配,即 Q 中每行每列都有一个公共的非零元素.

设 M 中边对应 Q 中正元素分别为 $q_{1j_1},q_{2j_2},\cdots,q_{nj_n}$. 令

$$c_1=\min\{q_{kj_k}:1\leqslant k\leqslant n\}.$$

由于 Q 中有 $m(\geqslant n+1)$ 个正元素，并且这些正元素之和为 n，所以，$0<c_1<1$. 令 $\boldsymbol{P}_1$ 是与 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$ 对应的置换方阵，并令 $Q_1=Q-c_1\boldsymbol{P}_1$. 则 Q_1 仍是非负方阵，而且 $\frac{1}{1-c_1}Q_1$ 是双随机方阵. 由于 Q_1 中正元素数目比 Q 中正元素数目至少减少一个，即 $\frac{1}{1-c_1}Q_1$ 中正元素数目 $<m$. 由归纳假设，存在 n 阶置换方阵 $\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3,\cdots,\boldsymbol{P}_k$ 和 $c'_2,c'_3,\cdots,c'_k$ 使 $c'_2+c'_2+\cdots+c'_k=1$ 并且

$$\frac{1}{1-c_1}Q_1=c'_2\boldsymbol{P}_2+c'_3\boldsymbol{P}_3+\cdots+c'_k\boldsymbol{P}_k.$$

于是

$$\begin{aligned}Q&=c_1\boldsymbol{P}_1+Q_1=c_1\boldsymbol{P}_1+(1-c_1)\left(\frac{1}{1-c_1}Q_1\right)\\&=c_1\boldsymbol{P}_1+(1-c_1)(c'_2\boldsymbol{P}_2+c'_3\boldsymbol{P}_3+\cdots+c'_k\boldsymbol{P}_k)\\&=c_1\boldsymbol{P}_1+(1-c_1)c'_2\boldsymbol{P}_2+(1-c_1)c'_3\boldsymbol{P}_3+\cdots\\&\qquad+(1-c_1)c'_k\boldsymbol{P}_k\\&=c_1\boldsymbol{P}_1+c_2\boldsymbol{P}_2+c_3\boldsymbol{P}_3+\cdots+c_k\boldsymbol{P}_k,\end{aligned}$$

其中 $$c_i=(1-c_1)c'_i,\ i=2,3,\cdots,k,$$

并且 $$c_1+c_2+\cdots+c_k=c_1+(1-c_1)(c'_2+c'_3+\cdots+c'_k)=1.$$

由归纳法原理，(ii)得证. □

习 题

5.1.1 设 M 是无孤立点图的最大匹配.

(a)证明：$\left\lceil\frac{\nu}{1+\Delta}\right\rceil\leqslant|M|\leqslant\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor$. (Weinstein, 1963)

(b)举例说明(a)中的上下界均可以达到.

5.1.2 证明：

(a)$k(\geqslant1)$立方体图 Q_k(见例 1.2.1)有完备匹配；

(b)K_{2n} 中不同完备匹配的数目为 $(2n-1)!!$；

(c)对任何 $k(\geqslant2)$，存在 k 正则简单图使其没有完备匹配；

(d)任何 $\nu(\geqslant4)$阶三角剖分图都含有 $\frac{2}{3}\varepsilon$ 条边的 2 部分子图.

5.1.3 证明：一个 8×8 格棋盘移去其中对角上的两个方格后，不可能用 1×2 长方形填满而不重叠.

5.1.4 矩阵的行或列称为线. 证明：(0,1)矩阵中包含所有 1 的线集的最小条数等于没有两

个在同一条线上的 1 的最大个数. (D. König, 1931)

5.1.5 设 $A_1,\cdots,A_m$ 是集 S 的子集. $\{A_1,\cdots,A_m\}$ 的一个相异代表系是指 S 的子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 其中 $a_i\in A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 并且 $a_i\neq a_j(i\neq j)$. 证明: $\{A_1,\cdots A_m\}$ 有相异代表系 $\Leftrightarrow$

$$|\bigcup_{i\in J}A_i|\geqslant|J|,\quad\forall\ J\subseteq\{1,2,\cdots,m\}.$$ (P. Hall, 1935)

5.1.6 证明: 树 G 有完备匹配 $\Leftrightarrow o(G-x)=1$ 对任何 $x\in V(G)$ 都成立.

5.1.7 证明: 设 M 是 2 部分图 $G=(X\cup Y,E)$ 的最大匹配, 则

$$|M|=|X|-\max\{|S|-|N(S)|:\ \forall S\subseteq X\}$$ (O. Ore, 1955)

5.1.8 证明: 设 M 是 G 的最大匹配, $r=\max\{o(G-S)-|S|:\forall S\subset V(G)\}$, 则 $|M|=\frac{1}{2}(\nu-r)$. (C. Berge, 1958)

5.1.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵 $(m\leqslant n)$. $\boldsymbol{A}$ 的**积和式(Permanent)** $\mathrm{Per}(\boldsymbol{A})$ 定义为所有位于 $\boldsymbol{A}$ 的不同行不同列的 m 个元素乘积之和. 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图, $|X|=m$, $|Y|=n$, $\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵. 证明:

(a) 当 $m>n$ 时, G 中没有饱和 X 的匹配;

(b) 当 $m\leqslant n$ 时, G 中饱和 X 的匹配数目为 $\mathrm{Per}(\boldsymbol{A})$;

(c) $K_{n,n}$ 中有 $n!$ 个不同的匹配.

5.1.10 G 的 k 正则支撑子图称为 G 的 **k 因子(k-factor)**. 若 G 存在边不交的 k 因子 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 使得 $G=G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n$, 则称 G 是 **k 因子可分解的(k-factorable)**. 证明:

(a) G 含 1 因子 $\Leftrightarrow G$ 有完匹配;

(b) K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 是 1 因子可分解的;

(c) K_{2n+1} 是 2 因子可分解的;

(d) 简单图 G 是 2 因子可分解的 $\Leftrightarrow G$ 是 $2k(k\geqslant1)$ 正则的;

(e) Petersen 图是非 1 因子可分解的;

(f) 每个 $2k(k\geqslant1)$ 正则图有 2 因子分解 $\Leftrightarrow$ 每个 $k(\geqslant1)$ 正则 2 部分图有 1 因子分解.

5.1.11 证明:

(a) Tutte 定理(5.2) $\Rightarrow$ Hall 定理(5.1);

(b) König 定理(5.3) $\Rightarrow$ Hall 定理(5.1);

(c) Menger 定理(4.3) $\Rightarrow$ König 定理(5.3);

(d) 最大流最小截定理(推论(4.1)) $\Rightarrow$ König 定理(5.3);

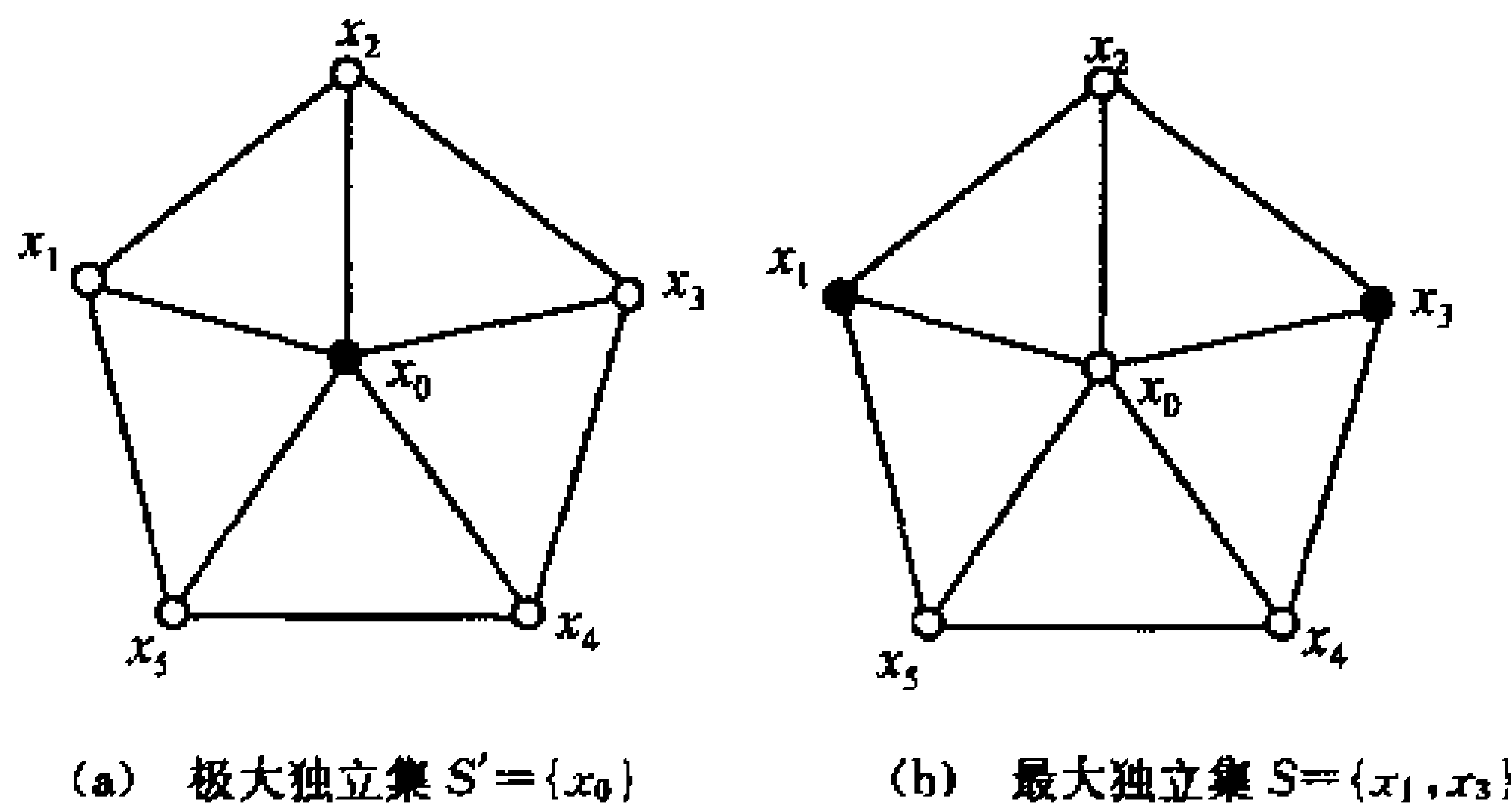
(e) Hall 定理(5.1) $\Rightarrow$ Menger 定理(4.3).

5.2 独 立 集

设 D 是无环图, S 是 $V(D)$ 的非空子集. 若 S 中任何两顶点在 D 中均不相邻, 则称 S 为 D 的**独立集(independent set)**. D 的独立集 S 称为**最大的(maximum)**, 如果对 D 中任何异于 S 的独立集 S' 均有 $|S'|\leqslant|S|$. 独立集 S 称为极大

的(**maximal**),如果对任何 $x\in V\backslash S$,$S\cup\{x\}$都不是独立集.

图 5.9 给出了这些例子. 显然,最大独立集一定是极大的. 反之不真.



(a)　极大独立集 $S'=\{x_0\}$　　(b)　最大独立集 $S=\{x_1,x_3\}$

图 5.9

因为独立集概念与图中边的方向无关,只与顶点之间是否相邻有关,所以我们只需讨论简单无向图的情形.

G 中最大独立集中的点数称为 G 的**独立数**(**independence number**),记为 $\alpha(G)$.

易知

$$\alpha(G)=1\Leftrightarrow G\text{ 含完全支撑子图 }K_\nu,$$

$$\alpha(K_{m,n})=\max\{m,n\},$$

$$\alpha(C_{2n})=n,\quad \alpha(C_{2n+1})=n.$$

对于一般的图,确定 $\alpha(G)$是件极其困难的问题.

独立集与点覆盖满足下列关系:

定理 5.4(Gallai,1959)　**设** $S\subseteq V(G)$. **则** S **是** G **的独立集** $\Leftrightarrow V(G)\backslash S$ **是** G **的点覆盖.**

证明　由定义,S 是 G 的独立集$\Leftrightarrow G$ 中每条边的两端点都不同时属于 S,即$\Leftrightarrow G$ 的每条边至少有一端点在 $V\backslash S$ 中,即$\Leftrightarrow V\backslash S$是 G 的点覆盖.　□

推论 5.4.1　S **是** G **的极大独立集**$\Leftrightarrow V(G)\backslash S$ **是** G **的极小点覆盖.**

推论 5.4.2　$\alpha+\beta=\nu$.

证明　设 S 是 G 的最大独立集,K 是 G 的最小点覆盖. 由定理 5.4 知 $V\backslash S$ 是点覆盖,$V\backslash K$ 是独立集. 因而

$$\nu-\alpha=|V\backslash S|\geqslant\beta,$$

并且

$$\nu-\beta=|V\backslash K|\leqslant\alpha.$$

由此得

$$\alpha+\beta=\nu.$$

□

设 L 是 $E(G)$ 的非空子集. 若 G 的每个顶点都与 L 中某条边关联，则称 L 为 G 的**边覆盖**(edge-covering). 易知

$$G\text{ 有边覆盖}\Leftrightarrow\delta(G)>0.$$

G 的最小边覆盖中的边数称为 G 的**边覆盖数**(edge-covering number)，记为 $\beta'(G)$. 于是边覆盖数 β' 和匹配数 $\alpha'(G)$ 有下列关系：

$$\alpha'(G)\leqslant\beta'(G),$$

等号成立 $\Leftrightarrow G$ 中存在完备匹配.

匹配与边覆盖之间没有类似于 König 定理(5.3)的关系. 例如，对于 2 部分图 $K_{1,n}$，有 $\alpha'(K_{1,n})=1$，而 $\beta'(K_{1,n})=n=\varepsilon(K_{1,n})$. 然而类似于推论 5.4.2 的关系却存在.

定理 5.5 (Gallai，1959) **设 G 是任意图. 若 $\delta(G)>0$，则**

$$\alpha'+\beta'=\nu.$$

证明 设 M 是 G 的最大匹配，U 是非 M 饱和点集，则 $G[U]$ 是空图. 由于 $\delta(G)>0$，所以 G 中存在 $|U|$ 条边集 E'，它的每条边都与 U 中点关联. 显然 $M\cup E'$ 是 G 的边覆盖，因而

$$\beta'\leqslant|M\cup E'|=\alpha'+(\nu-2\alpha')=\nu-\alpha'.$$

即
$$\alpha'+\beta'\leqslant\nu. \tag{5.4}$$

另一方面，设 L 是 G 的最小边覆盖. 令 $H=G[L]$，则 $V(H)=V(G)$. 设 M 是 H 的最大匹配，U 为 H 中非 M 饱和点集. 则 $H[U]$ 是空图，从而

$$|L|-|M|=|L\backslash M|\geqslant|U|=\nu-2|M|,$$

即
$$|L|+|M|\geqslant\nu.$$

又因为 H 是 G 的支撑子图，所以 M 也是 G 的匹配. 故

$$\alpha'+\beta'\geqslant|M|+|L|\geqslant\nu. \tag{5.5}$$

结合(5.4)和(5.5)得 $\alpha'+\beta'=\nu$. □

下述结果在形式上与 König 定理极为相似.

定理 5.6 **设 G 是 2 部分图. 若 $\delta(G)>0$，则**

$$\alpha(G)=\beta'(G).$$

证明 设 G 是 2 部分图，并且 $\delta(G)>0$. 由推论 5.4.2 和定理 5.5 有

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'.$$

再由定理 5.3 推知 $\alpha'=\beta$，于是 $\alpha=\beta'$. □

虽然独立集的概念类似于匹配的概念，但却不存在与前节匹配理论相仿的独立集理论，特别是目前还不知道求图最大独立集的有效算法. 这两个概念可以通过线图把它们联系起来，并且不难证明(习题 5.2.3)：

$$\alpha'(G)=\alpha(L(G)),$$

其中 $L(G)$是 G 的线图.

下面的结果给出了独立集与连通度之间的关系.

定理 5.7(Bondy,1978)　**设 G 是 $\nu(\geqslant 2)$ 阶简单无向图,且对 G 中任何不相邻顶点 x 和 y,均有 $d_G(x)+d_G(y)\geqslant\nu$,则**

$$\alpha(G)\leqslant\kappa(G).$$

证明　由已知条件易证 G 是连通的. 若 G 为完全图 K_ν,则

$$\alpha(K_\nu)=1\leqslant\nu-1=\kappa(K_\nu),$$

结论成立. 下设 G 是非完全图. 用反证法.

设 $\alpha(G)\geqslant\kappa(G)+1$,并设 I 和 S 分别是 G 中最大独立集和最小分离集. 则

$$|I|=\alpha(G)=\alpha\geqslant 2,$$
$$|S|=\kappa(G)=k.$$

设 $G_1,G_2,\cdots,G_l$ 是 $G-S$ 的连通分支,$l\geqslant 2$. 则

$$|N_G(x)\cup N_G(y)|\leqslant\nu-\alpha,\quad \forall x,y\in I. \tag{5.6}$$

于是,由假定和(5.6)式,$\forall x,y\in I$,有

$$\begin{aligned}|N_G(x)\cap N_G(y)|&=|N_G(x)|+|N_G(y)|-|N_G(x)\cup N_G(y)|\\&=d_G(x)+d_G(y)-|N_G(x)\cup N_G(y)|\\&\geqslant\nu-(\nu-\alpha)=\alpha\geqslant k+1.\end{aligned}$$

这表明,在 $G-S$ 中,仅有一个连通分支含 I 中点. 不妨设 $I\subseteq V(G_1)\cup S$. 因为 $\alpha\geqslant k+1$,所以存在 $x\in I\cap V(G_1)$. 令 $y\in V(G_2)$,则

$$\begin{aligned}|N_G(x)\cup N_G(y)|&\leqslant\nu-2-|I\cap V(G_1)|+1\\&=\nu-\alpha+|I\cap S|-1.\end{aligned} \tag{5.7}$$

又因为 $N_G(x)\cap N_G(y)\subseteq S\backslash I$,所以

$$|N_G(x)\cap N_G(y)|\leqslant k-|I\cap S|. \tag{5.8}$$

于是由(5.7)和(5.8)式,得

$$\begin{aligned}d_G(x)+d_G(y)&=|N_G(x)\cup N_G(y)|+|N_G(x)\cap N_G(y)|\\&\leqslant(\nu-\alpha+|I\cap S|-1)+(k-|I\cap S|)\\&=\nu-\alpha+k-1\leqslant\nu-2.\end{aligned}$$

矛盾于假定. 所以 $\alpha(G)\leqslant\kappa(G)$.　□

推论 5.7　**设 G 是 $\nu(\geqslant 2)$ 阶简单无向图,$\delta(G)\geqslant\frac{\nu}{2}$,则$\alpha(G)\leqslant\kappa(G)$.**

下面的结果给出了独立集,连通度与 Hamilton 图之间的关系.

定理 5.8 (Chvàtal & Erdös,1972)　**设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单图. 若 $\kappa(G)\geqslant\alpha(G)$,则 G 是 Hamilton 图.**

证明　若 $\alpha(G)=1$,则 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶完全图,因而是 Hamilton 图. 下设 $\alpha(G)\geqslant 2$. 由于 $\kappa(G)\geqslant\alpha(G)\geqslant 2$,所以 G 含圈. 设 C 是 G 中最长圈. 若 C 不含 G

中所有顶点，则 $V(G)\backslash V(C)$ 非空. 令 H 是 $G-V(C)$ 的任何一个连通分支，并令 $\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 是 C 中与 H 相邻的顶点集. 由于 $\kappa(G)\geqslant 2$，所以 $s\geqslant 2$. 由 C 的最大性和 H 的连通性知 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 在 C 上互不相邻. 因此 $\nu(C)>s$，并且 $\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 是 G 的分离集. 所以 $\kappa(G)\leqslant s$. 给圈 C 一个确定的方向得有向圈 $\vec{C}$. 令

$$Y=\{y_i:\ (x_i,y_i)\in E(\vec{C}),\ i=1,2,\cdots,s\}.$$

则由 x_i 在 C 上的不相邻性知，$|Y|=s\geqslant 2$. 我们断定 Y 是 G 的一个独立集.

（反证法）若 Y 不是 G 的独立集，则存在 $y_iy_j\in E(G)$. 令通过 H 中顶点连接 x_i 和 x_j 的 x_ix_j 路为 P_{ij}，则

$$C-x_iy_i-x_jy_j+y_iy_j+P_{ij}$$

是 G 中一条比 C 更长的圈，矛盾于 C 是 G 中最长圈的假设. 于是 Y 是 G 的独立集.

由于 y_i 与 x_i 相邻，所以 y_i 不与 H 中任何顶点相邻. 任取 $y_0\in V(H)$，则 $S=\{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_s\}$ 是 G 的独立集，且

$$\alpha(G)\geqslant|S|=s-1\geqslant\kappa(G)+1,$$

矛盾于假定. 所以 C 是含 G 中所有顶点的圈，即 G 是 Hamilton 图. □

习　题

5.2.1　证明：(a) G 是 2 部分图 $\Leftrightarrow$ G 中每个子图 H 有 $\alpha(H)\geqslant\frac{1}{2}\nu(H)$；

(b) G 是 2 部分图 $\Leftrightarrow$ 对 G 的每个满足 $\delta(H)>0$ 的子图均有 $\alpha(H)=\beta'(H)$.

5.2.2　设 $\{V_1,\cdots,V_p\}$ 是 $V(G)$ 的划分，并且对每个 $i(i=1,2,\cdots,p)$，V_i 都是 G 的极大独立集. H 是 p 阶简单图，其中 $V(H)=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$，$u_iu_j\in E(H)\Leftrightarrow E_G[V_i,V_j]\neq\varnothing$. 证明：$H$ 是 p 阶完全图.

5.2.3　证明 $\alpha'(G)=\alpha(L(G))$，其中 $L(G)$ 是 G 的线图.

5.2.4　(a)举例说明：

(i)定理 5.7 中条件"$d_G(x)+d_G(y)\geqslant\nu$"不能改为"$d_G(x)+d_G(y)\geqslant\nu-1$"；

(ii)推论 5.7 中条件"$\delta(G)\geqslant\frac{\nu}{2}$"不能改为"$\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor$"；

(iii)定理 5.8 中的条件"$\kappa(G)\geqslant\alpha(G)$"不能改为"$\kappa(G)\geqslant\alpha(G)+1$".

(b)利用定理 5.7 证明推论 5.7；利用定理 5.8 证明定理 1.7.

5.2.5　证明：$2k+1$ 阶 k 连通 k 正则简单无向图，是 Hamilton 图.

5.2.6　设 G 是 $\nu(\geqslant 3)$ 阶简单无向图. 令 $T=\{x\in V(G):\ d_G(x)=\nu-1\}$. 证明：若 $|T|\geqslant\alpha(G)$，则 G 是 Hamilton 图.

5.2.7　设 G 是简单图. 证明：若 $\delta\geqslant\frac{1}{3}(\nu+\kappa)$，则 $\alpha\leqslant\delta$

5.2.8　设 D 是无环有向图. 证明:D 有独立集 S 和 $x\in S$ 使得对每个 $y\in V\backslash S$ 均有 $d_D(x,y)\leqslant 2$.　(V. Chvatal & L. Lovász, 1974)

5.2.9　称图 G 是 α 临界的(**α-critical**),如果对每条 $e\in E(G)$ 均有 $\alpha(G-e)>\alpha(G)$. 证明:

(a) α 临界图是简单图;

(b) 阶大于 2 的连通 α 临界图是 2 连通的.

5.2.10　称图 G 是 β 临界的(**β-critical**),如果对每条 $e\in E(G)$ 均有 $\beta(G-e)<\beta(G)$. 证明:

(a) G 是 β 临界图 $\Leftrightarrow$ G 是 α 临界图;

(b) 阶大于 2 的连通的 β 临界图是 2 连通的;

(c) 若 G 是连通的,则 $\beta\leqslant\frac{1}{2}(\varepsilon+1)$.

应　　用

5.3　人员安排问题

某公司准备安排 n 个职员 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 从事 n 项工作 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 已知每个职员能胜任其中一项或几项工作. 试问:能否把所有职员都安排一项他所胜任的工作? 这个问题称为**人员安排问题(personnel assignment problem)**.

构作 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的简单 2 部分图 G,其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,并且 $x_iy_j\in E(G)\Leftrightarrow$ 职员 x_i 胜任工作 y_j. 于是问题转化为判定给定的 2 部分图 G 中是否有完备匹配问题.

本节给出一个有效算法,它是基于匈牙利数学家 Egerváry(1931)首先提出来的一个方法,故通常称为**匈牙利算法**. 这里给出的是Edmonds (1965)的叙述,它基于 Hall 定理(5.1)及下述概念和结果.

设 M 和 M' 是 $E(G)$ 的两个不交的非空真子集. G 中 (M,M') **交错路(alternating path)**是指其边在 M 和 M' 中交错出现的路. $(M,\overline{M})$ 交错路简称为 **M 交错路**,其中 $\overline{M}=E(G)\backslash M$. 设 M 是 G 的匹配,两端点不同且都是非 M 饱和的 M 交错路称为 **M 增广路(augmenting path)**.

引理 5.9　设 M 和 M^* 是 G 的两个不同的非空匹配, $H=G[M\Delta M^*]$,则 H 的每个连通分支必是下列三种类型之一:

(i) 孤立点;

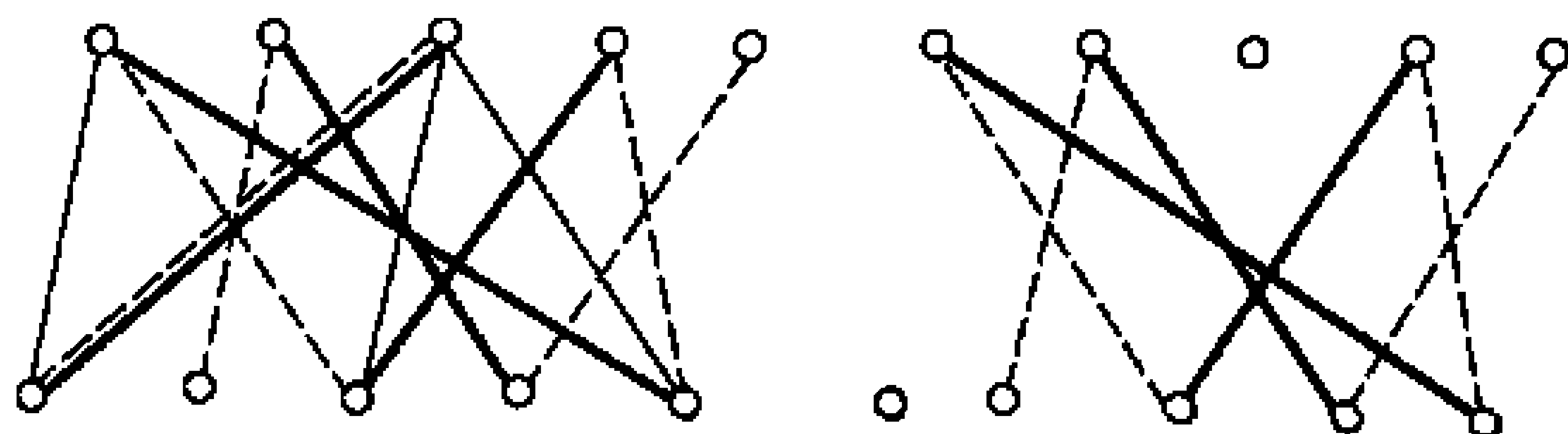
(ii) (M,M^*) 交错偶圈;

(iii) (M,M^*) 交错路.

证明　由于 H 中每个顶点至多与 M 和 M^* 中一条边关联,所以

$$0 \leqslant \Delta(H) \leqslant 2.$$

而且对 H 中顶点 x，若 $d_H(x)=2 \Leftrightarrow x$ 既与 M 中一条关联，又与 M^* 中一条边关联(参见图 5.10).



(a) G 的匹配 M(粗边)和 M^*(虚边)　　(b) $H=G[M\Delta M^*]$

图 5.10

设 P 是 H 中任意一个连通分支. 若 P 是一个孤立点，则(i)成立. 下设 $1 \leqslant \Delta(P) \leqslant 2$.

若 P 中顶点全是 2 度点，则由上述说明知 P 中每个顶点既与 M 中一条边关联，又要与 M^* 中一条边关联，所以 P 是一条(M,M^*)交错偶圈，故(ii)成立.

若 P 中含 1 度点，设为 x. 则由推论 1.1.2 知 P 中必含另一个 1 度点，设为 y. 由于 $\Delta(P) \leqslant 2$，所以 P 是一条以 x 和 y 为端点的路，P 中内部点(若存在的话)都是 2 度点. 因而 P 是(M,M^*)交错路，(iii)成立. □

定理 5.9 (Berge, 1957)　**设 M 是 G 的匹配. 则 M 是最大的 $\Leftrightarrow G$ 中不含 M 增广路.**

证明　($\Rightarrow$)(反证法)设 M 是 G 的最大匹配，并设 $P=x_0e_1x_1e_2\cdots e_mx_m$ 是 G 中 M 增广路. 则 m 为奇数，并且 $e_1,e_3,\cdots,e_m \notin M$，而 $e_2,e_4,\cdots,e_{m-1} \in M$. 令

$$M'=M\Delta E(P)=(M\setminus\{e_2,e_4,\cdots e_{m-1}\})\cup\{e_1,e_3,\cdots,e_m\}.$$

则 M' 是 G 的匹配，并且 $|M'|=|M|+1$. 矛盾于 M 的最大性.

($\Leftarrow$)(反证法)设 M 不是 G 的最大匹配，M^* 是 G 的最大匹配，则 $|M^*|>|M|$. 令 $H=G[M\Delta M^*]$. 由引理 5.9 知 H 的每个连通分支或是孤立点，或是(M,M^*)交错路或是(M,M^*)交错偶圈. 由于 $|M^*|>|M|$，所以 $|E(H)\cap M^*|>|E(H)\cap M|$. 因而 H 必有一个连通分支 P，它是一条开始于 M^* 中边并且终止于 M^* 中边的(M^*,M)交错路. 于是 P 是 M 增广路(参见图5.10). 矛盾于假定. □

定理 5.10　**设 M 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图 G 的匹配，$x\in X$ 是非 M 饱和点，Z 是 G 中由起点为 x 的 M 交错路所能连接的顶点集，$S=Z\cap X$，$T=Z\cap Y$，则**

(a) $T \subseteq N_G(S)$;

(b)下述三条等价：

(i)G 中不存在以 x 为端点的 M 增广路；

(ii)x 是 Z 中唯一的非 M 饱和点；

(iii)$T=N_G(S)$ 且 $|T|=|S|-1$.

证明 (a)任取 $y\in T$，则 G 中存在以 x 和 y 为端点的 M 交错路 P. 令 $z\in N_P(y)$. 由于 G 是 2 部分图且 $y\in T\subseteq Y$，所以 $z\in Z\cap X=S$，即 $y\in N_G(S)$. 因而有 $T\subseteq N_G(S)$.

(b)(i)⇒(ii) (反证法)设 y 是 Z 中异于 x 的非 M 饱和点，则 G 中存在以 x 和 y 为端点的 M 交错路 P. P 是 G 中以 x 为端点的 M 增广路，与(i)的假定矛盾. 所以(ii)成立.

(ii)⇒(i) (反证法)设 G 中存在以 x 为端点的 M 增广路 P，并设 P 的另一端点为 $y(\neq x)$. 则 y 是非 M 饱和点. 由 Z 的定义知，$y\in Z$，矛盾于(ii)的假定，所以(i)成立.

(ii)⇒(iii) 任取 $y\in N_G(S)\subseteq Y$，于是存在 $u\in S=Z\cap X$ 和 $e\in E(G)$ 使 $\psi_G(e)=uy$. 若 $u=x$，则显然有 $y\in T$，下设 $u\neq x$. 于是 G 中存在以 x 和 u 为端点的 M 交错路 P. 由于 x 是非 M 饱和点，所以 u 为 M 饱和点. 若 P 不含 y，则 $e\notin M$. 由 Z 的定义知，$y\in Z\cap Y=T$. 因而有 $N_G(S)\subseteq T$. 再由(a)，$T=N_G(S)$.

由于 x 是 Z 中唯一的非 M 饱和点，所以 T 中点全是 M 饱和点. 又由于 X 中通过 M 与 T 中点配对的点全在 S 中，且 $T=N_G(S)$，所以 $S\setminus\{x\}$ 中点与 T 中点由 M 配对. 故有 $|T|=|S|-1$.

(iii)⇒(ii) 任取 $z\in S\setminus\{x\}$. 设 P 是 G 中以 x 和 z 为端点的 M 交错路. 由于 G 是 2 部分图，并且 $x,z\in X$，所以 P 的长为偶数. 又由于 x 是非 M 饱和点，所以 z 是 M 饱和点. 由 $z\in S\setminus\{x\}$ 的任意性知，$S\setminus\{x\}$ 中点全是 M 饱和点，它们与 $N_G(S)$ 中点由 M 配成对. 由于 $N_G(S)=T$ 且 $|T|=|S|-1$，所以 T 中点全是 M 饱和点，即知 x 是 Z 中唯一的非 M 饱和点，(ii)成立. □

推论 5.10 非空 2 部分图有饱和所有最大度点的最大匹配.

证明 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图，并设 M 是 G 中最大匹配并尽可能多地饱和最大度点.

(反证法)设存在最大度点 x 是非 M 饱和的. 令 Z 是 G 中以 x 为起点的 M 交错路所能连通的顶点集. 不妨设 $x\in X$，并令

$$S=Z\cap X,\quad T=Z\cap Y.$$

由于 M 是 G 中最大匹配，所以由定理 5.9 知 G 中不存在以 x 为起点的 M 增广路. 再由定理 5.10 知

$$|T|=|S|-1, \text{且 } N_G(S)=T.$$

若 S 中点全是最大度点，则

$$\Delta|S|=\sum_{u\in S}d_G(u)=|(S,T)|=\sum_{u\in T}d_G(u)\leqslant\Delta|T|,$$

即有 $|S|\leqslant|T|=|S|-1$，矛盾. 于是，S 中存在非最大度点，设为 z，则 $z\neq x$. 令

$$P=x\,e_1\,x_1\,e_2\cdots\,e_{m-1}\,x_{m-1}\,e_m\,z$$

是 G 中 M 交错路. 由于 $x,z\in Z$，所以 m 为偶数. 又因为 x 是非 M 饱和点，所以 $e_1,e_3,\cdots,e_{m-1}\notin M$，而 $e_2,e_4,\cdots,e_m\in M$. 因而 z 是 M 饱和点. 于是令

$$M'=M\Delta E(P)=(M\backslash\{e_2,e_4,\cdots,e_m\})\cup\{e_1,e_3,\cdots,e_{m-1}\},$$

则 $|M'|=|M|$，即 M' 是 G 中最大匹配. 但 M' 饱和最大度点的数目比 M 饱和最大度点的数目至少多 1 个(即 x)，矛盾于 M 的选取. □

推论 5.10.1　任何 2 部分图 G 的边集 $E(G)$ 可以划分成 $\Delta(G)$ 个边不交匹配.

下面给出匈牙利算法.

匈牙利算法的基本思想是简单的. 从 G 的任何匹配 M 开始. 若 M 饱和 X，则 M 是 G 的完备匹配. 若 M 不能饱和 X，则在 X 中选择一个非 M 饱和点 x. 若 G 中存在以 x 为起点的 M 增广路 P，则由定理 5.9 知 M 不是最大匹配，而且 $\widetilde{M}=M\Delta E(P)$ 是比 M 更大的匹配，因而饱和 X 中更多的点. 然后用 $\widetilde{M}$ 替代 M 并重复上述程序. 若 G 中不存在以 x 为起点的 M 增广路，则令 Z 是 G 中由起点为 x 的 M 交错路所能连接的顶点集，并令

$$S=Z\cap X,\qquad T=Z\cap Y.$$

则由定理 5.10 知 x 是 Z 中唯一的非 M 饱和点，而且

$$N_G(S)=T,\qquad |T|=|N_G(S)|<|S|.$$

由 Hall 定理(5.1)知 G 没有完备匹配.

匈牙利算法

1. 任取 G 的匹配 M. 若 M 饱和 X，则停止. 若 M 不能饱和 X，则取 X 的非 M 饱和点 x. 令 $S=\{x\}$，$T=\varnothing$.
2. 若 $N(S)=T$，则停止，此时 G 中无完备匹配. 若 $N(S)\neq T$，则取 $y\in N(S)\backslash T$.
3. 若 y 是 M 饱和的，则存在 $z\in X\backslash S$ 使 $yz\in M$. 用 $S\cup\{z\}$ 替代 S，$T\cup\{y\}$ 替代 T，并转入第 2 步. 若 y 是非 M 饱和的，则 G 中存在以 x 为起点且以 y 为终点的 M 增广路 P. 用 $\widetilde{M}=M\Delta E(P)$ 替代 M 并转入第 1 步.

下面举例说明匈牙利算法.

例 5.3.1　考察图 5.11(a)所示的 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图 G，其中 X

$=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\},Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$.

取初始匹配 $M_0=\{x_2y_2,x_3y_3,x_5y_5\}$. x_1 是 X 中非 M_0 饱和点. 令 $S_0=\{x_1\},T_0=\varnothing$. 因为 $N(S_0)=\{y_2,y_3\}\supset T_0$，所以取 $y_2\in N(S_0)\setminus T_0$. y_2 是 M_0 饱和点，$x_2\in X$ 使 $x_2y_2\in M_0$.

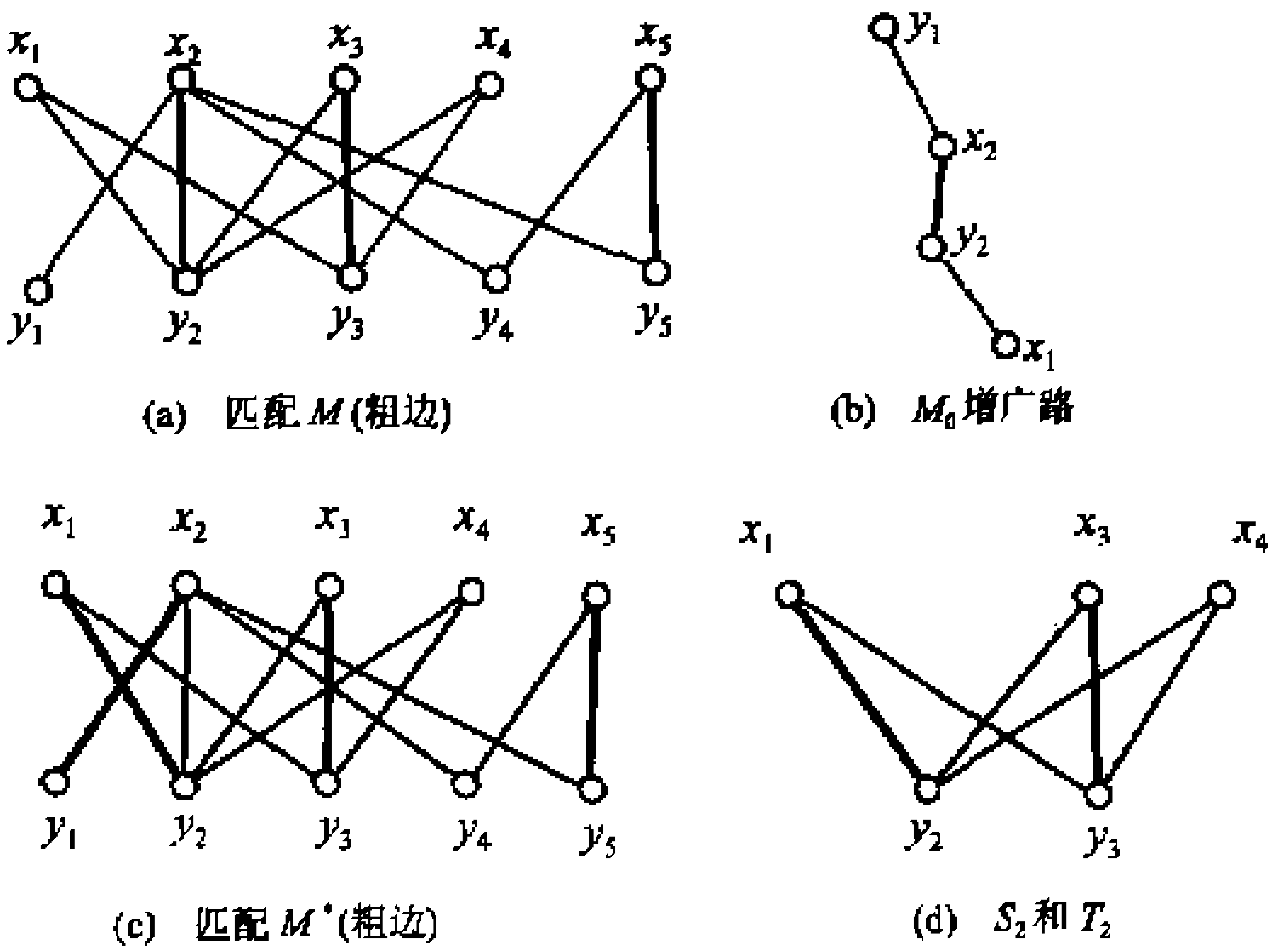


图 5.11　匈牙利算法的应用

令 $S_1=\{x_1,x_2\},T_1=\{y_2\}$. 则 $N(S_1)=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}\supset T_1$. 取 $y_1\in N(S_1)\setminus T_1$. y_1 是非 M_0 饱和点，所以 $P_0=x_1y_2x_2y_1$ 是 M_0 增广路(见图 5.11(b)). 令

$$M_1=M_0\Delta E(P_0)=\{x_1y_2,x_2y_1,x_3y_3,x_5y_5\}$$

(见图 5.11(c)). 用 M_1 替代 M_0 再执行第 1 步. $x_4\in X$ 是非 M_1 饱和点. 令 $S_0=\{x_4\},T_0=\varnothing$，则 $N(S_0)=\{y_2,y_3\}\supset T_0$. 取 $y_2\in N(S_0)\setminus T_0$，$y_2$ 是 M_1 饱和点并且 $x_1y_2\in M_1$.

令 $S_1=\{x_1,x_4\},T_1=\{y_2\}$. 因为 $N(S_1)=\{y_2,y_3\}\supset T_1$. 取 $y_3\in N(S_1)\setminus T_1$，$y_3$ 是 M_1 饱和的，而且 $x_3y_3\in M_1$. 令

$$S_2=\{x_1,x_3,x_4\},T_2=\{y_2,y_3\}=N(S_2)$$

(见图 5.11(d)). 匈牙利算法停止. 因为有 $|N(S_2)|<|S_2|$，故 G 没有完备匹配. □

例 5.3.2　考察图 5.12(a)所示的 2 部分图. 取初始匹配 $M_0=\{x_1y_4,x_4y_1,x_5y_5\}$. x_2 是 X 中非 M_0 饱和点.

令 $S_0=\{x_2\},T_0=\varnothing$，则 $N(x_2)=\{y_1,y_4,y_5\}\supset T_0$. 取 $y_1\in N(S_0)\setminus T_0$. y_1 是 M_0 饱和点，并且 $x_4y_1\in M_0$.

令 $S_1=\{x_2,x_1\}$，$T_1=\{y_1\}$．则 $N(S_1)=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}=Y\supset T_1$．取 $y_2\in N(S_1)\setminus T_1$．$y_2$ 是非 M_0 饱和点．$P_0=x_2y_1x_1y_2$ 是 M_0 增广路（见图 5.12(b)）．令

$$M_1=M_0\Delta E(P_0)=\{x_1y_4,x_2y_1,x_4y_2,x_5y_5\}$$

（见图 5.12(c)中粗边所示）是 G 中匹配．

取 M_1 为初始匹配再执行算法．x_3 是 X 中非 M_1 饱和点．令 $S_0=\{x_3\}$，$T_0=\varnothing$，则 $N(x_3)=\{y_2,y_3\}\supset T_0$．取 $y_3\in N(S_0)\setminus T_0$，$y_3$ 是非 M_1 饱和点．则 $P_1=x_3y_3$ 是 M_1 增广路．令

$$M_2=M_1\Delta E(P_1)=\{x_1y_4,x_2y_1,x_3y_3,x_4y_2,x_5y_5\}$$

（见图 5.12(d)中粗边所示）．则 M_2 是 G 中饱和 X 的匹配，因而是 G 的完备匹配． □

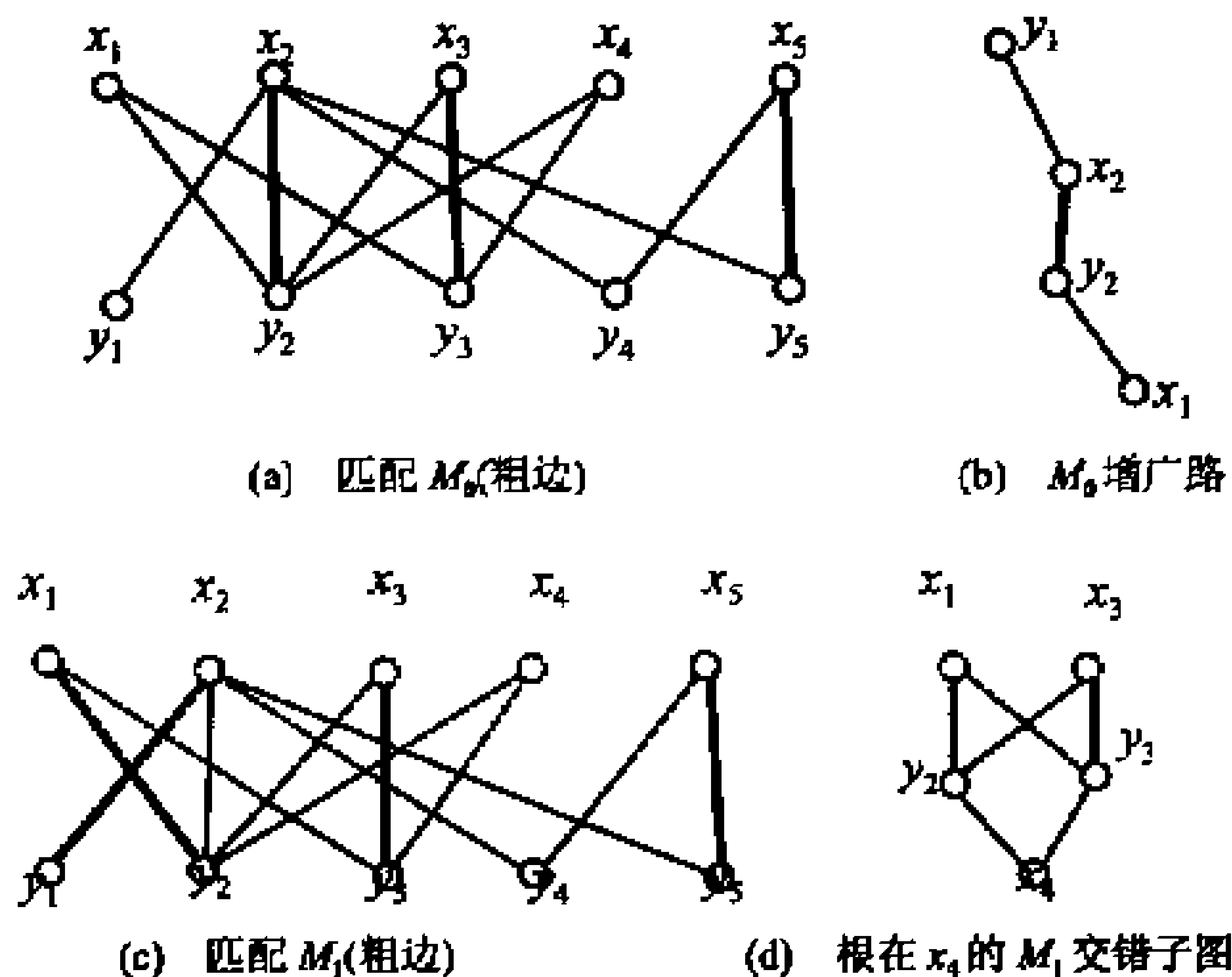


图 5.12 匈牙利算法的应用

匈牙利算法的复杂度是 $O(\nu\varepsilon^2)$（习题 5.3.3），因而是有效的．把匈牙利算法中的程序稍加修改就可以获得求 2 部分图的最大匹配（习题5.3.4）．

习 题

5.3.1 证明：任何林至多有一个完备匹配．

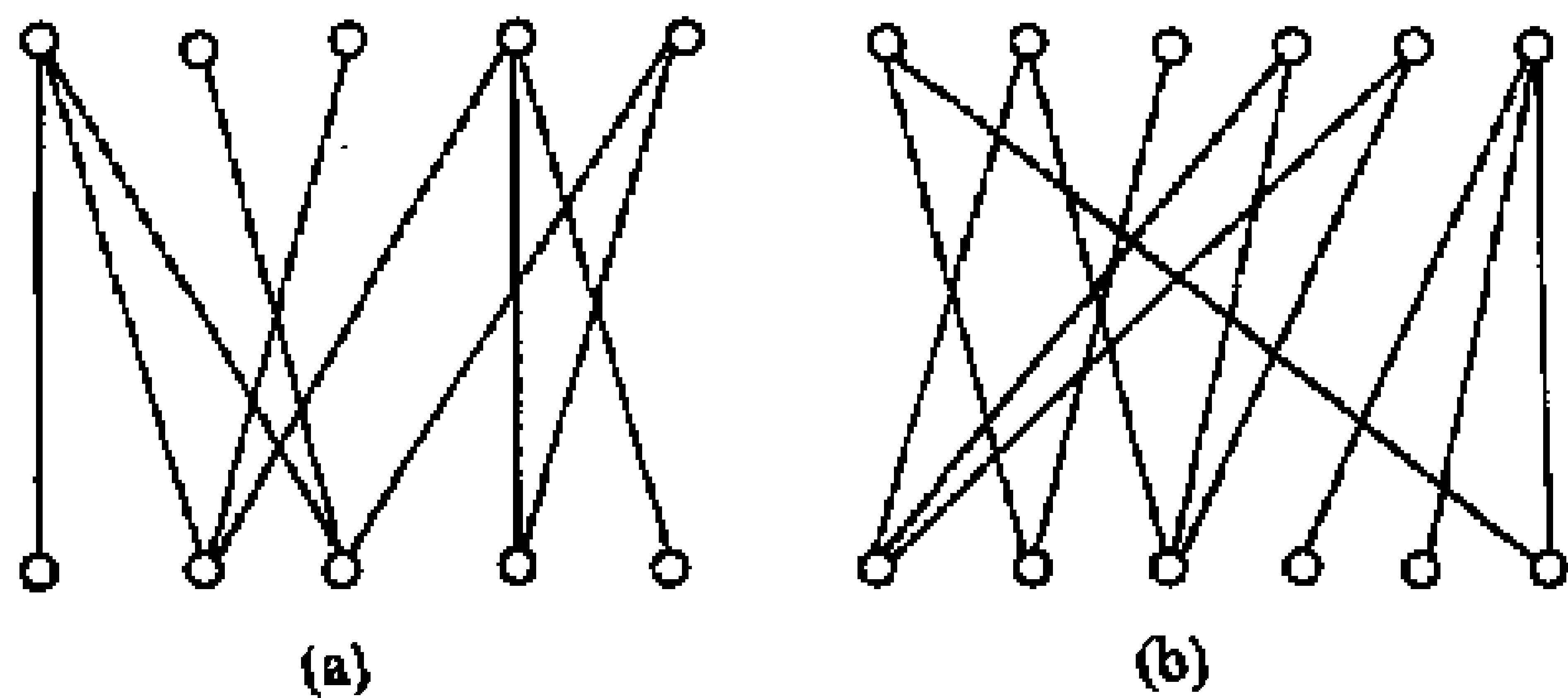
5.3.2 设 M 和 N 是 G 中两个不交匹配，并且 $|M|>|N|$．证明：G 中必存在两个不交匹配 M' 和 N' 使得

$$M'\cup N'=M\cup N,\quad |M'|=|M|-1,\quad |N'|=|N|+1.$$

5.3.3 证明匈牙利算法是 $O(\nu\varepsilon^2)$ 算法．

5.3.4 叙述怎样用匈牙利算法求 2 部分图的最大匹配．

5.3.5　利用匈牙利算法判定下列两个 2 部分图是否有完备匹配. 若没有完备匹配,求出它的一个包含所有最大度点的最大匹配.



(习题 5.3.5)

5.3.6　设 S 是 n 个元素集. 由 S 中元素组成的**拉丁矩形(Latin rectangle)**是指 $r\times s$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$,其中 $r\leqslant n, s\leqslant n, a_{ij}\in S$ 而且 A 的每行和每列元素互不相同. 若 $r=s=n$,则称这个拉丁矩形为 n 阶**拉丁方(Latin square)**. 证明:

(a)下列矩阵 A 必可以补上两行使其成为 5 阶拉丁方,其中:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix};$$

(b)对任意的 r 行 n 列拉丁矩形($r<n$),必可以补上 $n-r$ 行使其成为 n 阶拉丁方.

5.4　最优安排问题

在上一节,我们利用匈牙利算法解决了人员安排问题. 如果那种安排方案不止一种或者说每个职员都能胜任每项工作,这时的人员安排就要考虑每个职员对各项工作的效率,比如熟练程度等. 怎样给出一个安排方案使总效率达到最大? 求这种安排问题称为**最优安排问题(optimal assignment problem)**.

考察 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的加权完全 2 部分图 $(K_{n,n},w)$,其中 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$,$Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$,边 x_iy_j 上的权 $w(x_iy_j)$ 表示职员 x_i 做工作 y_j 的效率. 最优人员安排问题就等价于在这个加权图 $(K_{n,n},w)$ 中求一个有**最大权完备匹配(maximum weight perfect matching)**.

当然,若枚举所有 $n!$ 个完备匹配(见习题 5.1.9(c)),然后比较它们的权,这种方法无疑是可以的. 但是当 n 很大时,这种方法显然是无效的. 本节将介绍一个求最大权完备匹配的有效算法,它属于 Kuhn(1955)和 Munkres(1957).

设 $l\in\mathscr{V}(K_{n,n})$. 若对每条边 $e=xy$,均有

$$l(x)+l(y)\geqslant w(e),$$

则称 l 为 $(K_{n,n},w)$ 的**可行顶点标号(feasible vertex labelling)**.

可行顶点标号总是存在的. 例如 $l\in\mathscr{V}(K_{n,n})$ 定义如下：

$$\begin{cases} l(x)=\max\limits_{y\in Y} w(xy), & 若\ x\in X \\ l(y)=0, & 若\ y\in Y. \end{cases}$$

这种可行顶点标号称为**平凡标号(trivial labelling)**.

设 $G=K_{n,n}$，并设 l 是 (G,w) 的可行顶点标号，令

$$E_l=\{xy\in E(G): l(x)+l(y)=w(xy)\},$$

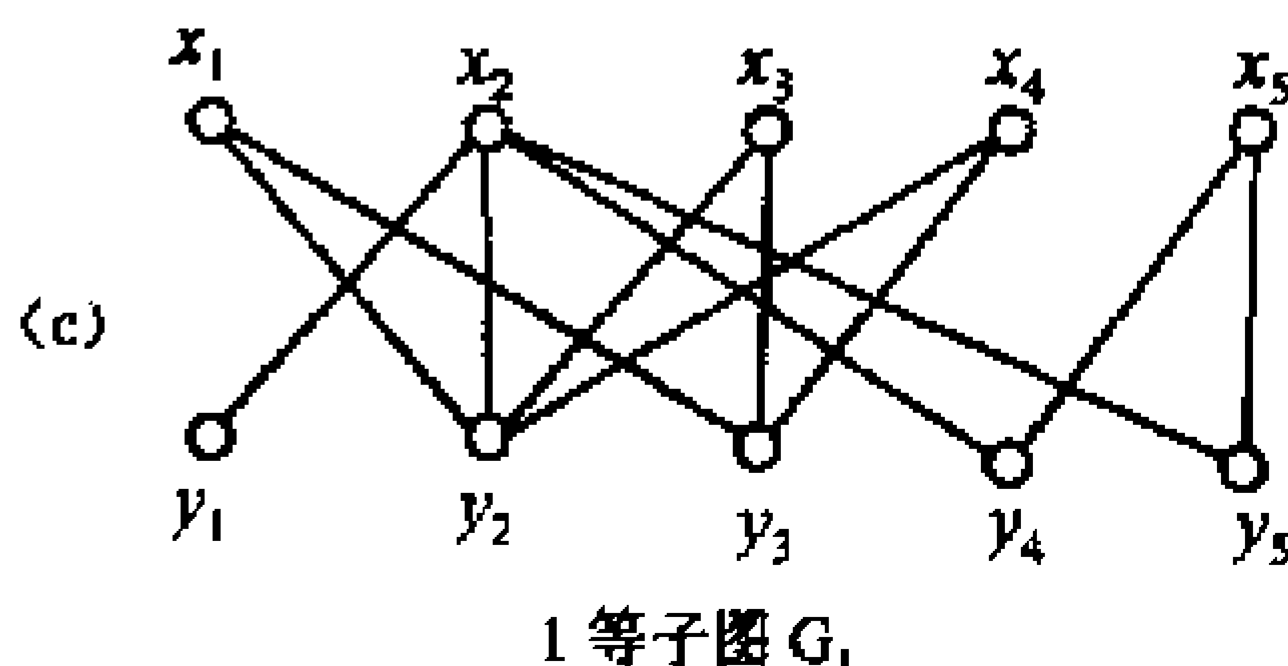
并令 G_l 为 G 中以 E_l 为边集的支撑子图，G_l 称为 **l 等子图(equality subgraph)**.

例 5.4.1 考虑完全 2 部分图 $K_{5,5}$，其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_5\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_5\}$，边 x_iy_j 的权 $w(x_ix_j)=w_{ij}$ 如图 5.13(a)中矩阵 $W=(w_{ij})$ 所示. (b)中矩阵 W 的右旁和下边的数分别表示：

$$\text{(a)}\quad W=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad W=\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{5} & \mathbf{5} & 4 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 2 & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}\begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$$
$$\qquad\qquad\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(c)



$$\text{(d)}\quad W=\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 2 & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$
$$\qquad\qquad\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(e)

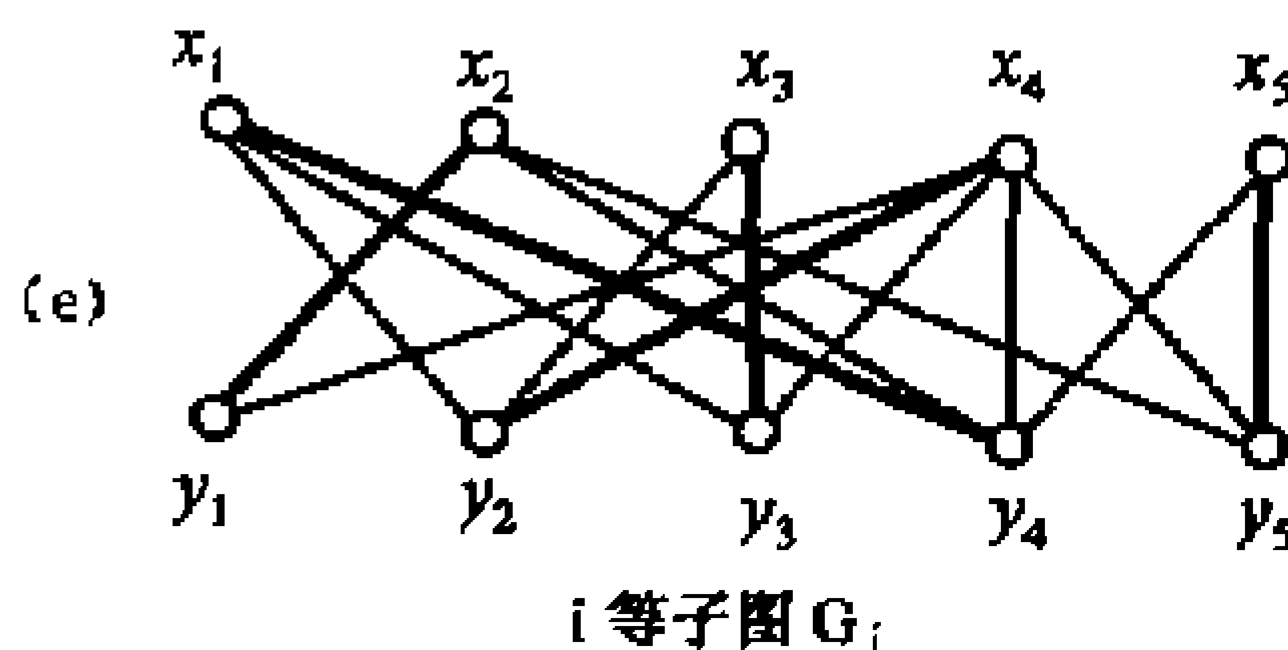


图 5.13 Kuhn-Munkres 算法的应用

$$l(x_1)=5, l(x_2)=2, l(x_3)=4, l(x_4)=1, l(x_5)=3,$$

$$l(y_1)=l(y_2)=l(y_3)=l(y_4)=l(y_5)=0.$$

这样定义的 $l\in\mathscr{V}(K_{5,5})$ 是 $(K_{5,5},w)$ 中可行顶点标号，它是平凡标号. 而矩阵中的黑体元素表示 $K_{5,5}$ 中对应的边属于 E_l. 它的 l 等子图 G_l 如图 5.13(c)所示.

□

定理 5.11 设 l 是 G 的可行顶点标号. 若 l 等子图 G_l 有完备匹配 M^*，则

M^* 是 G 的最大权完备匹配.

证明 由于 G_l 是 G 的支撑子图，M^* 是 G_l 的完备匹配，所以 M^* 也是 G 的完备匹配. 又由于对每个 $e\in M^*$ 都属于这个 l 等子图 G_l，而且 M^* 中每条边覆盖每个顶点正好一次. 所以

$$w(M^*) = \sum_{e\in M^*} w(e) = \sum_{x\in V} l(x).$$

另一方面，对 G 的任何完备匹配 M 有

$$w(M) = \sum_{e\in M} w(e) \leqslant \sum_{x\in V} l(x).$$

于是有 $w(M^*)\geqslant w(M)$，即 M^* 是 G 的最大权完备匹配. □

基于定理 5.11，Kuhn (1955)和 Munkres(1957)提出一个在加权完全 2 部分图$(K_{n,n},w)$中求最大权完备匹配的有效算法. 算法的基本思想是：

首先给出 $K_{n,n}$任意的可行顶点标号 l(如平凡标号)，然后决定 G_l. 在 G_l 中执行匈牙利算法. 若在 G_l 中找到完备匹配，则由定理 5.11 知这个完备匹配就是 G 的最大权完备匹配. 否则，匈牙利算法终止于 $S\subset X$，$T\subset Y$ 且 $N_{G_l}(S)=T$. 令

$$\alpha_l=\min\{l(x)+l(y)-w(xy):\ x\in S, y\in Y\backslash T\},$$

则由

$$\hat{l}(u)=\begin{cases} l(u)-\alpha_l, & u\in S,\\ l(u)+\alpha_l, & u\in T,\\ l(u), & \text{其他} \end{cases}$$

确定了一个新的可行顶点标号 $\hat{l}$. 此时 $\alpha_l>0$，且 $T\subset N_{G_{\hat{l}}}(S)$(习题 5.4.1). 以 $\hat{l}$ 替代 l. 连续进行这种修改，直到存在一个等子图含完备匹配时止. 由于最大权完备匹配必存在，所以这种修改必在有限步结束.

例 5.4.2 考察图 5.13(c)中所示的 l 等子图G_l. 我们已在例 5.3.1 中指出它没有完备匹配，而且匈牙利算法终止于 $S=\{x_1,x_3,x_4\}$，$T=\{y_2,y_3\}=N(S)$. 通过计算，

$$\alpha_l = \min\{l(x)+l(y)-w(xy):\ x\in S, y\in Y\backslash T\} = 1.$$

修改后的可行顶点标号 $\hat{l}$ 如图 5.13(d)中矩阵的右旁和下边数所示. 矩阵中黑体元素表示 $K_{5,5}$中对应的边属于 $E_{\hat{l}}$. $\hat{l}$ 等子图 $G_{\hat{l}}$如图 5.13(e)所示. 这就是我们在例 5.3.2 中考察过的图，在那里，我们用匈牙利算法已经求出该图的一个完备匹配(粗边所示)：

$$M=\{x_1y_4, x_2y_1, x_3y_3, x_4y_2, x_5y_5\}.$$

由定理 5.11 知 M 是 $K_{5,5}$中最大权完备匹配，其权和为$w(M)=14$. □

上述求加权完全 2 部分图$(K_{n,n},w)$中最大权完备匹配方法就是著名的 Kuhn-Munkres 算法．现叙述如下：

Kuhn-Munkres 算法

1. 从任意可行顶点标号(例如平凡标号)l 开始，确定 l 等子图G_l，并且在 G_l 中选取匹配 M. 若 M 饱和 X，则 M 是完备匹配，并由定理 5.11 知 M 是最优匹配，算法停止．否则转入第 2 步．
2. 匈牙利算法终止于 $S\subset X, T\subset Y$ 使 $N_{G_l}(S)=T$. 计算 α_l，确定新的可行顶点标号 $\hat{l}$，并以 $\hat{l}$ 替代 l，以 $G_{\hat{l}}$ 替代 G_l 转入第 1 步．

注 1. Kuhn-Munkres 算法是有效算法(习题 5.4.2).

2. 最大权完备匹配不是唯一的．例如，图 5.14(e)中，$M'=\{x_1y_3, x_2y_5, x_3y_2, x_4y_1, x_5y_4\}$是与 M 不相交的最大权完备匹配．

3. Kuhn-Munkres 算法可以用来求$(K_{n,n},w)$中最小权完备匹配．它基于下列结果：

定理 5.12 **设 a 是$(K_{n,n},w)$的加权矩阵 $W=(w_{ij})_n$ 中元素最大值，J_n 是 n 阶全 1 方阵，$W^*=(w_{ij}^*)_n=aJ_n-W$ 是$(K_{n,n},w^*)$中加权矩阵．则 M^* 是$(K_{n,n},w^*)$中最大权完备匹配$\Leftrightarrow M^*$ 是$(K_{n,n},w)$中最小权完备匹配，而且 $w(M^*)=na-w^*(M^*)$.**

证明 设 $K_{n,n}$是 2 部划分为$\{X,Y\}$的完全 2 部分图，其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$. 由推论 5.1.2 知 $K_{n,n}$有完备匹配．设 $M=\{x_{i_1}y_{j_1}, x_{i_2}y_{j_2},\cdots,x_{i_n}y_{j_n}\}$是 $K_{n,n}$中任何一个完备匹配，则

$$w^*(M)=\sum_{l=1}^{n}w_{i_lj_l}^*=\sum_{l=1}^{n}(a-w_{i_lj_l})$$

$$=na-\sum_{l=1}^{n}w_{i_lj_l}=na-w(M). \qquad (5.9)$$

设 M^* 和 M'分别是$(K_{n,n},w^*)$和$(K_{n,n},w)$中最大权完备匹配和最小权完备匹配，则由(5.9)式，有

$$w^*(M')\leqslant w^*(M^*)=na-w(M^*)$$
$$\leqslant na-w(M')=w^*(M').$$

因此，有
$$w^*(M^*)=na-w(M'). \qquad (5.10)$$

由(5.9)和(5.10)式，有 $w(M^*)=w(M')$，$w^*(M')=w^*(M^*)$，并且 $w(M')=na-w^*(M')$，$w(M^*)=na-w^*(M^*)$. □

例 5.4.3 求图 5.13 中所示加权图$(K_{5,5},w)$中最小权完备匹配．此时 $a=5$.

$$W^* = 5J_5 - W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

利用 Kuhn-Munkres 算法，从平凡标号开始，最后得到一个对应于 W^* 的可行顶点标号如图 5.14 中矩阵右旁和下边的数值所示. 矩阵中黑体元素表示 $K_{5,5}$ 中对应的边属于 E_l，l 等子图 G_l 如图 5.14 所示. 它的一个完备匹配（粗边所示），即最大权完备匹配：$M^* = \{x_1y_5, x_2y_3, x_3y_4, x_4y_1, x_5y_2\}$. $w^*(M^*) = 21$. 所以由定理 5.12 知 M^* 是 $(K_{5,5}, w)$ 中一个最小权匹配，权为 $w(M^*) = 25 - w^*(M^*) = 25 - 21 = 4$.

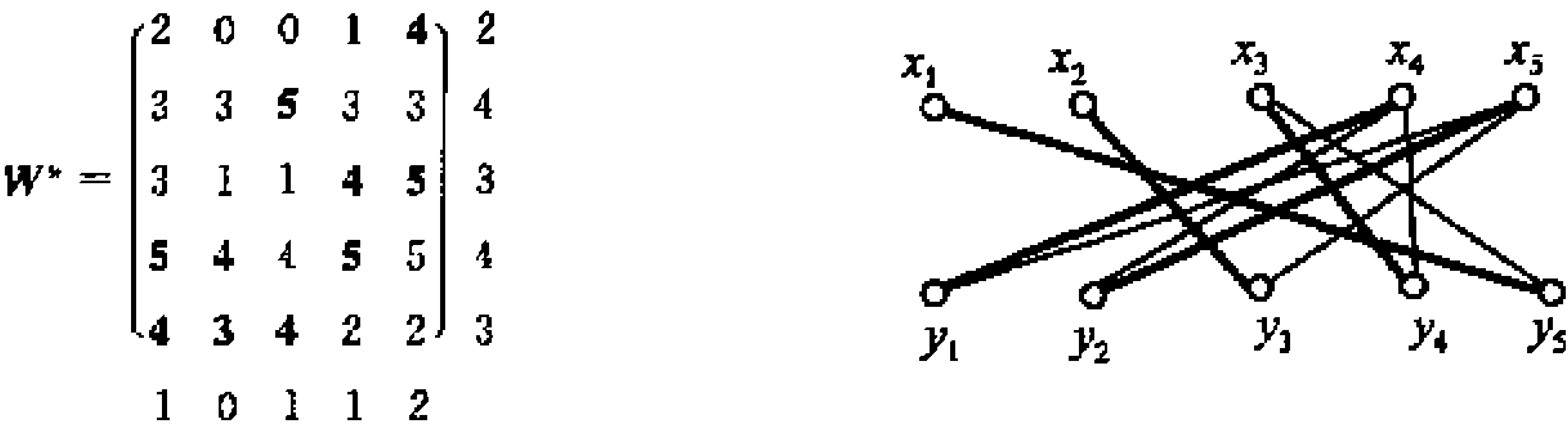


图 5.14

由此可知，对 $(K_{5,5}, w)$ 的任何一个完备匹配 M，其权满足 $4 \leqslant w(M) \leqslant 14$. 为了提高工作效率，选择一个最佳工作分配方案是完全必要的. □

例 5.4.4 作为上述方法的应用，考虑下列工作排序问题.

有一台机床加工 n 种不同的零部件 $J_i (i=1,2,\cdots,n)$. 每加工完一个零部件后，须将机床加以调整才能加工另一个零部件. 设加工完 J_i 后，在加工 J_j 之前机床调整时间为 t_{ij}. 问如何安排这些零部件的加工顺序使调整机床所耗总时间最短？

例如，有 6 种零部件需要加工，调整机床所耗时间 t_{ij}（单位为分）如下矩阵所示：

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

如果按

$$J_1 \xrightarrow{5} J_2 \xrightarrow{1} J_3 \xrightarrow{1} J_4 \xrightarrow{1} J_5 \xrightarrow{5} J_6$$

的顺序安排加工，则调整机床总耗时为(5+1+1+1+5=)13 分钟. 但如果按

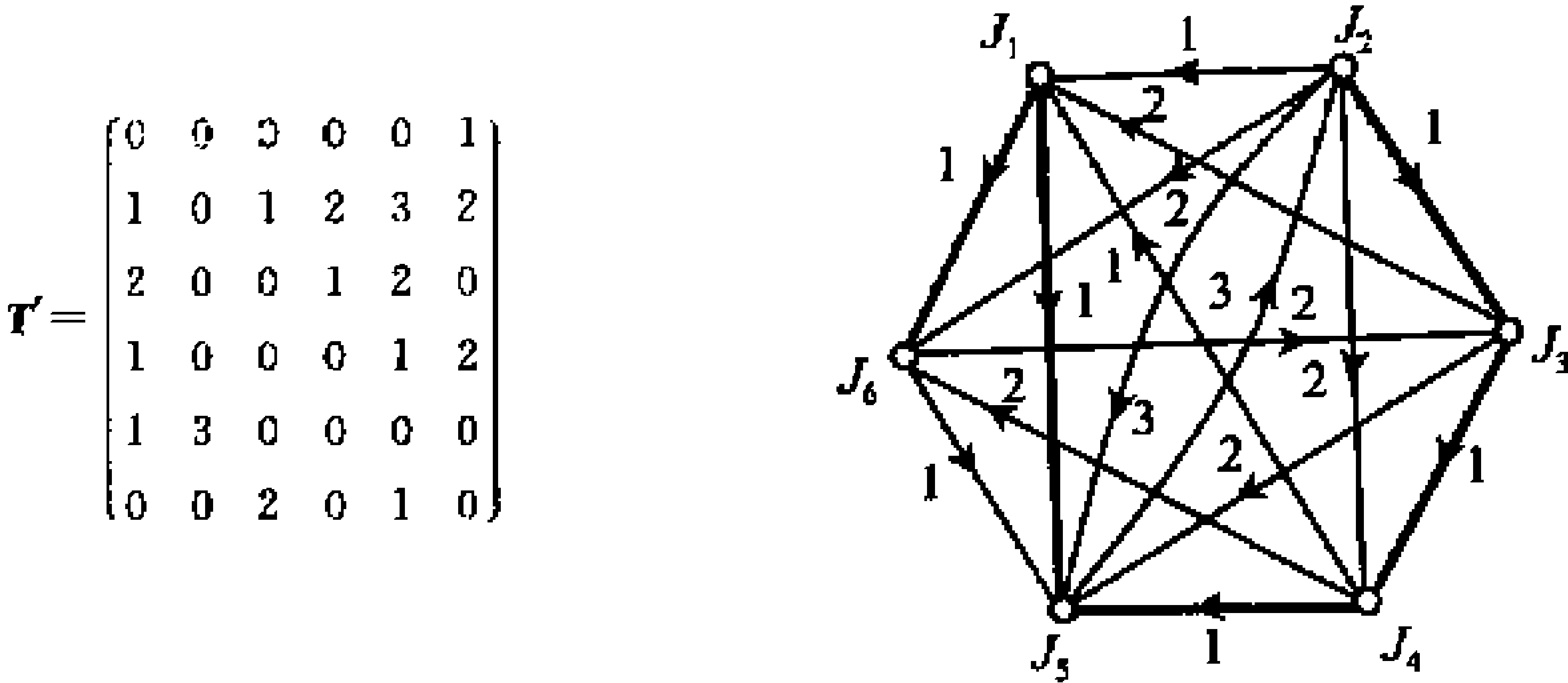
$$J_1 \xrightarrow{4} J_4 \xrightarrow{4} J_3 \xrightarrow{5} J_2 \xrightarrow{3} J_5 \xrightarrow{5} J_6$$

的顺序安排加工，则调整机床总耗时间为(4+4+5+3+5=)21 分钟. 由此看来，为提高工作效率，我们必须寻找一个好的排序.

为寻找好的加工排序，构造加权简单有向图$(D, \boldsymbol{T}')$，其中

$$V(D)=\{J_1,J_2,J_3,J_4,J_5,J_6\},\quad (J_i,J_j)\in E(D)\Leftrightarrow t_{ij}\leqslant t_{ji},$$

且权为 t_{ij}. 这样得到的加权有向图$(D,\boldsymbol{T}')$如图 5.15 所示.



$$\boldsymbol{T}'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图 5.15

D 含支撑竞赛图，因而由定理 1.2 知 D 含 Hamilton 有向路. 显然，任何一个好的加工排序一定是 D 中一条 Hamilton 有向路. 反之，D 中任何一条 Hamilton 有向路对应一个加工排序. 例如$(J_2,J_3,J_4,J_5,J_1,J_6)$是 D 中一条 Hamilton 有向路(图中粗边所示). 按这条 Hamilton 有向路的顺序安排加工的总耗时为 5 分钟. 于是，要寻找最短耗时的加工排序，首先找出 D 中所有 Hamilton 有向路，然后比较它们的权. 权最小的 Hamilton 有向路对应的加工顺序必是最好的. 但一般说来，这是很难做到的. 下面，我们利用 Kuhn-Munkres 算法求出它的一个近似解.

假设最好的加工顺序已安排好. 由上面的说明，它对应 D 中一条具有最小权的 Hamilton 有向路，设为 P^*. 考虑对应于 D 的伴随 2 部分图 G(其定义在 1.2 节)，如图5.16所示，其中权$w(J'_iJ''_j)=t_{ij}$. 注意，由于 D 无环，所以这样的 2 部分图 G 不含边 $J'_iJ''_i$，$i=1,2,\cdots,6$.

于是，D 中任何一条(J_i,J_j)Hamilton 路 P 就对应于$G-\{J'_j,J''_i\}$中一个完备匹配 M 并且与 P 有相等的权. 例如，设 $P=(J_2,J_3,J_4,J_5,J_1,J_6)$是 D 中一条(J_2,J_6)Hamilton 路(图 5.15 中粗边所示). 它对应于 $G-\{J'_6,J''_2\}$中一

个完备匹配 M，如图 5.16 中粗边所示. 它们的权都是 5. 这个事实的逆不成立. 例如，图 5.16 所示的 $G-\{J'_4, J''_1\}$ 中有一个完备匹 $M'=\{J'_1J''_6, J'_2J''_5, J'_3J''_4, J'_5J''_2, J'_6J''_3\}$，但它不对应于 D 中任何一条 Hamilton 有向路. 这个事实给问题的解决带来了困难. 若能在 G 中找到两顶点 J''_j 和 $J'_i(i\neq j)$ 并能在 $G-\{J'_j, J''_i\}$ 中找到一个最小权完备匹配 M 使它对应于 D 中一条 (J_i, J_j) Hamilton 路 P，则 P 就可以作为 P^* 的一个近似解，而且权 $w(P^*)\leqslant w(P)=w(M)$.

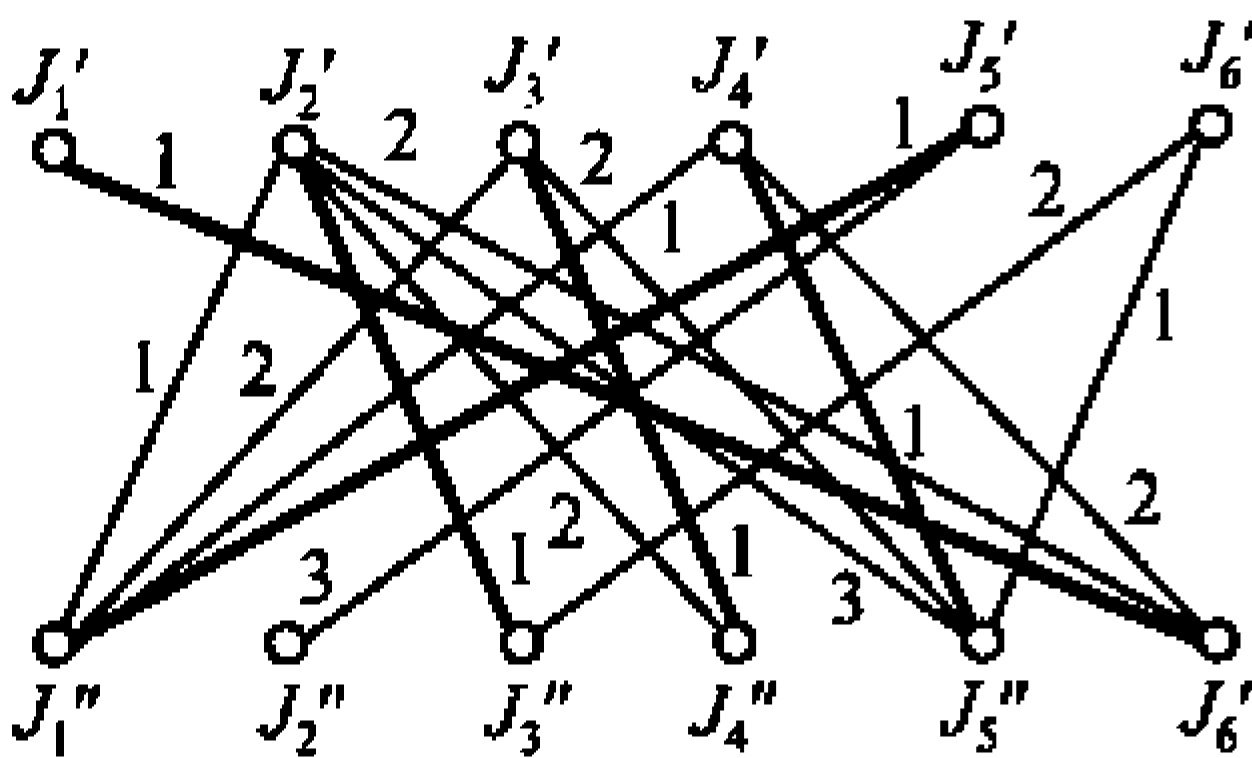


图 5.16

下面，利用 Kuhn-Munkres 算法求出满足上述要求的匹配来.

考虑 2 部分加权图 $(K_{6,6}, w)$，其中加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}+5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}5&5&3&4&2&1\\1&5&1&2&3&2\\2&5&5&1&2&3\\1&4&4&5&1&2\\1&3&4&5&5&5\\4&4&2&3&1&5\end{pmatrix}.$$

欲求 $(K_{6,6}, w)$ 中最小权完备匹配，只须求 $(K_{6,6}, w')$ 中最大权完备匹配，其中 $\boldsymbol{W}'=5\boldsymbol{J}-\boldsymbol{W}$（如图 5.17 所示）. 一个平凡标号 l 和 l 等子图 G_l 如图 5.17 所示. $G_l-\{J'_6, J''_2\}$ 有一个完备匹配（粗边所示）：$M^*=\{J'_1J''_6, J'_2J''_3, J'_3J''_1, J'_4J''_5, J'_5J''_1\}$. $W'(M^*)=4\cdot 5=20$. M^* 是 $G_l-\{J'_6, J''_2\}$ 中最小权完备匹配且权为 5. 它对应 D 中的 Hamilton 有向路是 $(J_2, J_3, J_4, J_5, J_1, J_6)$. 于是，按

$$\boldsymbol{W}'=\begin{pmatrix}0&0&2&1&3&4\\4&0&4&3&2&3\\3&0&0&4&3&2\\4&1&1&0&4&3\\4&2&1&0&0&0\\1&1&3&2&4&0\end{pmatrix}\begin{matrix}4\\4\\4\\4\\4\\4\end{matrix}$$
$$\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\end{matrix}$$

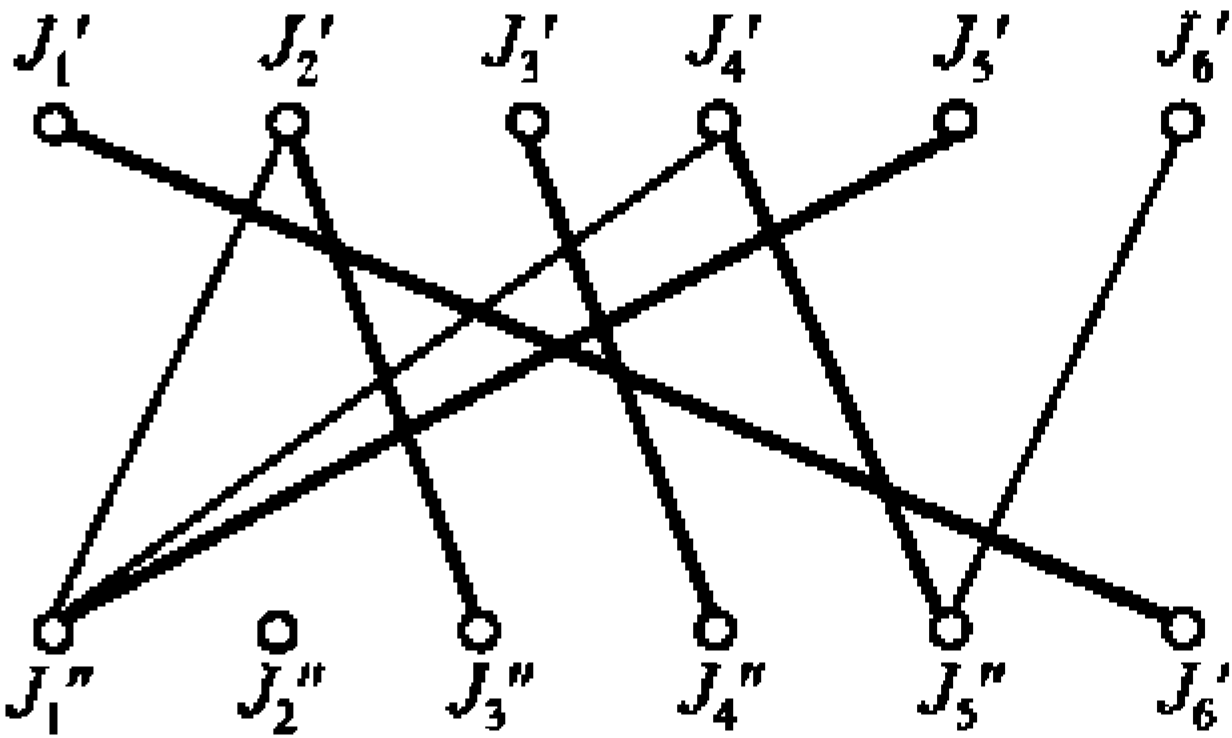


图 5.17

$$J_2 \xrightarrow{1} J_3 \xrightarrow{1} J_4 \xrightarrow{1} J_5 \xrightarrow{1} J_1 \xrightarrow{1} J_6$$

的顺序加工零件，调整机床总耗时是 5 分钟，因而是最好的(因为调整机床总耗时至少要 5 分钟).

图 5.17 所示的 $G_t-\{J'_5, J''_2\}$ 中也有一个完备匹配：

$$M=\{J'_1J''_6, J'_2J''_3, J'_3J''_4, J'_4J''_1, J'_6J''_5\}.$$

它对应 D 中的 Hamilton 有向路是$(J_2, J_3, J_4, J_1, J_6, J_5)$. 按这条路的顺序

$$J_2 \xrightarrow{1} J_3 \xrightarrow{1} J_4 \xrightarrow{1} J_1 \xrightarrow{1} J_6 \xrightarrow{1} J_5$$

安排零件加工也是最好的. □

习 题

5.4.1 证明：$\alpha_l>0$ 且 $T\subset N_{G_l}(S)$.

5.4.2 证明：Kuhun-Munkres 算法是有效算法.

5.4.3 求加权图$(K_{5,5}, \boldsymbol{w})$和$(K_{5,5}, \boldsymbol{w}')$中最大权完备匹配和最小权完备匹配，其中：

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}9&8&5&3&2\\6&7&8&6&9\\5&8&1&4&7\\7&7&0&3&6\\9&8&6&4&5\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{W}'=\begin{pmatrix}3&2&1&2&3\\1&4&2&1&2\\5&1&2&3&1\\3&2&6&4&1\\1&2&3&1&2\end{pmatrix}.$$

5.4.4 已知工人 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 做工作 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 的效率 w_{ij} 如下列矩阵所示

$$\boldsymbol{W}=(w_{ij})=\begin{pmatrix}3&4&1&2&2\\0&1&2&3&1\\0&5&5&1&3\\2&2&1&0&5\\1&4&2&1&3\end{pmatrix}.$$

(a)给出一种工作效率最大的分配方案. 最大工作效率为多少?

(b)给出一种工作效率最低的分配方案. 最低工作效率为多少?

5.4.5 n 阶方阵中两两不同行不同列的 n 个元素的集称为该方阵的一条对角线. 对角线的权是它的 n 个元素之和.

(a)分别找出下列矩阵有最大权和最小权的对角线，其权各几何?

(b)证明：矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中所有对角线的权都相等.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&5&8&10&11\\7&6&5&7&4\\8&5&12&9&6\\6&6&13&10&7\\4&5&7&9&8\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9&8&0&0&0\\0&0&8&6&9\\0&8&0&4&7\\0&7&0&3&6\\9&8&6&4&0\end{pmatrix}$$

5.4.6 现有 6 种零部件需要在一台机床上加工. 设调整机床所消耗时间 t_{ij}(分)如下列矩阵

所示：

$$T=(t_{ij})=\begin{pmatrix}0&3&2&5&1&3\\2&0&4&5&4&1\\1&3&0&1&2&2\\4&2&2&0&1&3\\3&1&4&5&0&2\\2&5&3&1&2&0\end{pmatrix}.$$

求一个加工顺序使调整机床所消耗的总时间尽可能地短.

5.5 货郎担问题

一个货郎担着商品去他所在的区域内所有村镇进行推销. 他应怎样选择一条总路程最短的行走路线使每个村镇恰好去一次或者至少去一次，然后回到出发点？这个问题称为**货郎担问题**(**travelling salesman problem**).

这个问题与中国投递员问题(4.6节)颇为相似，但其求解却与中国投递员问题相反. 目前还没有一个有效算法. 现已证明它是属于一类NPC问题.

用图论语言，说得更广义一些，货郎担问题就是在给定的连通加权无向图(G,w)中(其中w可以是距离函数，也可以是其他函数，如费用函数等)找出一条最小权的Hamilton圈或者找出一条经过G中每个顶点并且有最小权的闭链. 前者称为**最优圈**(**optimal cycle**)，后者称为**最优链**(**optimal chain**). 一般说来，货郎担问题这两种定义，会产生不同的解. 例如图5.18(a)所示的加权图(G,w)中有一条权为5的最优圈(x,y,z,x)，也有一条权为4的最优链(x,y,x,z,x). 明智的货郎当然会放弃前者而选择后者.

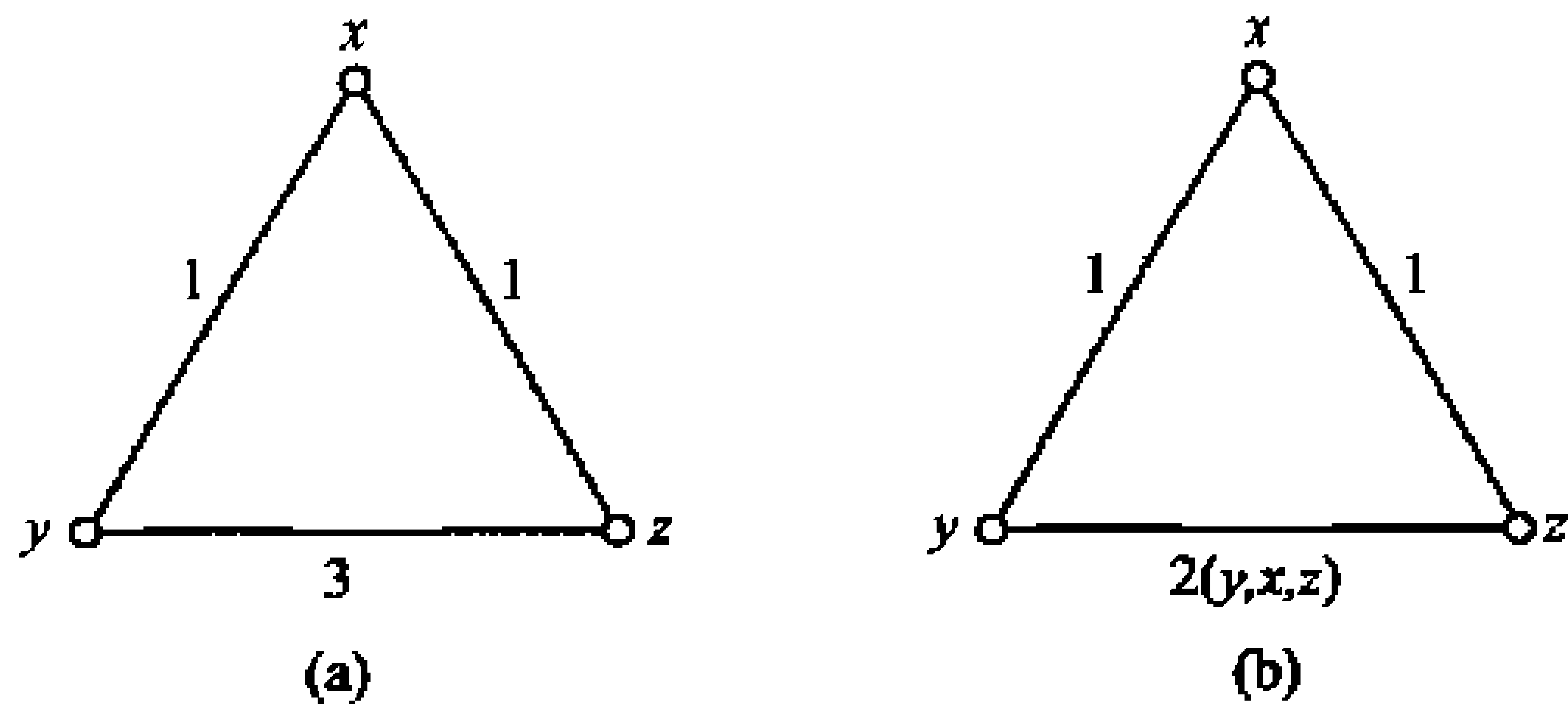


图 5.18

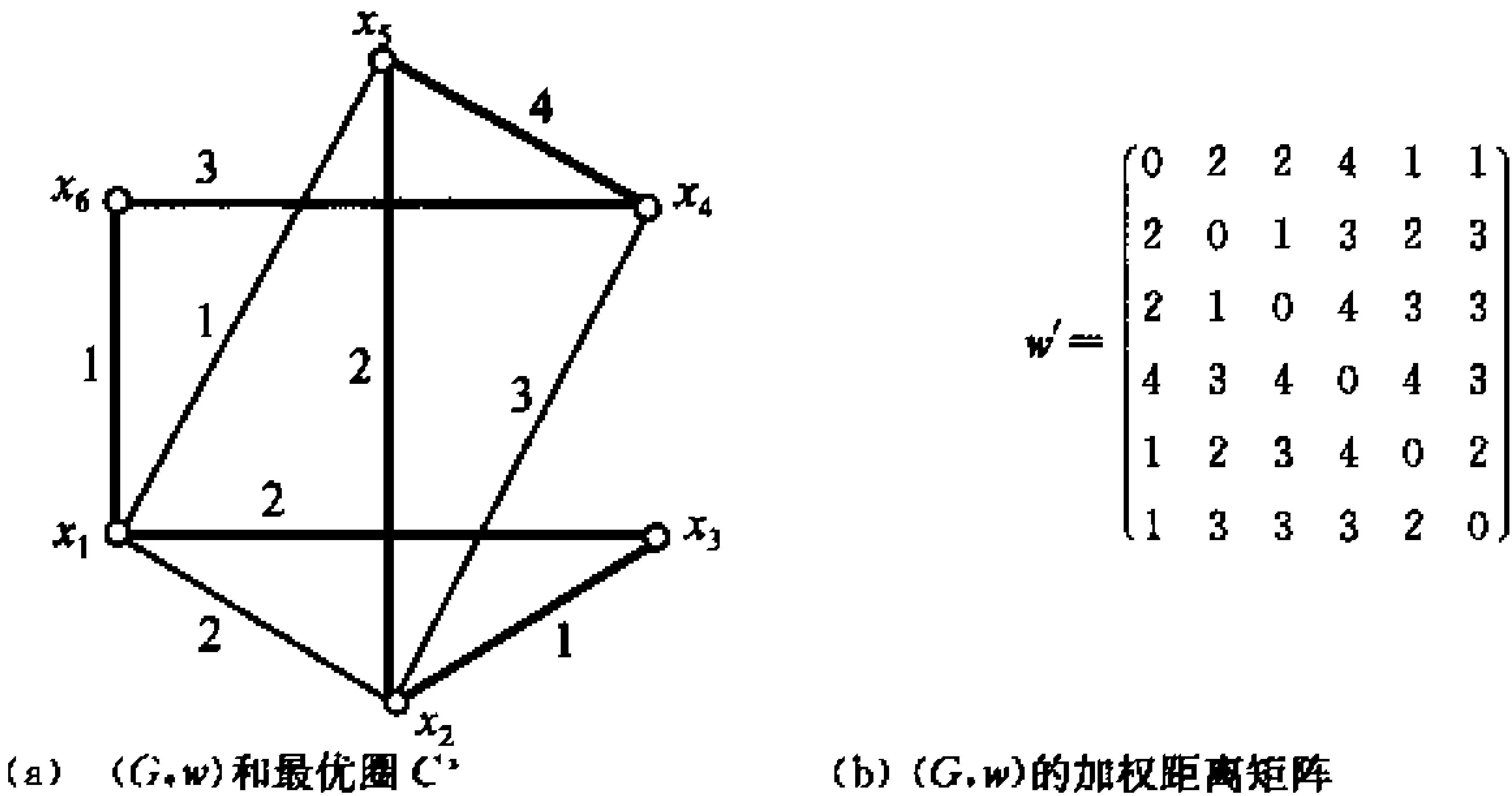
一般的连通加权图中，并不一定存在最优圈. 然而最优链总是存在的. 故在本节的讨论中，我们采用货郎担问题的第二种定义，即在给定的连通加权图(G,w)中找出一条最优链.

设(G,w)是连通加权图. 若对G的任何两个不同顶点x和y均有

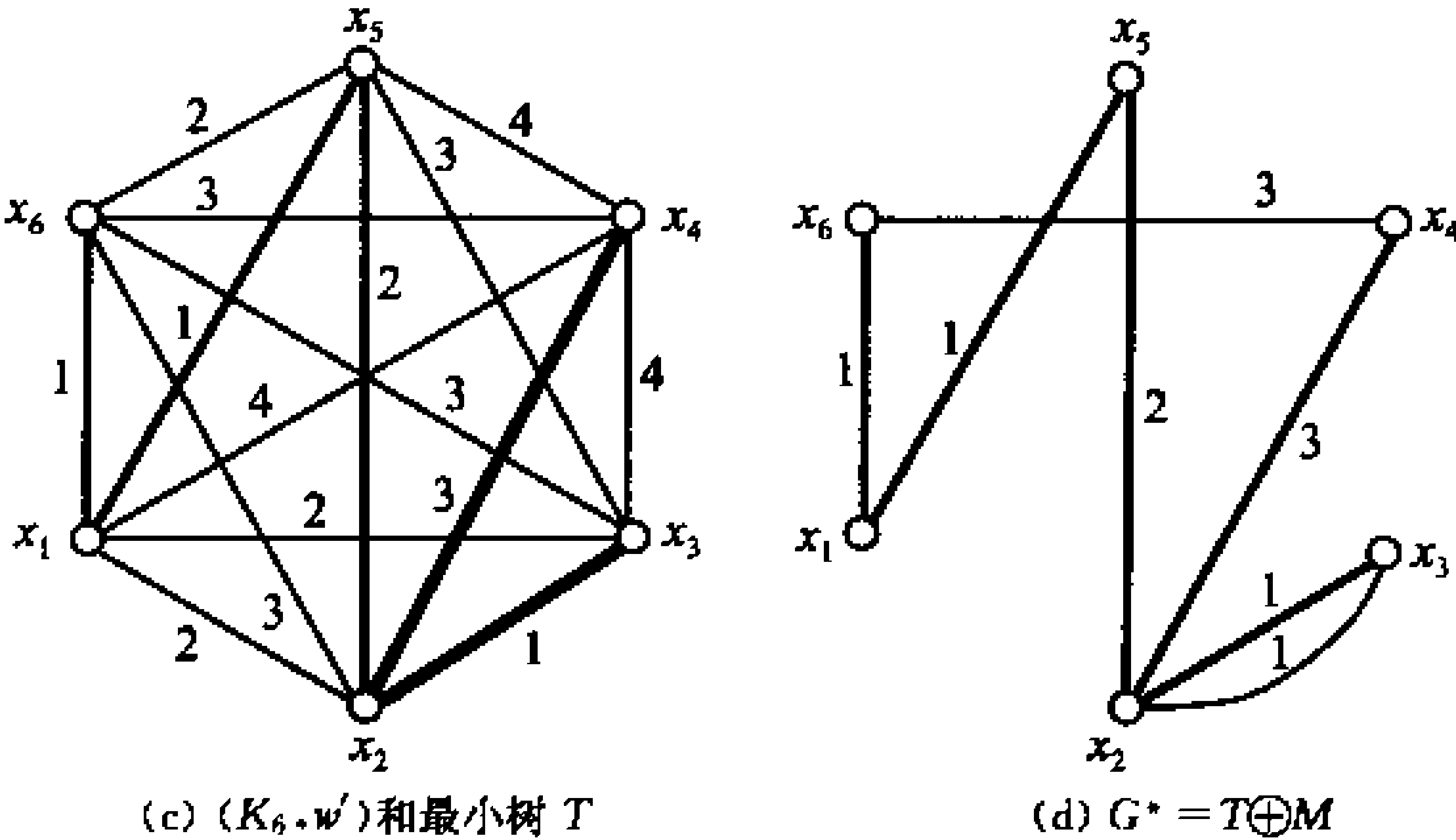
$$w(x,y)\leqslant w(x,z)+w(z,y),\quad \forall z\in V(G)\setminus\{x,y\},$$

其中 $w(x,y)$ 为 x 和 y 之间的(加权)距离，则称 (G,w) 满足三角不等式(**triangle inequality**)．值得注意的是，若 w 是距离函数，则在实际问题中的加权图 (G,w) 几乎都满足三角不等式．这是因为在现实中，某两地之间已有一条经过第三地的最短路 P，人们一般不会再去修一条比 P 更长的路．但若 w 是其他函数，例如费用函数，则 (G,w) 不一定满足三角不等式．例如图 5.18(a)所示的加权图不满足三角不等式．

对于连通加权图 (G,w)，我们构造一个加权完全图 (K_ν,w')，其中 $V(K_\nu)=V(G)$，K_ν 中边 xy 的权 $w'(xy)$ 定义为 G 中 x 和 y 的(加权)距离 $w(x,y)$．(K_ν,w') 满足三角不等式而且 K_ν 中每条边 xy 对应 G 中一条边 xy 使 $w'(xy)=w(xy)$ 或者一条 xy 路 P 使 $w'(xy)=w(P)$．例如，图5.19(b)所示的 (K_3,w') 就是由(a)所示的加权图 (G,w) 构造出来的，其中 $yz\in E(K_3)$ 对应 G 中一条路 $P=(y,x,z)$，$w'(yz)=w(P)=2$．因此 (G,w) 中最优链 (x,y,x,z,x) 对应 (K_3,w') 中



(a) (G,w) 和最优圈 C^*　　(b) (G,w) 的加权距离矩阵



(c) (K_6,w') 和最小树 T　　(d) $G^*=T\oplus M$

图 5.19　Christofides 近似算法的应用

最优圈(x,y,z,x)且权都为4. 反之亦然. 一般地,我们有下列定理:

定理 5.13 连通加权图(G,w)中最优链对应(K_v,w')中一条最优圈且权相等. 反之,(K_v,w')中最优圈对应(G,w)中一条最优链且权相等.

证明 (i)先证明对(K_v,w')中 Hamilton 圈C',(G,w)中对应一条经过每个顶点至少一次的闭链C''使$w(C'')=w'(C')$. 按下列方法构造(G,w)中闭链C'':

设$\forall xy\in E(C')$. 若$xy\in E(G)$,则$w'(xy)=w(xy)$,取$xy\in E(C'')$;若$xy\notin E(G)$,则G中存一条xy路P使得$w(P)=w'(xy)$,取$P\in C''$.

于是C''是G中一条经过每个顶点至少一次的闭链且$w(C'')=w'(C')$.

(ii)设$C=(x,y,z,\cdots,x)$是(G,w)中一条最优链. 从x出发沿着C,依次删去C中已出现的重复顶点(最后一个x除外). 则剩余的顶点(不改变它们在C的顺序)形成(K_v,w')中 Hamilton 圈C'. 例如,$C=(x,y,x,z,x)$是图 5.18(a)所示加权图(G,w)中一条最优链. 删去C中间顶点x,即得$C'=(x,y,z,x)$为图 5.18(b)所示加权图(K_3,w')中一条 Hamilton 圈.

由(K_v,w')和C'的构造知$w'(C')=w(C)$. 这是因为对于$\forall xy\in E(C')$,若$xy\in E(C)$,则$w'(xy)=w(xy)$;若$xy\notin E(C)$,则C中存在一条xy路P且$w(P)=w'(xy)$. 若(K_v,w')中存在一条 Hamilton 圈C^*使$w'(C^*)<w'(C')$,则由于C^*是(K_v,w')中 Hamilton 圈,所以由(i)知(G,w)中存在一条经过每个顶点至少一次的闭链C''使

$$w(C'')=w'(C^*)<w'(C')=w(C).$$

矛盾于C的最优性. 于是C'是(K_v,w')中最优圈.

反之,设C'是(K_v,w')中最优圈. 由(i)知(G,w)中存在一条经过每个顶点至少一次的闭链C'',且$w(C'')=w'(C')$. 若C''不是(G,w)中最优链,而C是(G,w)中最优链. 则由(ii)

$$w(C'')>w(C)=w'(C')=w(C''),$$

这不可能. 所以C''是(G,w)中最优链. □

定理 5.13 告诉我们,求一般加权图(G,w)中最优链可以归结为求满足三角不等式的加权图(K_v,w')中最优圈. 若(G,w)满足三角不等式,则G是K_v的支撑子图,$w=w'|E(G)$. 因此,若(G,w)满足三角不等式且有最优圈C,则C必是(K_v,w')中一条 Hamilton 圈,且$w(C)\geqslant w'(C)=w(C'')$,其中$C''$是$(G,w)$中一条最优链. 反之,设$C'$是$(K_v,w')$中一条最优圈. 若$C'\subseteq G$,则$C'$也是$(G,w)$中一条最优圈;若$C'\not\subseteq G$,则与之对应的$C''$是$(G,w)$中一条最优链,而且$w(C'')=w'(C')$. 因此,当$(G,w)$满足三角不等式,则与$(K_v,w')$中最优圈对应的可能是$(G,w)$中最优链,也可能是$(G,w)$中最优圈. 但是,当$(G,w)$不满足三角不等式,则与$(K_v,w')$中最优圈对应的是$(G,w)$中最优链,而不是最优圈.

按照定理 5.13，我们只需讨论求满足三角不等式加权完全图(K_ν,w)中最优圈. 一个很自然的方法是枚举 K_ν 中所有 Hamilton 圈，然后比较它们的权，权最小的 Hamilton 圈即为所求. 但 K_ν 有$\frac{1}{2}(\nu-1)!$ 条不同的 Hamilton 圈. 当 ν 较大时，它会带来使人们难以接受的计算量. 事实上，现已被证明，货郎担问题属于一类 NPC 问题. 因此. 我们希望有一个有效算法以获得一个比较好的近似解. 这种算法称为**近似算法(approximation algorithm)**.

设 L_0 是由近似算法获得 Hamilton 圈的权值，而 L 是最优圈的权值. 比值 L_0/L 称为该近似算法的**性能比(performance ratio)**. 显然，

$$1\leqslant\frac{L_0}{L}\leqslant a.$$

我们希望获得一个近似算法使 a 为尽可能接近与 1 的常数. 下面介绍一个近似算法，它属于 Christofides(1976).

Christofides 近似算法

1. 求(G,w)的加权距离矩阵 w'并构造(K_ν,w').
2. 求(K_ν,w')中一株最小树 T.
3. 找出 T 中奇度点集 V'并求出$G'=K_\nu[V']$中最小权完备匹配 M.
4. 在 $G^*=T\oplus M$ 中求一条 Euler 回 $C_0=(x,y,z,\cdots,x)$.
5. 从 x 开始，沿 C_0 依次删去 C_0 中已出现的重复顶点(最后一个 x 除外)后，剩余的顶点(不改变它们在 C_0 中的顺序)形成 K_ν 中一条 Hamilton 圈 C，C 即为所求的近似最优圈.

该算法第一步利用 Moore-Dijkstra 算法(见 2.7 节)，第二步利用 Prim 算法求最小树(见 2.6 节). 第三步中的$V'\neq\varnothing$，而且由推论 1.1.2 知$|V'|$为偶数. 由于$G'=K_\nu[V']$是偶阶完全图，由推论 5.2 知G'中必存在完备匹配. 存在许多求最大(小)权完备匹配的有效算法，例如在本章末提到的 Edmonds-Johnson (1970)算法. 在第四步中，G^* 中顶点都是偶点，故为 Euler 图. 利用 4.6 节中的 Edmonds-Johnson 算法或者习题 4.6.4 中的 Fleury 算法求出 G^* 的Euler回 C_0. 因为上述提到的算法都是有效算法，所以 Christofides 算法是有效算法.

例 5.5.1　考虑图 5.19(a)所示的加权图(G,w). 它满足三角不等式；(b)所示的是它的(加权)距离矩阵 W'；(c)所示的是(K_6,w')中由 Prim 算法求出的一株支撑树 T(图中粗边所示). $V'=\{x_2,x_3,x_4,x_6\}$. 通过观察就可以发现 $M=\{x_2x_3,x_4x_6\}$是$(K_6[V'],w')$中最小权完备匹配. 构造出的 G^* 如(d)中所示，它的一条 Euler 回 $C_0=(x_1,x_5,x_2,x_3,x_2,x_4,x_6,x_1)$. 删去 C_0 中重复出现的顶点后得 $C=(x_1,x_5,x_2,x_3,x_4,x_6,x_1)$即为$(K_6,w')$中的 Hamilton 圈，$w'(C)=12$. 由于 C 中边 $x_3x_4\notin E(G)$，所以 C 对应于(G,w)中一条经过每个顶点至少一次的

闭链

$$P=(x_1,x_5,x_2,x_3,x_2,x_4,x_6,x_1),$$
$$w(P)=w'(C)=12.$$

注意,(G,w)中仅有一条 Hamilton 圈(因而是最优的,(a)中粗边所示):

$$C^*=(x_1,x_3,x_2,x_5,x_4,x_6,x_1),$$
$$w(C^*)=13>12=w(P).$$

□

定理 5.14 **对于满足三角不等式的加权图(K_v,w),由 Christofides$H$ 算法求出的 Hamilton 圈满足 $a<\frac{3}{2}$.**

证明 设(K_v,w)满足三角不等式且 C_0 和 C 是由 Christofides 算法求出来的 Euler 回和 Hamilton 圈,则

$$w(C)\leqslant w(C_0)=w(T)+w(M) \tag{5.11}$$

其中,T 是(K_v,w)中最小树,M 是 $G'=K_v[V']$中最小权完备匹配,V'是 T 中奇度点集.

设 C^* 是(K_v,w)中最优圈,则从 C^* 中删去任何一条边得到一株支撑树 T'. 于是

$$w(T)\leqslant w(T')<w(C^*). \tag{5.12}$$

令 C'为 $G'=K_v[V']$中按 C^* 的顺序形成的 Hamilton 圈. 由于(K_v,w)满足三角不等式,所以 $w(C')\leqslant w(C^*)$. 又由于 C'是偶圈,因而 C'可分解两个边不交的完备匹配 M_1 和 M_2 之并. 不妨设$w(M_1)\leqslant w(M_2)$. 于是 M_1 是 G'的完备匹配,并且

$$w(M)\leqslant w(M_1)\leqslant\frac{1}{2}w(C')\leqslant\frac{1}{2}w(C^*). \tag{5.13}$$

由(5.11)、(5.12)、(5.13)式,有

$$w(C)<w(C^*)+\frac{1}{2}w(C^*)=\frac{3}{2}w(C^*).$$

因此

$$\frac{L_0}{L}=\frac{w(C)}{w(C^*)}<\frac{3}{2}.$$

□

目前还没有发现比 Christofides 算法更能接近于最优圈的有效近似算法.

Sahni 和 Gonzalez(1976)已经证明:除非 NPC 问题是 P 问题,否则不可能存在一个使 a 为常数的有效近似算法来求解不满足三角不等式的加权图(K_v,w)中最优圈问题.

习 题

5.5.1 利用 Christofides 算法求下列加权图中近似最优链.

（习题 5.5.1）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	—	56	35	2	51	60
x_2	56	—	21	57	78	70
x_3	35	21	—	36	68	68
x_4	2	57	36	—	51	61
x_5	51	78	68	51	—	13
x_6	60	70	68	61	13	—

5.5.2 设 6 个城市 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 之间的里程如上表，利用 Christofides 算法求出货郎担问题的一个近似解.

5.5.3 设(K_ν, w)是满足三角不等式的加权图. 证明：若 C 是(K_ν, w)中最优圈，而 T 是(K_ν, w)中最优树，则 $w(C) \leqslant 2w(T)$.

5.5.4 求解下列加权图中货郎担问题（最优解为 8117）.

（习题 5.5.4）

5.6 收款台的设置问题

某大型商场为加强经营管理，对商品的零售收入实行统一收款制度. 为了使顾客在任何一个货架前都能看到收款台，问收款台应设置在什么地方并且至少要设置多少个收款台？这个问题称为**收款台的设置问题**.

有许多实际问题都可以归结为这个问题. 例如某军事基地固定岗哨的设置问题，某道路交通系统交通监控器的设置问题等等.

构作简单无向图 $G=(V,E)$. 该商场两排货架之间的通道为 G 的边，通道

交叉处为 G 的顶点. 为使顾客在任何一个货架前都能看到收款台,从尽可能减少设置收款台的数目来说,收款台应设置在通道的交叉处. 于是收款台的设置问题就归结为在 G 中找出一个最小点覆盖.

由于最小点覆盖必是极小点覆盖,所以,我们只需确定 G 的所有极小点覆盖. 遗憾的是,目前还没有一个有效算法来确定一个给定图的极小点覆盖. 下面介绍枚举法.

注意到(推论 5.4.1)$V(G)$的子集 K 是 G 的极小点覆盖$\Leftrightarrow V\backslash K$是 G 的极大独立集$\Leftrightarrow$对每个 $x\in V(G)$,要么选择 $x\in K$,要么选择 $N_G(x)\subseteq K$ (但两者不能同时成立). 这个事实提供了一个求极小点覆盖的方法:

对每个 $x\in V(G)$,要么选择 x,要么选择 $N_G(x)$.

为了有效地执行这个程序,我们引入下列逻辑运算:

设 x,y,z 是三条指令,定义:

$x+y$ 为"要么执行 x,要么执行 y";

xy 为"同时执行 x 和 y".

容易验证(习题 5.6.1)这两个逻辑运算满足下列运算定律:

1° **交换律**

$x+y=y+x$,

$xy=yx$.

2° **结合律**

$(x+y)+z=x+(y+z)$,

$(xy)z=x(yz)$.

3° **分配律**

$x(y+z)=xy+xz$,

$(y+z)x=yx+zx$.

4° **吸收律**

$x+x=x$,

$xx=x$,

$x+xy=x$.

根据这些运算定律,可以大大简化逻辑表达式. 例如:

$$\begin{aligned}(xy+yz)(x+yu)&=xyx+xyyu+yzx+yzyu\\&=(xy+xyu+xyz)+yzu\\&=xy+yzu.\end{aligned}$$

根据我们定义的逻辑运算和上述求极小点覆盖程序,顶点集为$\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$的简单无向图 G 的所有极小点覆盖可表示为

$$C(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} (x_i + \prod_{y \in N(x_i)} y). \tag{5.14}$$

例 5.6.1 考察图 5.20 所示的图 G. 由公式(5.14)有

$$\begin{aligned} &C(a,b,c,d,e,f,g) \\ &= (a+bd)(b+aceg)(c+bdef)(d+aceg) \\ &\quad (e+bcdf)(f+ceg)(g+bdf) \\ &= aceg+bcdeg+bdef+bcdf. \end{aligned}$$

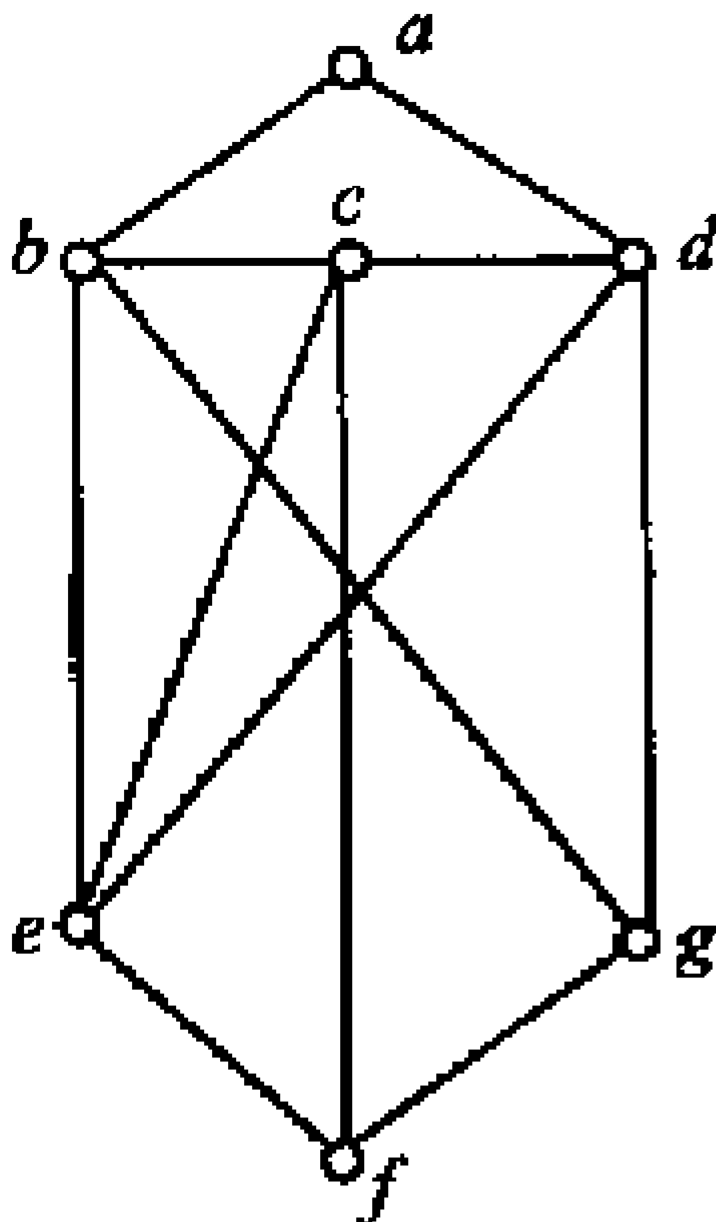


图 5.20

即

$\{a,c,e,g\}$, $\{b,c,d,e,g\}$, $\{b,d,e,f\}$, $\{b,c,d,f\}$

是 G 的所有极小点覆盖. 经比较得 G 的所有最小点覆盖为

$\{a,c,e,g\}$, $\{b,d,e,f\}$, $\{b,c,d,f\}$. □

从公式(5.14)可以看出,此式中仅"乘法"运算次数就超过了 2^ν. 因此,对高阶图来说,该算法是无效的.

由推论 5.4.1 知 S 是 G 的极大独立集$\Leftrightarrow V\backslash S$ 是 G 的极小点覆盖. 于是上述枚举法实际上也提供了一个求 G 的极大独立集算法. 由于每个最大独立集都是极大独立集,因而该算法也是求最大独立集算法.

例 5.6.2 如图 5.20 所示的图, 我们已利用枚举法求出它的所有极小点覆盖. 于是它们的补集

$\{b,d,f\}$, $\{a,f\}$, $\{a,c,g\}$, $\{a,e,g\}$

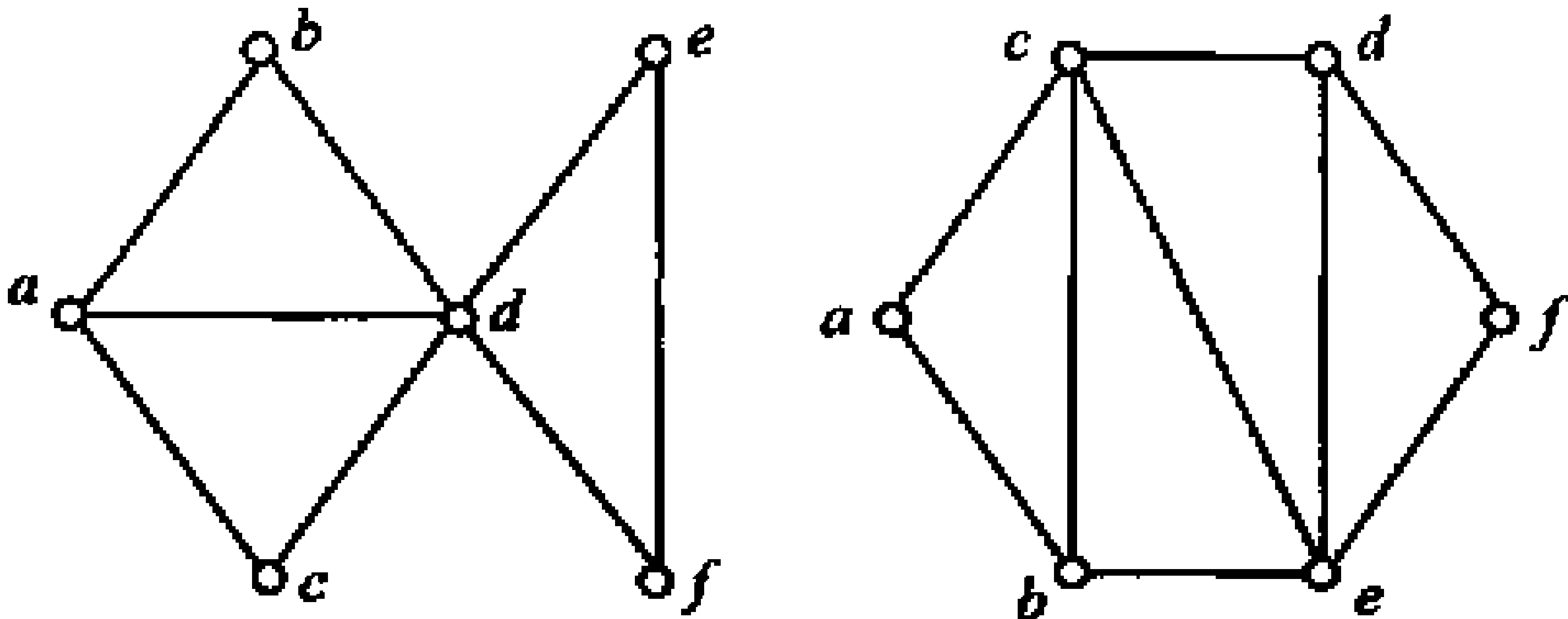
即为 G 的所有极大独立集. 最大独立集有 3 个,即为

$\{b,d,f\}$, $\{a,c,g\}$, $\{a,e,g\}$. □

习 题

5.6.1 验证逻辑和与逻辑积的交换律、结合律、分配律和吸收律.

5.6.2 利用枚举法求出下列两个图中的所有极小点覆盖和极大独立集,并写出最小点覆盖和最大独立集.



(习题 5.6.2)

小结与参考文献

本章主要介绍了匹配理论中的 Hall 定理、Tutte 定理和 König 定理 3 个基本的等价定理. 这 3 个定理与 Menger 定理或最大流最小截定理等价. 正如我们在本章开头所说的，这些等价定理从各个不同的角度揭示了图论的数学本质，又密切了图论、运筹学、线性规划、组合数学及矩阵论等学科领域之间的联系.

本章还介绍了求 2 部分图中最大匹配和最大(小)权完备匹配的匈牙利算法和 Kuhn-Munkres 算法. 对于求一般图中最大匹配和最大权匹配的有效算法已由 Edmonds(1965)和 Edmonds & Johnson (1970)给出. 读者可参阅田丰和马仲蕃(1987)著作的第四章，谢政和李建平(1995)著作的第九章或者 Gibbons (1985)著作的第五章.

关于匹配理论和它的应用，有兴趣的读者可参阅 Lovász & Plummer (1986)的专著《匹配理论》一书.

正如我们在这一章开头所说的，独立集概念是图论中重要概念之一，它与匹配概念相似，但却没有类似于匹配的理论. 甚至我们还没有发现求图中最大独立集的有效算法. 现已证明，它和 Hamilton 问题一样，都属于 NPC 问题. 本章提供的求图中最大独立集的枚举法，对高阶图来说是无效的.

作为本章的应用，我们彻底有效地解决了人员安排问题和最优安排问题. 但只能给出货郎担问题、排序问题和收款台设置问题的一个近似解. 货郎担问题和排序问题虽然都归结为 Hamilton 问题，但我们在本章介绍的近似解法与匹配理论也有密切的关系. 关于货郎担问题的研究和进展已有大量的文献，有兴趣的读者可参阅 Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan & Shmoys(1986).

1 Berge C. Two theorems in graph theory. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1957, **43**: 842~844

2 Bondy J A. A remark on two sufficient conditions for Hamilton cycles. *Discrete Math*, 1978, **22**: 191~193

3 Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. *Technical Report*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Melon University, Pittsburgh, PA1976

4 Chvátal V and Erdös P. A note on hamiltonian circuits. *Discrete Math*, 1972, **2**: 111~113

5 Egerváry J. Matrixok kombinatorikus tulajonságairól. *Matés Fiz Lapok*, 1931, **38**: 16~28

6 Edmonds J. Paths, trees and flows. *Canad J Math*, 1965, **17**: 449~467

7 Edmonds J and Johnson E. Matching: A well-solved class of integer linear programs.

(Gordon & Breach, ed) *Combinatorial Structures and Their Applications*. New York: 1970. 89~92

8 Forbenius G. Über zerlegbare Dertminaten, Sitzugsber, König. *Preuss Akad Wiss*, 1917, XVIII: 274~277

9 Gallai T. Über extreme Punkt-und Kantenmengen. *Ann Univ Sci BudapestEötvös Sect Math*, 1959, **2**: 133~138

10 Gibbons A. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

11 Hall P. On representations of subsets. *J London Math Soc*, 1935, **10**: 26~30

12 Halmos P R and Vaughan H E. The marriage problem. *Amer J Math*, 1950, **72**: 214~215

13 König D. Graphs and matrices (Hungarian). *Mat Fiz Lapok*, 1931, **38**: 116~119

14 Kuhn H W. The Hungarian method for assignment problem. *Naval Res Logist Quart*, 1955, **2**: 83~97

15 Lawler E L, Lenstra J K, Rinnooy Kan A H G and Shmoys D B. *The Traveling Salesman Problem*. New York: Wiley-Interscience, 1986

16 Lovász L and Plummer M D. Matching theory. *Annals of Dis Math*, 1986, **29**

17 Mader W. Grad und lokaler Zusammenhang in endlichen Graphen. *Math Ann*, 1973, **205**: 9~11

18 Munkres J. Algorithms for assignment and transportation problems. *J Soc Indust Appl Math*, 1957, **5**: 32~38

19 Petersen J. Die Theorie der regulären Graphs. *Acta Math*, 1891, **15**: 193~220

20 Rado R. Note on the transfinite case of Hall's theorem onrepresentatives. *J London Math Soc*, 1967, **42**: 321~324

21 Sahni S and Gonzalez T. P-complete approximation problem. *JACM*, 1976, **23**: 555~565

22 田丰, 马仲蕃. 图与网络流理论. 北京: 科学出版社, 1987

23 Tutte W T. The factorization of linear graphs. *J London Math Soc*, 1947, **22**: 107~111

24 谢政, 李建平. 网络算法与复杂性理论. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995

第6章 染色理论

在第5章，我们讨论了图的匹配和独立集. 在它们的应用中，有许多实际问题可以归结为求图中的匹配或者独立集. 例如，5.3节的人员安排问题和5.5节的收款台设置问题. 处于其它诸因素上的考虑，人们希望知道：一个给定的图，它的边集至少能划分成多少个边不交的匹配？或者它的顶点集至少能划分成多少个点不交的独立集？这些"最小数目"是多少？

例如，如果用2部分图的2部划分 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 分别表示某所学校的教师和班级，x_i 和 y_j 之间的 p_{ij} 条边表示教师 x_i 每周需要给班级 y_j 上 p_{ij} 节课. 那么同一个课时的教学安排就对应该2部分图中一个匹配，而边不交匹配的最小数目就是最小周节课数.

又例如，如果用简单图的顶点 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 表示某所学校期末需要考试的课程，l_i 和 l_j 之间的边表示 l_i 和 l_j 被同一位学生选修. 那么同一场次考试就对应该图的一个独立集，而点不交独立集的最小数目就是该校期末考试至少需要安排的场次.

这些问题就是染色理论中讨论的问题. 本章讨论的问题均与图中边的方向无关，所以只需讨论无向图的染色问题.

在图论历史上，对图的染色理论研究与著名的"四色猜想"有关. 这个猜想是图论乃至整个数学领域中最为著名的猜想之一，我们将在6.4节介绍它.

本章介绍染色理论中的基本概念和结果以及与四色猜想等价的几个命题. 在应用中，除介绍排课表问题外，还将介绍求图点色数的近似算法.

6.1 点染色

无环图 G 中顶点（简称为点）的 k 染色（vertex k-colouring）π 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对 $V(G)$ 中元素的一种分配，使得相邻两顶点所染颜色不同. 换句话说，G 中点的 k 染色 π 是映射

$$\pi: V(G)\to\{1,2,\cdots,k\},$$

使得对每个 $i(i=1,2,\cdots,k)$，$\pi^{-1}(i)$ 是独立集或者空集. 若令

$$V_i=\pi^{-1}(i)=\{x\in V(G): \pi(x)=i\},\ i=1,2,\cdots,k,$$

则记

$$\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_k).$$

图 6.1 给出了 C_5 和 Petersen 图中点的 3 染色，其中顶点旁的数字表示该顶点所染的颜色.

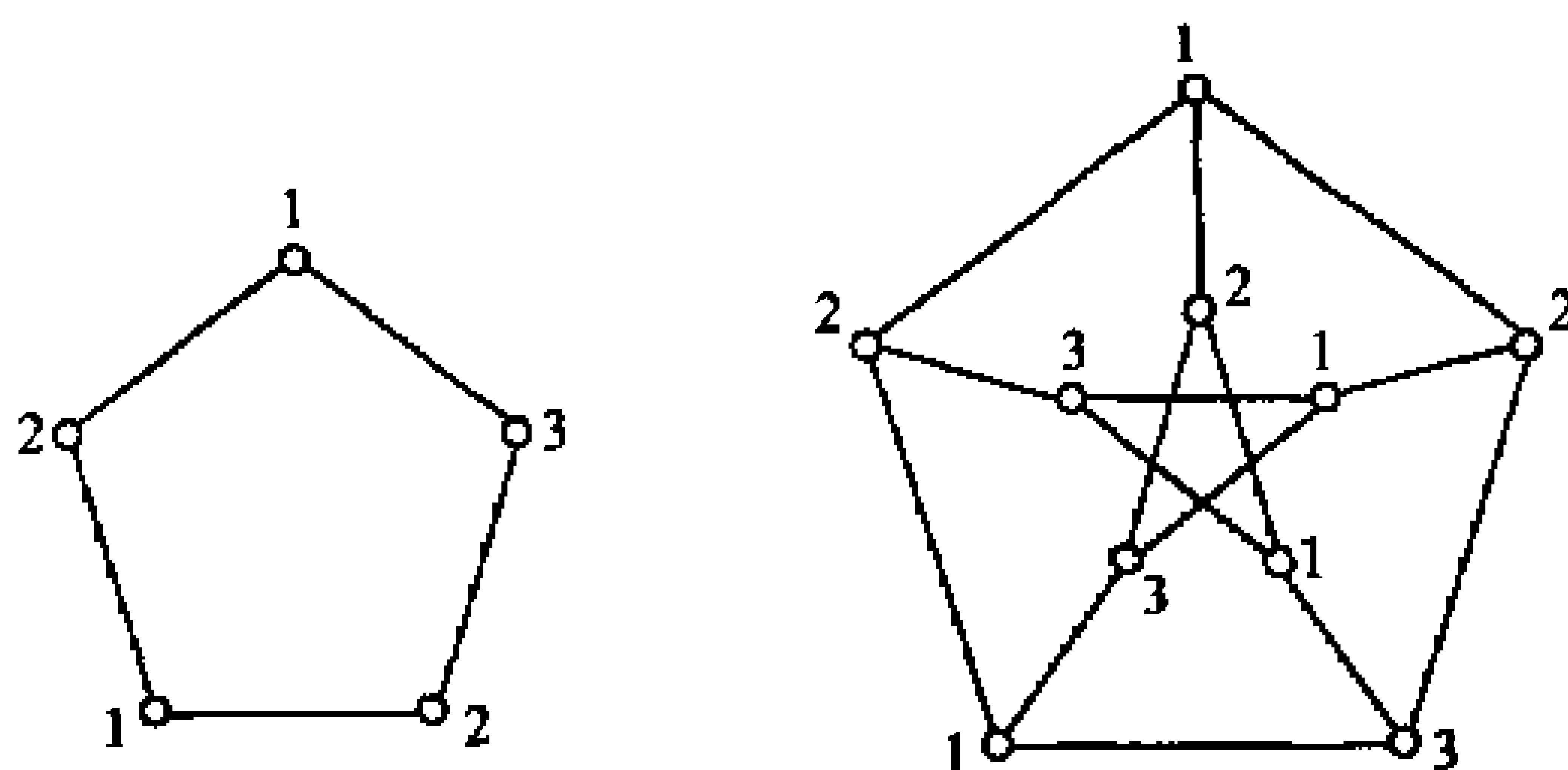


图 6.1

若 G 中点存在一种 k 染色，则称 G 中点 k **色可染**(**vertex k-colourable**). 显然，每个图中点 ν 色可染，而且若 G 中点 k 色可染，则对每个 $l(\geq k)$，G 中点 l 色可染.

由图 6.1 给出的染色知，C_5 和 Petersen 图中点 3 色可染.

$$\chi(G)=\min\{k:\ G \text{ 中点 } k \text{ 色可染}\}$$

称为 G 的**点色数**，简称为**色数**(**chromatic number**).

由定义，若 $\chi(G)=k$，则 G 中点的任何 k 染色 $\pi=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$ 中每个 V_i 都是非空的独立集. 换言之，G 的色数 $\chi(G)$ 是 G 中点不交独立集的最小数目.

容易证明(习题 6.1.1)：$\chi(G)=1\Leftrightarrow G\cong K_\nu^c$；$\chi(G)=2\Leftrightarrow G$ 是非空 2 部分图；$\chi(G)=\nu\Leftrightarrow G\supseteq K_\nu$.

若 $\chi(G)=k$，则称 G 为 k **色图**(**k-chromatic graph**). 例如，K_ν^c 是 1 色图；非空 2 部分图是 2 色图；奇圈 $C_{2n+1}(n\geq 1)$ 是 3 色图，K_ν 是 ν 色图.

点染色理论中的一个基本问题是：给定图 G，确定 $\chi(G)$ 的值. 由于点染色只与顶点之间是否相邻有关，所以，点染色问题只需讨论简单图就够了.

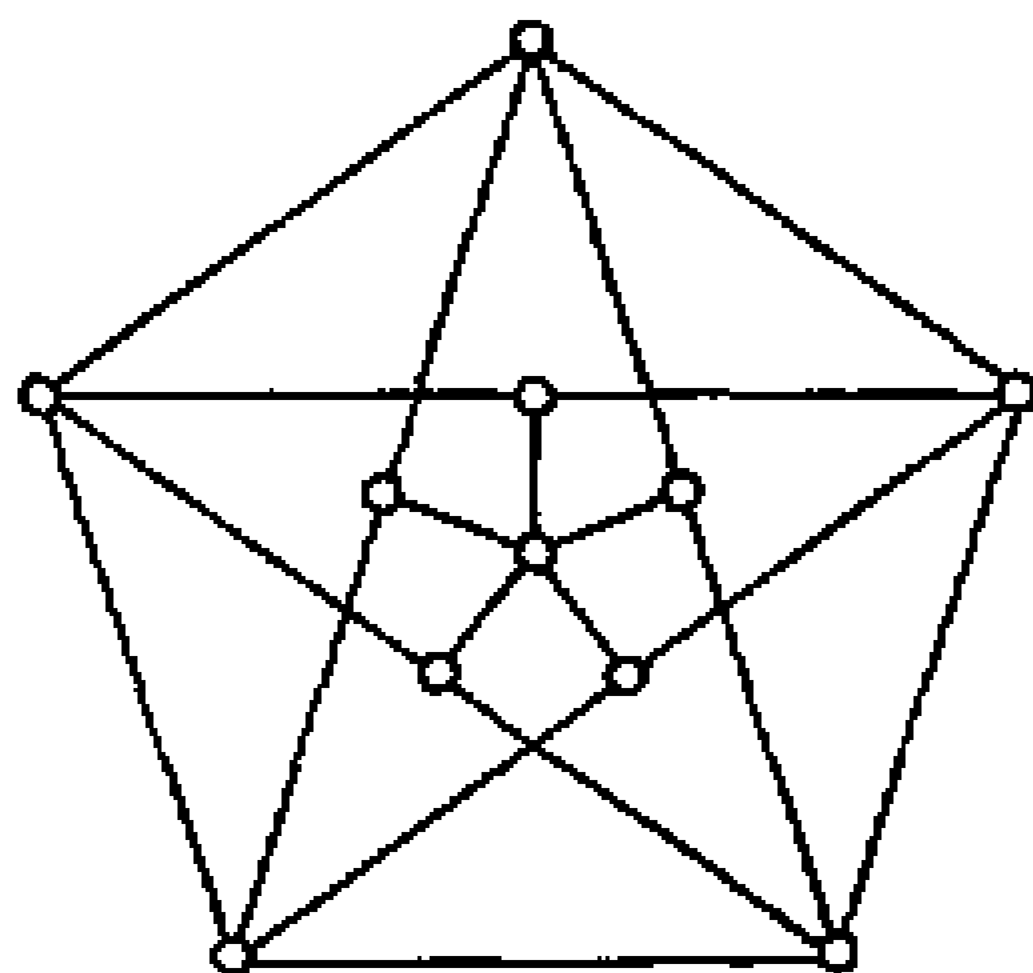


图 6.2 Grótzsch 图

设 $\chi(G)=k\geq 1$. 若对任何 $H\subset G$，均有 $\chi(H)<k$，则称 G 为**临界 k 色图**(**critical k-chromatic graph**).

易证(习题 6.1.2)：G 是临界 1 色图 $\Leftrightarrow G\cong K_1$；$G$ 是临界 2 色图 $\Leftrightarrow G\cong K_2$；$G$ 是临界 3 色图 $\Leftrightarrow G$ 是奇圈. 图 6.2 所示的 Grótzsch 图是临界 4 色图. 容易证明任何 k 色图都包含一个临界 k 色

子图.

临界 k 色图的概念是由 Dirac (1952)首先提出来的,它在研究染色问题中起了重要作用. 下述定理揭示了色数与连通度之间的关系,我们将从 König 定理(5.3)导出它.

定理 6.1(Dirac,1952) **设 G 是临界 $k(\geq 2)$ 色图,则**

$$\lambda(G)\geq k-1.$$

证明 若 $k=2$,则 $G\cong K_2$. 于是 $\lambda(G)=1$. 下设 $k\geq 3$,并且设 $\lambda(G)<k-1$. 于是存在 $S\subset V(G)$ 使 $|(S,\bar{S})|=\lambda(G)<k-1$. 因为 G 是临界 k 色图,所以 $G_1=G[S]$ 和 $G_2=G[\bar{S}]$ 中点都$(k-1)$色可染.

$$\text{设 } \pi_1=(U_1,U_2,\cdots,U_{k-1}) \quad \text{和} \quad \pi_2=(W_1,W_2,\cdots,W_{k-1})$$

分别是 G_1 和 G_2 中点的$(k-1)$染色. 构作简单 2 部分图 $H=(X\cup Y,E)$,其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}\}$,$x_iy_j\in E(H)\Leftrightarrow E_G(U_i,W_j)=\varnothing$. 由于 $|E_G(S,\bar{S})|=\lambda(G)<k-1$,所以

$$\varepsilon(H)>(k-1)^2-(k-1)=(k-1)(k-2).$$

由 König 定理的推论 5.3 知,H 中存在完备匹配,设为 M. 令

$$M=\{x_iy_{j_i}:\ i=1,2,\cdots,k-1\},$$

$$V_i=U_i\cup W_{j_i},\quad i=1,2,\cdots,k-1.$$

则 $V_i(i=1,2,\cdots,k-1)$都是 G 的独立集. 所以 $\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_{k-1})$是 G 中点的$(k-1)$染色,矛盾于 $\chi(G)=k$. 故有 $\lambda(G)\geq k-1$. □

推论 6.1.1 **设 G 是临界 k 色图,则** $\delta(G)\geq k-1$.

证明 由 Whitney 不等式(推论 4.4)和定理 6.1,立即有

$$\delta(G)\geq\lambda(G)\geq k-1.$$ □

推论 6.1.2 **对任何简单图 G,均有** $\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.

证明 设 $\chi(G)=k$ 且 H 是 G 的临界 k 色子图. 由推论6.1.1有 $\delta(H)\geq k-1$,因此

$$\Delta(G)\geq\Delta(H)\geq\delta(H)\geq k-1=\chi(G)-1.$$ □

Brooks(1941)指出,满足 $\chi(G)=\Delta+1$ 的简单图 G 只有两类:一类是奇圈,另一类是完全图. 这就是著名的 Brooks 定理. 下面的证明是 Lovász(1975)给出的.

定理 6.2(Brooks 定理,Brooks,1941) **设 G 是连通简单图,并且 G 既不是奇圈又不是完全图,则** $\chi(G)\leq\Delta(G)$.

证明 设 $\chi(G)=k$,并设 H 是 G 的临界 k 色子图. 若 H 是完全图,则 $\Delta(H)=\Delta(K_k)=k-1$,并且 $\Delta(H)\leq\Delta(G)-1$. 所以

$$\chi(G)=k=\Delta(H)+1\leqslant\Delta(G).$$

若 H 是奇圈,则由于 G 不是奇圈,所以 $\Delta(G)\geqslant3$,于是

$$\chi(G)=\chi(H)=3\leqslant\Delta(G).$$

下面假设 H 既不是完全图,又不是奇圈. 在这种情形下,我们将给出 H 中点的一个 $\Delta(H)$染色来完成证明.

为了弄清以下证明中的染色方法,我们首先以图 6.2 中的 Grótzsch 图为例. 设 H 是 Grótzsch 图,H 既不是完全图又不是奇圈. 任取 $z\in V(H)$,对每 $x\in V(H)$,计算 z 到 x 的距离 $d_H(z,x)$,具体数值标在图 6.3(a)中. 将 $V(H)$中点用 $x_1,x_2,\cdots,x_{11}$标号使得 $x_1,x_2\in N_H(z)$,$x_1x_2\notin E(H)$(这样的两顶点是存在的,因为 $d_H(z)\geqslant3$ 并且 H 中不含三角形),而且对每个 $i=3,4,\cdots,11$ 满足 $d_H(z,x_i)\geqslant d_H(x_{i+1},z)$. 于是 $z=x_{11}$. 这样得到 H 的顶点标号如图 6.3(a)所示. 注意到(参见图 6.3(c))这种标号具有这样一个性质:对每个 $i=1,2,\cdots,10$,存在 $j>i$ 使 $x_ix_j\in E(H)$. 用 $5(=\Delta(H))$种颜色 1,2,3,4,5 对 $V(H)$进行染色. 首先将 x_1 和 x_2 染上 1,然后按颜色 1,2,3,4,5 的顺序依次给 $x_3,x_4,\cdots,x_{11}$ 进行染色使相邻两顶点所染的颜色不同. 例如,假设 $x_1,x_2\cdots,x_7$ 已染好,考虑 x_8. 由于 $x_5,x_6,x_7\in N_H(x_8)$,并已分别染上颜色 2,2 和 3. 所以将 x_8 染上 1. 这样得到 H 中点的一个 5(实际上只需 4 种颜色)染色,如图 6.3(b)所示,顶点旁的数值代表颜色.

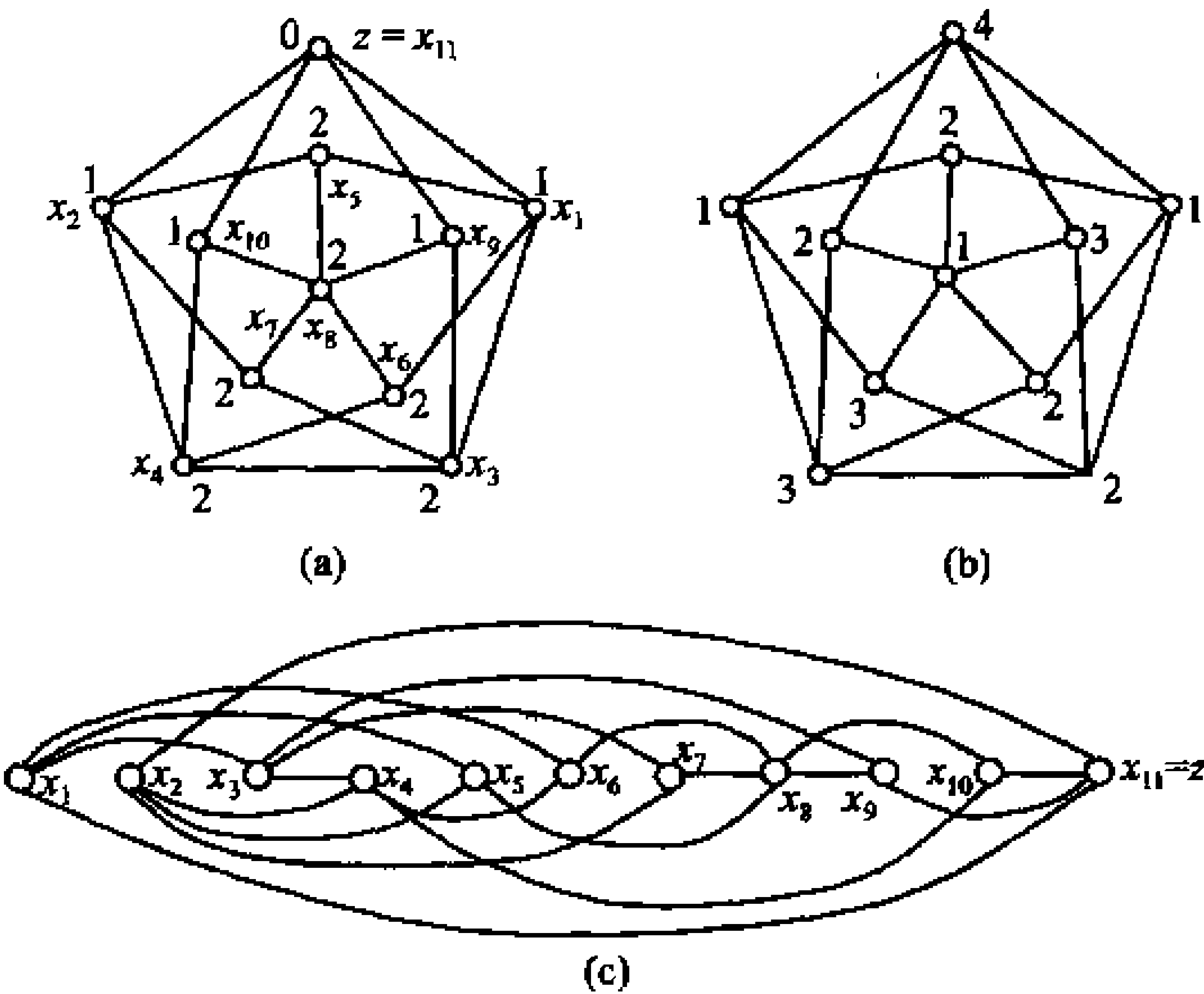


图 6.3

下面继续证明定理6.2. 由于H既不是完全图又不是奇圈，则(习题6.1.2) $k\geqslant 4$. 令H的阶是p. 由于$\chi(H)=k\geqslant 4$且$H\not\cong K_p$，所以$p\geqslant 5$. 由推论6.1.1知$\delta(H)\geqslant 3$. (由例1.5.6)H中存在$x,y,z\in V(H)$使$xy\notin E(G)$而$xz,yz\in E(G)$. 给$V(H)$中元素用$x_1,x_2,\cdots,x_p$进行标号使$x_1=x,x_2=y$，且对每个$i=3,4\cdots,p$, $d_H(x_i,z)\geqslant d_H(x_{i+1},z)$. 因此$x_p=z$并且对每个$i=1,2,\cdots,p-1$，存在$j>i$使$x_ix_j\in E(H)$. 由$d_H(z)\geqslant 3$，所以$x_{p-1}x_p\in E(H)$(见图6.3(c)). 因此，对每个$i=1,2,\cdots,p-1$，$x_i$与$\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$中最多$\Delta(H)-1$个顶点相邻. 用$\Delta(H)$种颜色对$V(H)$进行染色，将$x_1$和$x_2$染上1，然后按颜色号$1,2,\cdots,\Delta(H)$的顺序依次给$x_3,x_4,\cdots,x_p$进行染色，使相邻两顶点所染的颜色不同. 设$x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}$已染好. 考虑$x_i(3\leqslant i\leqslant p-1)$. 由于$x_i$与$\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$中最多只有$\Delta(H)-1$个顶点相邻，所以$1,2,\cdots,\Delta(H)$中至少有一种颜色$\alpha$在$N_H(x_i)\cap\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$中未用过，故将$x_i$染以颜色$\alpha$. 由于$x_p=z$与$x_1$和$x_2$相邻，而且$x_1$和$x_2$染的颜色相同. 所以同样地也存在一种颜色$\beta$在$N_H(x_p)$中未用过. 故将$x_p$染以颜色$\beta$. 这样得到$H$中点的一个$\Delta(H)$染色，即有$\chi(G)=\chi(H)\leqslant\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$. □

例6.1.1 考察Petersen图G. 由于G含奇圈，所以G不是2部分图，因而$\chi(G)\geqslant 3$. 另一方面，由于G既不是奇圈，也不是完全图，所以由定理6.2知，$\chi(G)\leqslant\Delta(G)=3$. 因此，Petersen图是3色图. □

定理6.3(五色定理，Heawood，1890) **对于每个平面图G，均有$\chi(G)\leqslant 5$.**

证明 用反证法. 不妨设G是临界6色图. 由推论3.4.2和推论6.1.1知，$\delta(G)=5$. 设$u\in V(G)$使$d_G(u)=5$，$N_G(u)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，并设$\pi=(V_1,V_2,V_3,V_4,V_5)$是$G-u$中点的5染色. 由于$\chi(G)=6$，所以不妨设$u_i\in V_i(i=1,\cdots,5)$. 令$G_{ij}=G[V_i\cup V_j]$. 若存在$i,j$使$u_i$和$u_j$在$G_{ij}$中不连通，则将$G_{ij}$中含$u_i$的分支中颜色$i$与颜色$j$对换得$G-u$中点的另一个5染色$\pi'=(V_1',V_2',V_3',V_4',V_5')$，其中对任何$x\in N_G(u)$，均有$\pi'(x)\neq i$. 不妨设$i=1$. 于是$\bar{\pi}=(V_1'\cup\{u\},V_2',V_3',V_4',V_5')$是$G$中点的5染色，矛盾于$\chi(G)=6$. 所以对任何$i,j(1\leqslant i\neq j\leqslant 5)$，$G_{ij}$中存在$(u_i,u_j)$路$P_{ij}$(见图6.4所示). 考虑圈$C=uu_2+P_{24}+u_4u$，则路$P_{13}$必经过$P_{24}$中点. 但它不可能，因为$P_{13}$中点已被染上颜色1和3，而且$P_{24}$中任何点都没有这两个颜色. 这个矛盾证明了$\chi(G)\leqslant 5$. □

一个自然的问题是：对每个平面图G是否均有$\chi(G)\leqslant 4$?
这就是著名的**四色问题(Four-Colour Problem)**. 更进一步有

四色猜想1 对任何平面图G均有$\chi(G)\leqslant 4$.

注意到$\chi(K_4)=4$. 若四色猜想成立，则其上界是最好的. 四色猜想曾一度

被列为与数论中的 Fermat 猜想，函数论中的 Riemann 假设相提并论的三大数学难题之一. 理所当然地受到世界上一些最有才华的数学家的冲击. 历史上曾有许多人宣布证明了它，但都被后人一一否定. 1976 年，K. Appel 和 W. Hanken 与 J. Koch 合作，宣布了一个借助于电子计算机所做的证明. 我们将在 6.4 节介绍他们的证明思想.

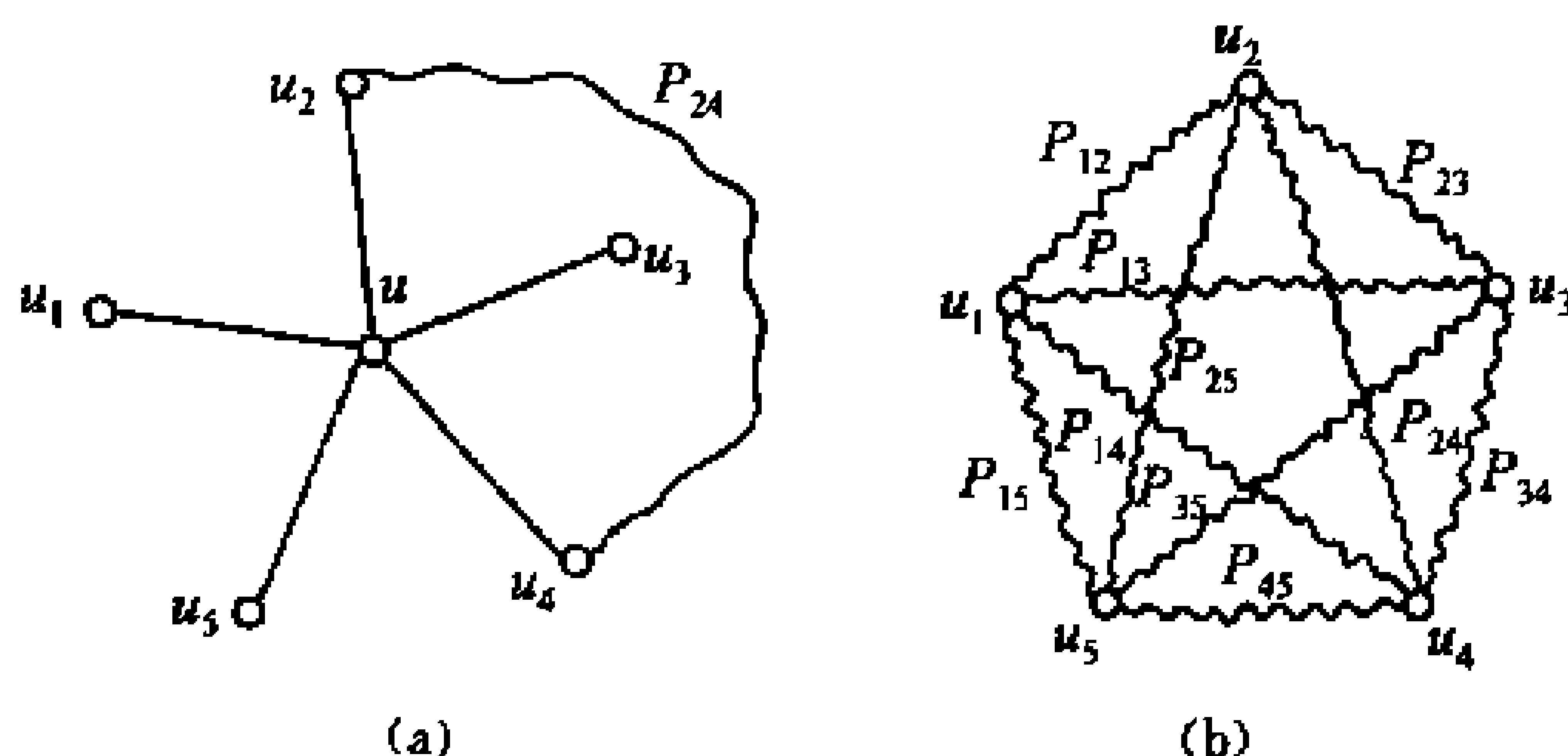


图 6.4

作为色数 $\chi(G)$ 的应用，我们举两个例子.

例 6.1.2(B. Roy, 1967, T. Gallai, 1968) 设 D 是有向图，$\chi=\chi(D)$. 则 D 中存在长度 $\geqslant\chi-1$ 的有向路.

证明 设 $E'\subset E(D)$ 使 $D'=D-E'$ 不含有向圈的极小边集(即对任何 $a\in E'$, $D'+a$ 含有向圈)，并设 D' 中有向路的最大长度为 k. 只需证明 $k\geqslant\chi-1$. 对 $i=1,2,\cdots,k+1$，令 $V_i=\{x\in V(D)$: D' 中以 x 为起点的有向路最大长度为 $(i-1)\}$. 则 $V(D)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_{k+1}$. 于是，只需证明

$$\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$$

是 D 中点的 $(k+1)$ 染色. 显然，$v_1,v_2,\cdots,v_{k+1}$ 是不相交的.

首先注意到，D' 中不存在起点和终点都在 $V_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 中的有向路. 若不然，设 P 是 D' 中 (x,y) 路，$x,y\in V_i$. 则存在一条长为 $(i-1)$ 的且起点为 y 的有向路 Q. 因为 D' 不含有向圈，所以 $P\cup Q$ 为 D' 中起点在 x 且长度 $\geqslant i$ 的有向路，矛盾于 $x\in V_i$.

下证 $V_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 是 D 的独立集. 设 x 和 y 是 V_i 中相邻两顶点，不妨设存在 $a\in E(D)$ 使 $\psi_D(a)=(x,y)$. 由于 D' 中不存在 (x,y) 路，所以 $a\in E'$. 由 E' 的最小性知，$D'+a$ 含有向圈，设为 C. 于是 $C-a$ 是 D' 中一条 (y,x) 路且 $x,y\in V_i$，矛盾于刚才得到的结论. 因而 x 和 y 在 D 中不相邻，即 V_i 是独立集. 因此，$\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$ 是 D 中点的 $(k+1)$ 染色，即有 $\chi\leqslant k+1$. □

例 6.1.3(V. Chvátal & J. Komlós, 1971) 设 D 是简单有向图，$\chi(D)>$

mn，并设$f\in\mathscr{V}(D)$. 则D中或者存在一条有向路$(x_0,x_1,\cdots,x_m)$使得$f(x_0)\leqslant f(x_1)\leqslant\cdots\leqslant f(x_m)$；或者存在一条有向路$(y_0,y_1,\cdots,y_n)$使得$f(y_0)>f(y_1)>\cdots>f(y_n)$.

证明 构造D的支撑子图D_1和D_2. 对于D中一条边(x,y)，$(x,y)\in E(D_1)\Leftrightarrow f(x)\leqslant f(y)$；或$(x,y)\in E(D_2)\Leftrightarrow f(x)>f(y)$. 显然$D=D_1\oplus D_2$.

设$\chi(D_1)\leqslant m$且$\chi(D_2)\leqslant n$，并设

$$\pi_1=(V_1,V_2,\cdots,V_m)\text{和}\pi_2=(V'_1,V'_2,\cdots,V'_n)$$

分别是D_1和D_2中点的m染色和n染色. 令

$$V_{ij}=\{x\in V_i\cap V'_j\},\ 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n.$$

由于V_i和V'_j分别是D_1和D_2的独立集，故V_{ij}是D的独立集. 于是

$$\pi=\{V_{ij}:1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$$

是D中点的mn染色. 这矛盾于$\chi(D)>mn$. 所以，或者$\chi(D_1)>m$，或者$\chi(D_2)>n$.

若$\chi(D_1)>m$，则由例6.1.2知D_1中存在长度$\geqslant\chi(D_1)-1\geqslant m$的有向路$P$. 令$P$中长为$m$的一段为$(x_0,x_1,\cdots,x_m)$. 由$D_1$的定义有$f(x_0)\leqslant f(x_1)\leqslant\cdots\leqslant f(x_m)$.

若$\chi(D_2)>n$，则同理可证D_2中存在长为n的有向路$(y_0,y_1,\cdots,y_n)$. 由D_2的定义有$f(y_0)>f(y_1)>\cdots>f(y_n)$. □

例6.1.4(P. Erdös & G. Szekeres, 1935) 任意$mn+1$个不同整数构成的序列中，或者包含一个有m项的增子序列，或者包含一个有n项的减子序列.

证明 设$\{a_1,a_2,\cdots,a_{mn+1}\}$是$mn+1$个不同整数构成的序列. 作简单有向图$D=(V,E)$，其中$V=(a_1,a_2,\cdots,a_{mn+1})$，$(a_i,a_j)\in E(D)\Leftrightarrow a_i<a_j$. D是$mn+1$阶竞赛图，且$\chi(D)=mn+1$. 令$f\in\mathscr{V}(D)$使得$f(a_i)=a_i(i=1,2,\cdots,mn+1)$. 由例6.1.3知该命题成立. □

习 题

6.1.1 证明：若G无环图，则

(a)$\chi(G)=1\Leftrightarrow G$是空图；

(b)$\chi(G)=2\Leftrightarrow G$是非空2部分图；

(c)$\chi(G)\geqslant 3\Leftrightarrow G$含奇圈.

6.1.2 证明：若G是简单图，则

(a)G临界1色图$\Leftrightarrow G\cong K_1$；

(b)G临界2色图$\Leftrightarrow G\cong K_2$；

(c)G 临界 3 色图$\Leftrightarrow G$ 是奇圈；

(d)Grótzsch 图是临界 4 色图；

(e)G 是临界 k 色图$\Rightarrow \nu(G)\neq k+1$.

6.1.3 设 G 是临界 $k(\geq 3)$ 色图. 证明：

(a)G 中任何顶点分离集 S 的导出子图 $G[S]$ 是非完全图；

(b)G 是 2 连通的.

6.1.4 证明：

(a)任何 k 色图都含临界 k 色子图；

(b)最小阶的 k 色简单图必是临界 k 色图；

(c)对任何图 G, $\chi(G)\leqslant 1+\max\{\delta(H):H\subseteq G\}$；

(d)对任何图 G, $\chi(G)\leqslant 1+l(G)$，其中 $l(G)$ 表示 G 中路的最大长度.

6.1.5 证明：

(a)对任何图 G 均有 $\lceil \nu/\alpha\rceil\leqslant\chi(G)\leqslant\nu+1-\alpha$；

(b)若 G 是简单图，则 $\chi(G)\geqslant\nu^2/(\nu^2-2\varepsilon)$.

6.1.6 证明：若 G 的任意两条奇圈都有公共点，则 $\chi(G)\leqslant 5$.

6.1.7 证明 Brooks 定理(6.2)等价于下述命题：若 G 是临界 $k(\geqslant 4)$ 色图并且是非完全图，则 $2\varepsilon\geqslant\nu(k-1)+1$.

6.1.8 (a)证明广义 Brooks 定理：若 G 是 $\Delta(G)=2$ 并且不含奇圈连通分支或者 $\Delta(G)\geqslant 3$ 并且不含 $K_{\Delta+1}$ 连通分支的图，则 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$.

(b)对任何 $m,k\in N$, $2\leqslant k\leqslant m$，证明：存在图 G 使 $\Delta=m$, $\chi(G)=k$.

6.1.9 证明：G 中点 k 色可染$\Leftrightarrow G$ 有定向图 D 使得 D 中有向路的最大长度$\leqslant k-1$.

6.2 边 染 色

无环非空图 G 中**边的 k 染色(edge k-colouring)**σ 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对 $E(G)$ 中元素的一种分配，使得相邻两条边所染颜色不同. 换句话说，G 中边的 k 染色是映射

$$\sigma: E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$$

使得对每个 $i(i=1,2,\cdots,k)$, $\sigma^{-1}(i)$ 是匹配或者空集. 若令

$$E_i=\sigma^{-1}(i)=\{e\in E(G): \sigma(e)=i\},\ i=1,2,\cdots,k,$$

则记

$$\sigma=(E_1,E_2,\cdots,E_k).$$

图 6.5 给出了 C_5 中边的 3 染色和 Petersen 图中边的 4 染色，边旁的数字表示该边所染的颜色.

若 G 中边存在一种 k 染色， 则称 G 中**边 k 色可染(edge k-colourable)**.

显然，每个无环非空图的边必 ε 色可染，并且若 G 中边 k 色可染，则对每个 l

$(\geqslant k)$，G 中边 l 色可染.

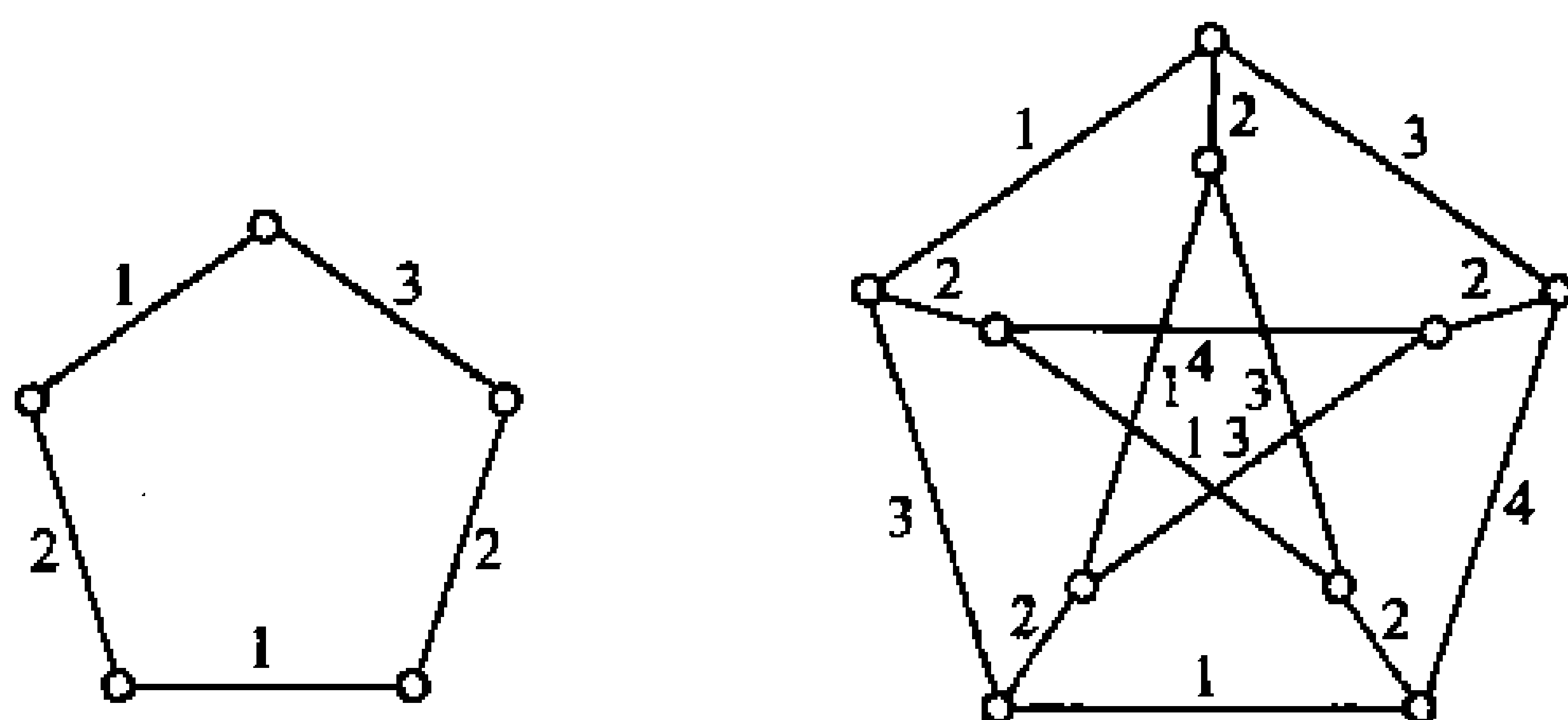


图 6.5

由图 6.5 给出的边染色知，C_5 中边 3 色可染，Petersen 图中边 4 色可染.

$$\chi'(G)=\min\{k : G\text{ 中边 } k \text{ 色可染}\}$$

称为 G 的**边色数(edge chromatic number)**.

由定义，若 $\chi'(G)=k$，则 G 中边的任何 k 染色 $\sigma=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$ 中每个 E_i 都是非空的匹配. 换言之，G 的边色数 $\chi'(G)$ 是 G 中边不交匹配的最小数目. 所以

$$\chi'(G)\geqslant\Delta(G). \tag{6.1}$$

由推论 5.2.2 和推论 5.10.1 知，完全图 K_{2n} 有 $(2n-1)$ 个边不交的完备匹配，2 部分图 H 有 $\Delta(H)$ 个边不交的匹配. 所以

$$\chi'(K_{2n})=2n-1=\Delta(K_{2n});$$

$$\chi'(H)=\Delta(H).$$

容易证明(习题 6.2.3)：G 的点、边色数满足下列关系：

$$\chi'(G)=\chi(L(G)), \tag{6.2}$$

其中 $L(G)$ 是 G 的线图.

关于边色数 $\chi'(G)$ 的下列结果是由 Vizing(1964)和 Gupta(1966)独立发现的，一般文献上都称为 Vizing 定理.

定理 6.4(Vizing 定理) **设 G 是无环非空图，则**

$$\Delta(G)\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+\mu(G), \tag{6.3}$$

其中
$$\mu(G)=\max_{x,y\in V}\{\mu_G(x,y)\}.$$

特别，若 G 是非空简单图，则

$$\Delta(G)\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+1. \tag{6.4}$$

证明 我们只证明(6.4)式((6.3)式的证明参见 Xu(1999)). 由(6.1)式，

只需证明(6.4)式右端不等式. 用反证法.

设存在简单图 G' 使得

$$\chi'(G')>\Delta(G')+1.$$

考虑 G' 的支撑子图 G 使得

$$\chi'(G)=k=\chi'(G'),$$

且存在 $e_0\in E(G)$ 使得

$$\chi'(G-e_0)=k-1.$$

于是

$$k=\chi'(G')>\Delta(G')+1\geqslant\Delta(G)+1. \qquad (6.5)$$

设 $e_0=xy_0$，并设 $\sigma=(E_1,E_2,\cdots,E_{k-1})$ 是 $G-e_0$ 中边的 $(k-1)$ 染色. 对任何 $u\in V(G)$，用 $C_\sigma(u)$ 表示在染色 σ 下，u 处出现的颜色集，并令 $C'_\sigma(u)=\{1,2,\cdots,(k-1)\}\setminus C_\sigma(u)$，即在 u 处不出现的颜色集. 由于

$$d_{G-e_0}(u)\leqslant\Delta(G)<k-1,$$

所以 $$C'_\sigma(u)\neq\varnothing,\quad \forall u\in V(G).$$

取 $\beta_1\in C'_\sigma(y_0)$. 若 $\beta_1\notin C_\sigma(x)$，则将 e_0 染成 β_1 便得到 G 中边的一个 $(k-1)$ 染色. 这矛盾于 $\chi'(G)=k$. 于是，$\beta_1\in C_\sigma(x)$，并且存在边 $e_1\in E_G(x)$ 使得 $\sigma(e_1)=\beta_1$. 令 $e_1=xy_1$，并令

$$F_x(1,\sigma)=\{e_0,e_1\}.$$

由于 $d_G(y_1)\leqslant\Delta(G)<k-1$，所以存在 $\beta_2\in C'_\sigma(y_1)$. 若 $\beta_2\notin C_\sigma(x)$，则将 e_0 染成 β_1，e_1 染成 β_2 便得到 G 中边的一个 $(k-1)$ 染色. 这矛盾于 $\chi'(G)=k$. 于是，$\beta_2\in C_\sigma(x)$，并且存在边 $e_2\in E_G(x)$ 使得 $\sigma(e_2)=\beta_2$. 令 $e_2=xy_2$，并令

$$F_x(2,\sigma)=\{e_0,e_1,e_2\}.$$

一般地，令 $$F_x(n,\sigma)=\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}\subseteq E_G(x),$$

其中 $n\geqslant1$，并且

$$e_i=xy_i,\ i=0,1,2\cdots,n,$$
$$\sigma(e_i)\notin C_\sigma(y_{i-1}),\ i=1,2,\cdots,n,$$
$$y_i\neq y_j,0\leqslant i\neq j\leqslant n.$$

(参见图 6.6，其中 $\beta_i=\sigma(e_i)\in C_\sigma(y_i),\beta_i\notin C_\sigma(y_{i-1})$).

重新染色 $F_x(n,\sigma)$ 是指这样一个过程：将边 e_{i-1} 上的颜色抹去，改染颜色 $\sigma(e_i)$，$i=1,2,\cdots,n$(参见图 6.6). 重新染色 $F_x(n,\sigma)$ 得到 $G-e_n$ 中边的一个 $(k-1)$ 染色.

于是，对于任何使得 $\chi'(G-e_0)=k-1$ 的 $e_0\in E(G)$ 和 $G-e_0$ 中边的任何 $(k$

-1)染色 σ,$F_x(n,\sigma)$满足下面2条性质:

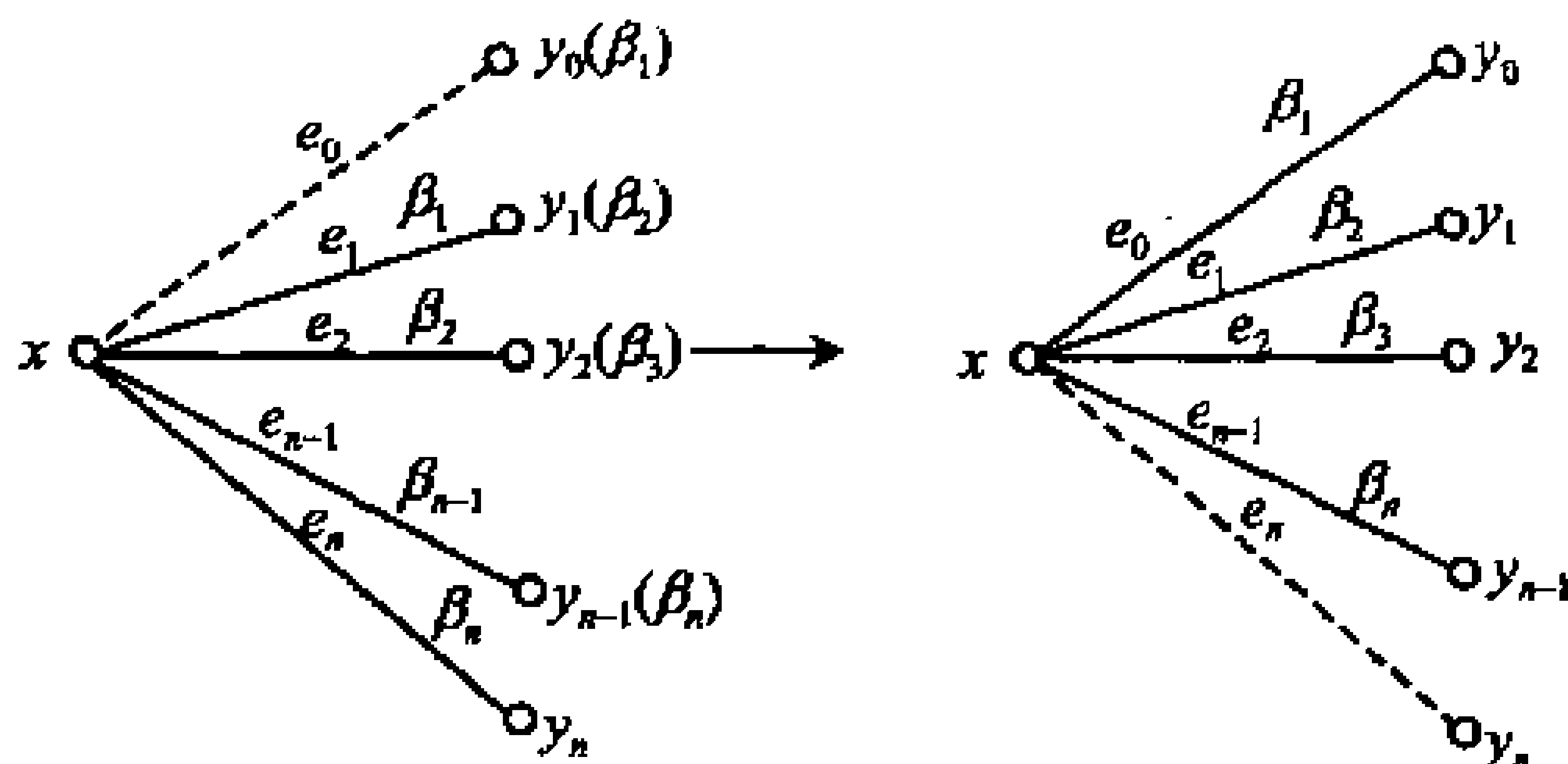


图 6.6

(i)$C'_\sigma(x)\cap C'_\sigma(y_i)=\varnothing$, $i=0,1,2,\cdots,n$.

若不然,存在 i_0,$0\leqslant i_0\leqslant n$ 使得 $C'_\sigma(x)\cap C'_\sigma(y_{i_0})\neq\varnothing$. 取 $\alpha\in C'_\sigma(x)\cap C'_\sigma(y_{i_0})$,重新染色 $F_x(i_0,\sigma)$,并且将边 e_{i_0} 染上颜色 α. 这样得到 G 中边的一个($k-1$)染色,矛盾于 $\chi'(G)=k$.

(ii)$C'_\sigma(y_i)\cap C'_\sigma(y_j)=\varnothing$, $0\leqslant i<j\leqslant n$.

若不然,存在 i 和 j,$i<j$ 使得 $C'_\sigma(y_i)\cap C'_\sigma(y_j)\neq\varnothing$. 取 $\beta\in C'_\sigma(y_i)\cap C'_\sigma(y_j)$使得 i 和($j-i$)尽可能地小. 于是,对任何 $l(0\leqslant l\neq i\leqslant j-1)$,$\beta\in C_\sigma(y_l)$. 设 $\alpha\in C'_\sigma(x)$. 由(i)知 $\alpha\neq\beta$,$\beta\in C_\sigma(x)$,$\alpha\in C_\sigma(y_k)$, $0\leqslant k\leqslant n$.

令 $H=G[E_\alpha\cup E_\beta]$,则 $d_H(x)=d_H(y_j)=d_H(y_i)=1$. 令 H'是 H 中含 x 的连通分支,则由引理5.8知 H'是一条起点在 x 的(E_β,E_α)交错路. 因此,y_i 和 y_j 至少有一个不在 H'中. 不妨设 y_i 不在 H'中. 对换 H 中含 y_i 的连通分支 H''中边上的颜色 α 和 β,便得到 $G-e_0$ 中边的另一个($k-1$)染色 σ'.

重新染色 $F_x(i,\sigma')$,并将 e_i 染成 α,便得到 G 中边的一个($k-1$)染色,矛盾于 $\chi'(G)=k$.

选取 $e_0\in E(G)$和 $G-e_0$ 中边的($k-1$)染色 σ 以及 $F_x(n,\sigma)$使得 n 尽可能地大.

考虑 y_n. 由于 $d_G(y_n)\leqslant\Delta(G)<k-1$, 所以存在 $\alpha\in C'_\sigma(y_n)$. 由(i)和 n 的最大性,$\alpha\in C_\sigma(x)$并且存在边 $e_i\in F_x(n,\sigma)$使得 $\sigma(e_i)=\alpha$ ($1\leqslant i\leqslant n-1$). 由 $F_x(n,\sigma)$的选取知 $\alpha\in C'_\sigma(y_{i-1})$. 于是, $\alpha\in C'_\sigma(y_{i-1})\cap C'_\sigma(y_n)$. 这矛盾于(ii). 所以(6.4)式得证. □

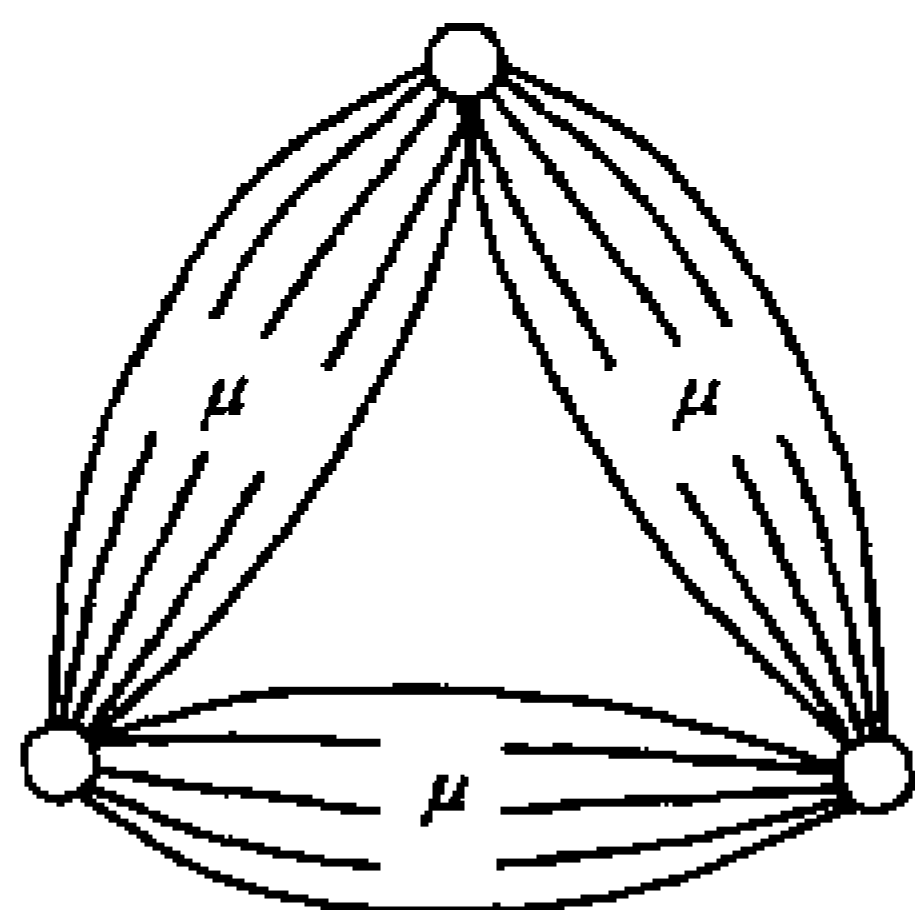


图 6.7

(6.3)式给出的上界可以达到. 例如图6.7所示的图 G,$\Delta(G)=2\mu$ 且 $\chi'(G)=\epsilon=3\mu$.

(6.4)式提出了一个所谓分类问题. 使 $\chi'(G)=$

$\Delta(G)$的简单图 G 称为**第一类图**；使 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 的简单图 G 称为**第二类图**.

2 部分图和 K_{2n}都是第一类图，而 C_{2n+1}和 K_{2n+1}都是第二类图.

一般说来，什么样的简单图属于第一类图，什么样的简单图属于第二类图的问题目前尚未解决. 第二类图好像是相当地少. 例如：在 $\nu\leqslant 6$ 的 143 个连通简单图中仅有 8 个图属于第二类图(如图 6.8 所示).

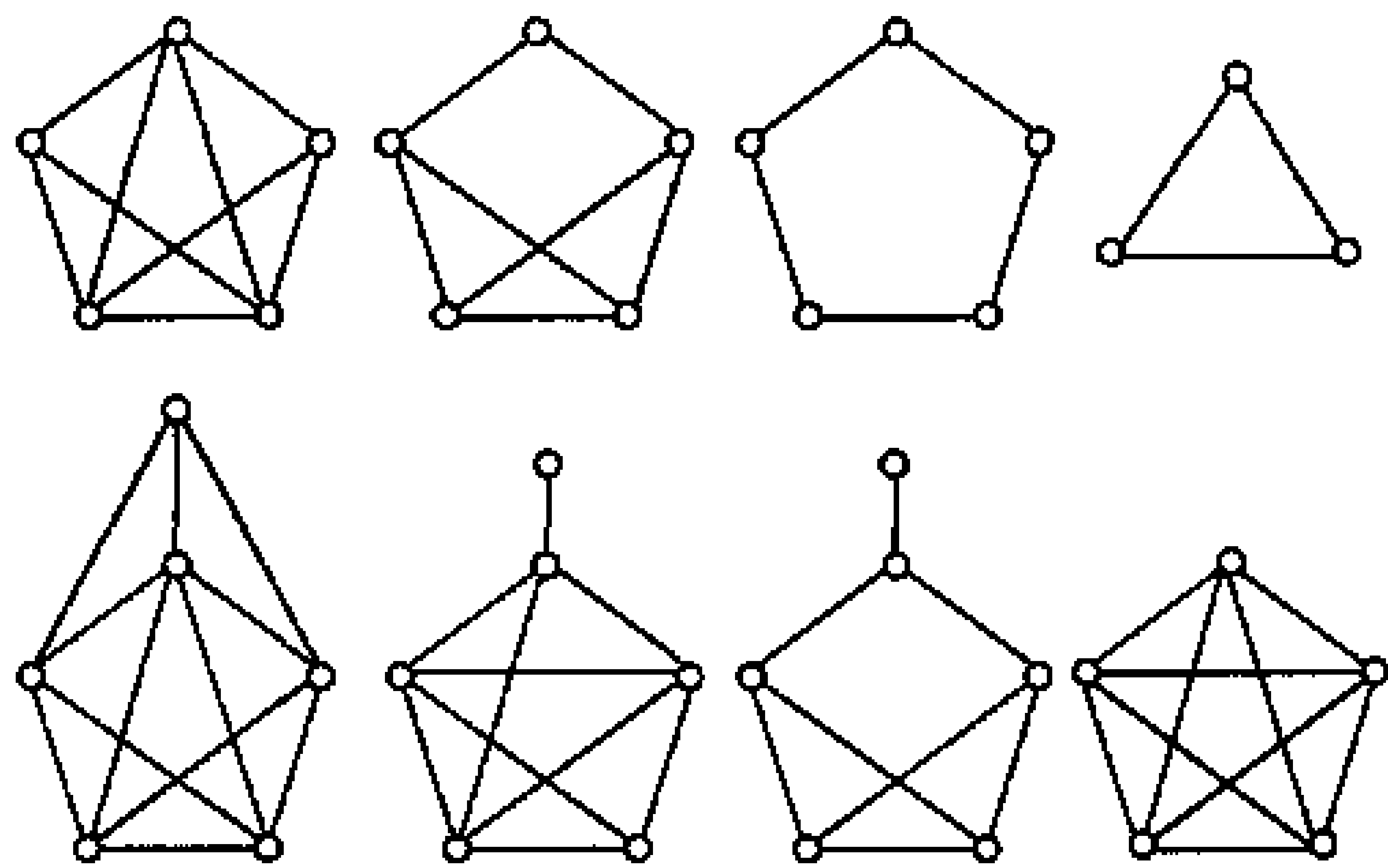


图 6.8

Erds 和 Wilson(1977)已证明几乎所有非空简单图都是第一类图，即

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|C^1(\nu)|}{|C^1(\nu)\cup C^2(\nu)|}=1,$$

其中 $C^i(\nu)$表示 ν 阶第 i 类图的集合.

对于任何 $\Delta\geqslant 2$，存在最大度为 Δ 的第一类平面图. 例如，星 $K_{1,n}$, $\chi'(K_{1,n})=\Delta=\Delta(K_{1,n})$. 当 $\Delta=2,3,4,5$ 时，存在最大度为 Δ 的第二类平面图. 例如，$\chi'(K_3)=3=\Delta(K_3)+1$. 另外三种图如图 6.9 所示. 张利民(2000)证明了：不存在最大度为 7 的第二类平面图. 目前还不知道是否存在最大度为 6 的第二类平面图，但Vizing(1965)已证明：不存在最大度$\geqslant 8$ 的第二类平面图.

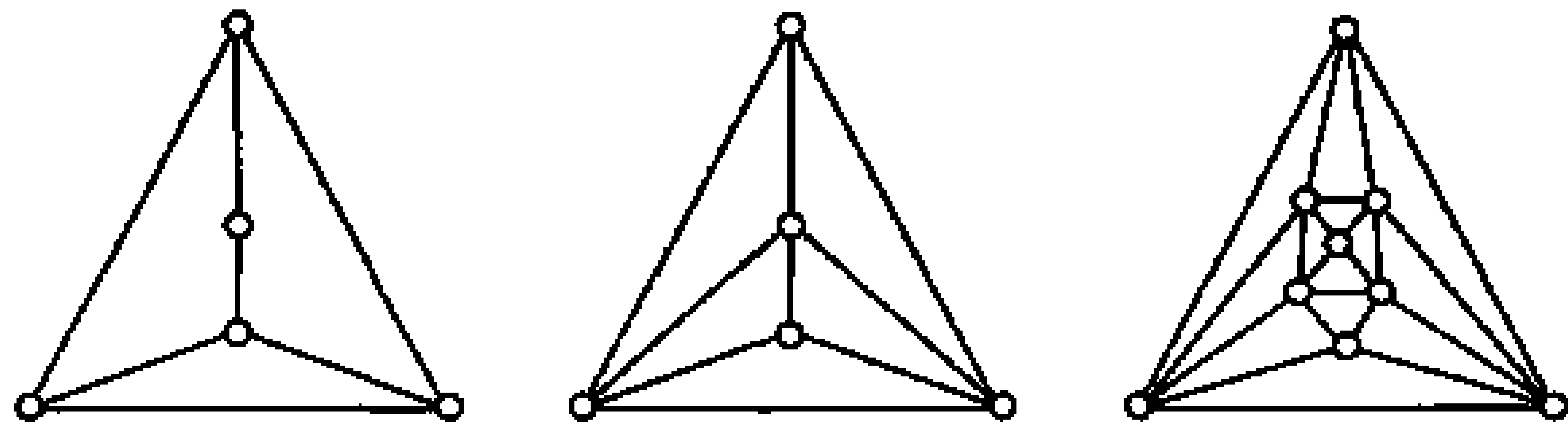


图 6.9 第二类平面图

习　题

6.2.1　证明：

(a)2 部分简单图和 K_{2n} 是第一类图；

(b)C_{2n+1} 和 K_{2n+1} 是第二类图；

(c)Petersen 图是第二类图；

(d)3 正则 Hamilton 图是第一类图.

6.2.2　证明：

(a)若 G 是简单图且 $\varepsilon>\Delta\,\alpha'(G)$，则 G 是第二类图；

(b)若 G 是简单图 $\varepsilon>\Delta\left\lfloor\frac{\nu}{2}\right\rfloor$，则 G 是第二类图；

(L. W. Beineke & R. J. Wilson, 1973)

(c)图 6.8 和 6.9 所示的图是第二类图；

(d)奇阶非空正则简单图是第二类图；

(e)含割点的正则简单图是第二类图.

(V. G. Vizing, 1965)

6.2.3　证明：$\chi'(G)=\chi(L(G))$，其中 G 是非空的.

6.2.4　证明：设 $K_n(k)$ 是完全 k 部分图. 则当 nk 为偶数时，它是第一类图；当 nk 为奇数时，它是第二类图.　(R. Laskar & W. Hare, 1971)

6.2.5　证明：若 G 是无环图，则 $\chi'(G)\leqslant\frac{3}{2}\Delta(G)$.　(C. E. Shannon, 1949)

6.2.6　利用 Brooks 定理(6.2)和习题 6.2.3 证明：若 G 是简单图且 $\Delta(G)\geqslant 3$，则 $\chi'(G)\leqslant 2\Delta(G)-2$.

6.2.7　G 称为**边惟一 k 色可染**(**uniquely edge k-colourable**)，如果 G 中边的任何两个不同的 k 染色 $\sigma=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$ 和 $\sigma'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_k)$ 均有 $E_i=E'_i$，$i=1,2,\cdots,k$. 证明：边唯一 3 色可染 3 正则图必是 Hamiltion 图.

6.2.8　设 G 是简单图. 证明：

(a)$G\times K_2$ 是第一类图；

(b)若 H 是第一类非空图，则 $G\times H$ 是第一类图.

6.2.9　图 G 的 **k 全染色**(**k-total colouring**)τ 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对 $V(G)\cup E(G)$ 中元素的一种分配，使得相邻或相关联两元素所染颜色不同. 若 G 存在 k 全染色 τ，则称 G 为 **k 全色可染**(**k-total colourabel**). $\chi^{\tau}(G)=\min\{k:G$ 为 k 全色可染$\}$ 称为 G 的**全色数**(**total chromatic number**). 下列是著名的**全染色猜想**(M. Behzad, 1965)：

$$\chi^{\tau}(G)\leqslant\Delta(G)+2,\ \forall\ \text{简单图}\ G.$$

(a)证明：$\chi^{\tau}(G)\geqslant\Delta(G)+1$，$\forall$ 简单图 G.

(b)证明：$\chi^{\tau}(K_{3,3})=5$.

(c)求 Petersen 图的全色数.

6.3 面 染 色*

平图 G 中面的 k 染色(face k-colouring)φ 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对 $F(G)$ 中元素的一种分配，使得有公共边的两个面颜色不同．换句话说，G 中面的 k 染色 φ 是映射

$$\varphi: F(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$$

使得对每对 i 和 j $(1\leqslant i\neq j\leqslant k)$，$\varphi^{-1}(i)$ 与 $\varphi^{-1}(j)$ 无公共边．令

$$F_i=\varphi^{-1}(i)=\{f\in F(G): \varphi(f)=i\}, i=1,2,\cdots,k,$$

则记 $\varphi=(F_1,F_2,\cdots,F_k)$.

若平图 G 中面存在一种 k 染色，则称 G 中**面 k 色可染**(**face k-colourable**).

$$\chi^*(G)=\min\{k: G\text{ 中面 }k\text{ 色可染}\}$$

称为 G 的**面色数**(**face chromatic number**)．例如，$\chi^*(K_4)=4$．由定义立即可知，对任何平图 G 有

$$\chi^*(G)=\chi(G^*). \tag{6.6}$$

由定理 6.3 和(6.6)式知，对任何平图 G，均有 $\chi^*(G)\leqslant 5$．于是一个自然的问题是：对每个平图 G，是否有 $\chi^*(G)\leqslant 4$?

四色猜想 2　对任何平图 G 均有 $\chi^*(G)\leqslant 4$.

注意到 $\chi^*(K_4)=4$，若四色猜想 2 成立，则其上界是最好的．

在冲击四色猜想的过程中，人们发现了许多与四色猜想等价的命题．下面介绍在图论中与四色猜想有关的几个命题(其中(iii)属于 Tait(1880))．由此可以看出点、边和面染色之间的密切关系．

定理 6.5　下述三命题等价：

(i)**每个平面图中点 4 色可染**(四色猜想 1)；

(ii)**每个平图中面 4 色可染**(四色猜想 2)；

(iii)**每个简单 2 边连通 3 正则平面图中边 3 色可染.**

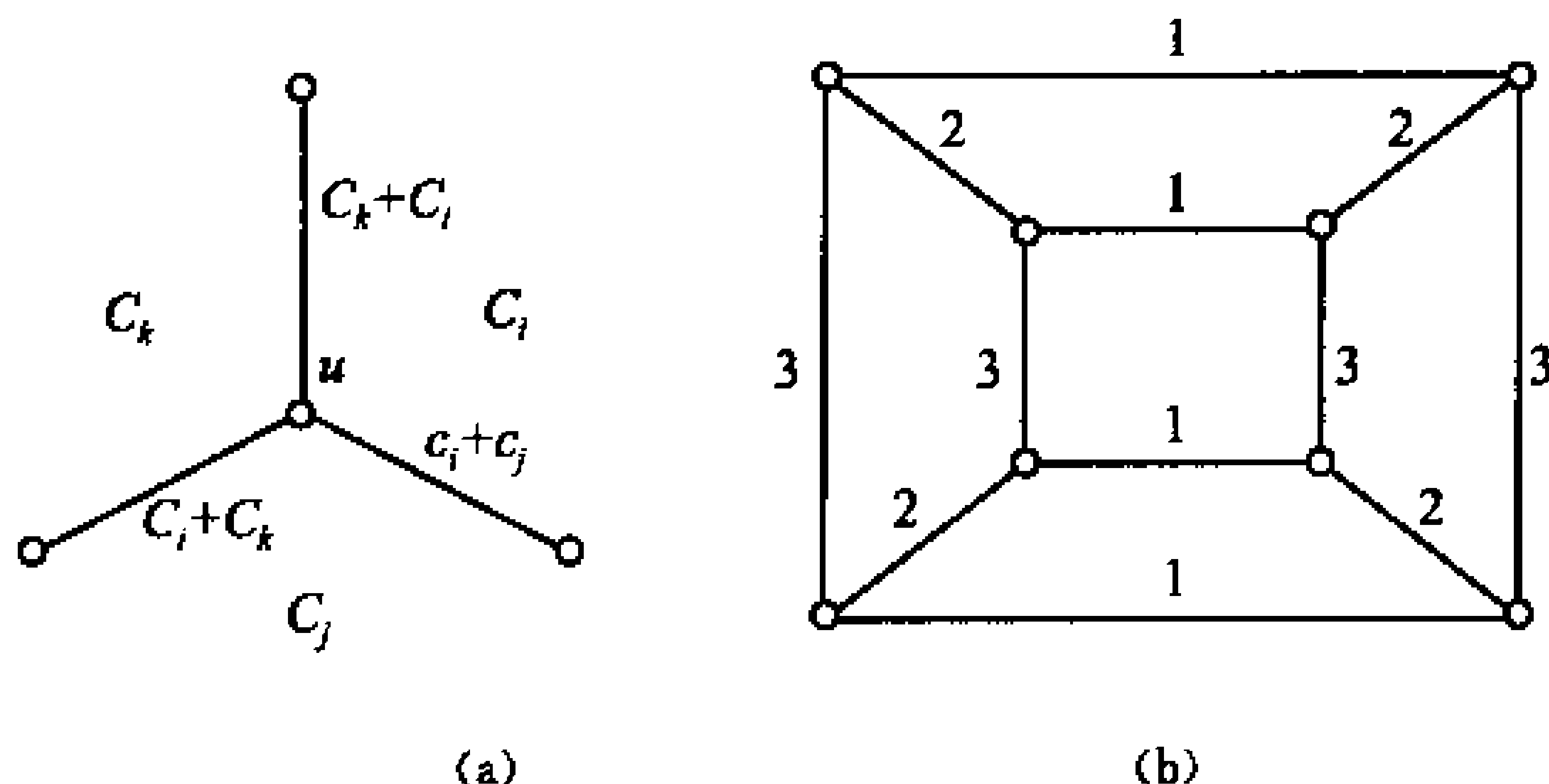
证明　按(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i)的顺序来证明．

(i)⇒(ii)　由于平图的几何对偶图仍然是平图，所以由(6.6)式就得此结论.

(ii)⇒(iii)　设(ii)成立并设 G 是简单 2 边连通 3 正则平面图，$\tilde{G}$ 是 G 的平面表示．由假设 $\tilde{G}$ 中面有 4 染色 φ．由于用什么符号来表达颜色是无关紧要的，所以我们可以用整数模 2 域中的向量 $c_0=(0,0)$，$c_1=(1,0)$，$c_2=(0,1)$ 和 $c_3=(1,1)$ 来表示 φ 所用的 4 种颜色．我们按下列原则确定 $\tilde{G}$ 的边染色 σ：

$$\sigma(e)=c_i+c_j\Leftrightarrow f\cap g=\{e\},$$

其中 $e\in E(\tilde{G})$，$f,g\in F(\tilde{G})$且 $\varphi(f)=c_i$，$\varphi(g)=c_j$．例如，见图 6.10(a)．与顶点 u 关联的 3 个面在 φ 下被染以颜色 c_i，c_j，和 c_k，则与 u 关联的 3 条边在 σ 下被染以颜色 c_i+c_j，c_j+c_k 和 c_k+c_i，而且这 3 种颜色是不同的．由于 $\tilde{G}$ 是 2 边连通的，所以每条边 e 必是某两个面的公共边，即 $\tilde{G}$ 的每条边都在 σ 下被染色，而且 σ



(a) (b)

图 6.10

中只用到颜色 c_1，c_2，c_3．因此，σ 是 $\tilde{G}$ 中边的 3 染色．

(iii)⇒(i) 假设(iii)成立，而(i)不成立．则存在临界 5 色平面图 G．设 $\tilde{G}$ 是 G 的平面表示，则(习题 3.1.3)存在一个三角剖分图 H 使得 $\tilde{G}$ 是 H 的支撑子图，而且(习题 4.3.8)H 的几何对偶图 H^* 是 2 边连通 3 正则简单平图．根据(iii)H^* 中边有 3 染色 $\sigma=(E_1,E_2,E_3)$．对于 $i\neq j$，设 $H_{ij}^*=H^*[E_i\cup E_j]$．由于 H^* 中每个顶点既与 E_i 中边关联又与 E_j 中边关联，H_{ij}^* 不含奇度点(见图 6.10(b))，因而(习题 6.3.2)H_{ij}^* 中面是 2 色可染的．令

$$\varphi_1:\ F(H_{12}^*)\to\{\alpha,\beta\} \quad \text{和} \quad \varphi_2:\ F(H_{13}^*)\to\{\gamma,\delta\}$$

分别是 H_{12}^* 和 H_{13}^* 中面的 2 染色．设 $f\in F(H^*)$．由于 $f\in F(H_{12}^*)\cap F(H_{13}^*)$，所以在 φ_1 和 φ_2 下，f 被染有两种颜色 x 和 y，记为(x,y)，其中 $x=\alpha$ 或 β，$y=\gamma$ 或 δ．下证由 $\varphi(f)=(x,y)$ 而定义的

$$\varphi:\ F(H^*)\to\{(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta),(\beta,\gamma),(\beta,\delta)\}$$

是 H^* 中面的 4 染色．由于 $H^*=H_{12}^*\cup H_{13}^*$，而且 H^* 的相邻两个面得到的颜色对(x_1,y_1)和(x_2,y_2)不同，所以 φ 是 H^* 中面的 4 染色．由于 $\tilde{G}$ 是 H 的支撑子图，所以我们能得到下列矛盾：

$$5=\chi(G)=\chi(\tilde{G})\leqslant\chi(H)=\chi^*(H^*)\leqslant 4. \qquad \square$$

习 题

6.3.1 证明(6.6)式．

6.3.2 设 G 是平图．证明：G 不含割边且 $\chi^*(G)\leqslant 2\Leftrightarrow G$ 中不含奇度点．

6.3.3 设 G 是三角剖分图．证明：$\chi(G)\leqslant 3\Leftrightarrow G$ 中不含奇度点．

6.3.4 证明：若 G 是 Hamilton 平图，则 $\chi^*(G)\leqslant 4$.

6.3.5 证明：对任意平图 G 有 $\chi^*(G)\leqslant 4\Leftrightarrow$ 对任意 2 边连通 3 正则简单平面 H 有 $\chi^*(H)\leqslant 4$.

6.3.6 利用习题 4.3.16 和定理 6.5 证明四色猜想等价于 Tait 猜想：每个简单 3 正则 3 连通平面图 G 均有 $\chi'(G)=3$.

6.3.7 平面上任作 n 条直线，把平面划分成若干区域. 证明：只需两种颜色即可把全部区域染色使有公共边界线的两区域异色.

6.3.8 设 G 是 3 正则平图. 证明：$\chi^*(G)\leqslant 3\Leftrightarrow$ 对每个 $f\in F(G)$，均有 $d_G(f)\equiv 0 \pmod 2$.

6.3.9 证明：若每个 3 正则平图的面都 4 色可染，则四色猜想成立.

6.4 四色猜想*

四色猜想是英国青年学生 Francis Guthrie 在 1852 年提出来的. 当他在给英国地图染色时发现 4 种颜色是必要的. 于是向他的哥哥 Frederick Guthrie 提出如下猜想：

任何地图上的国家只需用 4 种颜色来染，使得任何具有共同边界的两个国家颜色都不相同.

Frederick 证明不了，转而请教他的老师——当时伦敦大学教授、数学家 A. De Morgan. 这位教授也无法证明，就写信给爱尔兰数学家 W. R. Hamilton. Hamilton 同样无法证明. 起初，这个问题没有引起数学家们的注意，认为这是一个不证即明的事实. 但经过一些尝试之后，发现并不是那么回事. 1878 年，伦敦数学会负责人 A. Cayley 向伦敦数学会成员正式宣布了这一问题. 于是形成了当今著名的四色猜想.

1879 年，Kempe 作出这个猜想的第一个"证明". 尽管后人指出他证明中的漏洞，但他在证明中提出的思想仍是后人冲击四色猜想的基础. 为介绍他的证明思想，先引进若干定义.

每个有界面的度都为 3 的平图称为**构形(configuration)**. 如图 6.11 中所示的四个平图都是构形，分别记为 O,P,Q,R. 设 $\mathscr{F}$ 是由有限个构形组成的集. 若

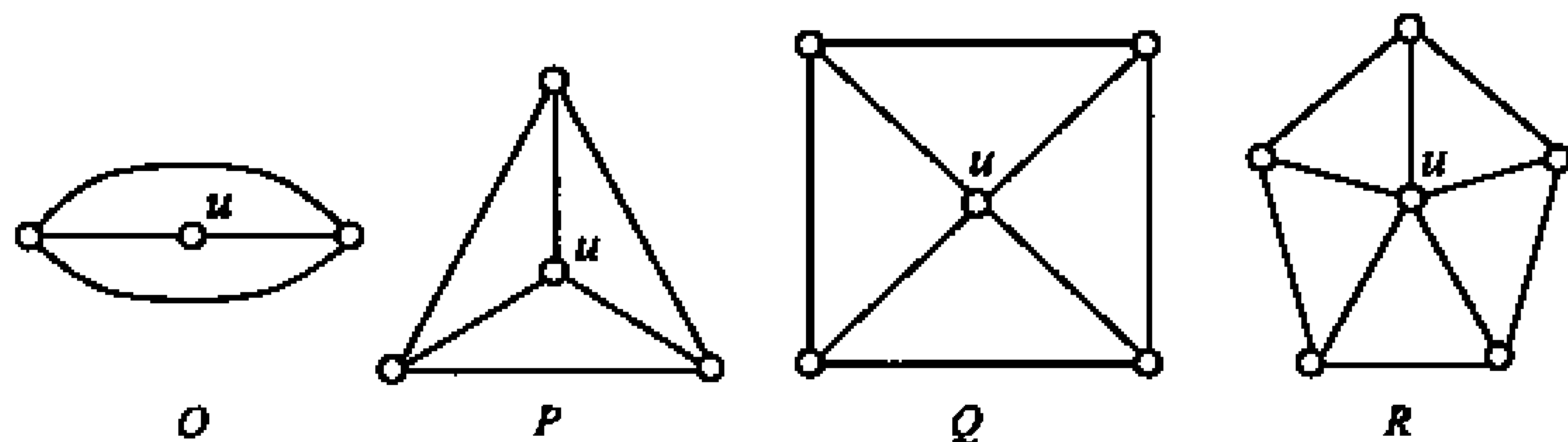


图 6.11

任何三角剖分图至少含 $\mathscr{F}$ 中一个构形，则称 $\mathscr{F}$ 是**不可免完备集**（**unavoidable complete set**）. 由于任何简单平图的最小度不超过 5，所以 $\mathscr{F}=\{O,P,Q,R\}$ 是一个不可免完备集.

若四色猜想不成立，则由(6.6)式，必存在一些 5 色平图，其中阶数最小的称为**最小图**（**minimal graph**）. 即 G 是最小图，则 $\chi(G)=5$，但对任何阶数小于 $\nu(G)$ 的平图 H 均有 $\chi(H)\leqslant 4$. Kempe 企图通过"证明"最小图不存在来证明四色猜想.

若不然，设 G 是最小图，易证 G 是三角剖分图(习题 6.4.2). 因此，G 必含 $\mathscr{F}=\{O,P,Q,R\}$ 中的构形. 若 G 含构形 O 或 P，则 $\chi(G-u)\leqslant 4$. 令 $\pi=(V_b,V_r,V_y,V_g)$ 是 $G-u$ 的点 4 染色，则对于染色 π，$N_G(u)$ 至多只需三种颜色，因此可空出一种颜色来染点 u. 于是 π 也是 G 的点 4 染色，矛盾于 $\chi(G)=5$. 所以 G 不含构形 O 和 P.

设 G 含构形 Q，并设 $N_G(u)=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，$\pi=\{V_b,V_r,V_y,V_g)$ 是 $G-u$ 中点的 4 染色，并不妨设 $u_1\in V_b$，$u_2\in V_r$，$u_3\in V_y$，$u_4\in V_g$. 则 u_1，u_4 在 $G_{b,g}=G[V_b\cup V_g]$ 和 u_2，u_3 在 $G_{r,y}=G[V_r\cup V_y]$ 中不同时都是连通的(否则 $G_{b,g}$ 中 u_1u_4 路和 $G_{r,y}$ 中的 u_2u_3 路会相交(见图 6.12 所示)). 不妨设 u_1 和 u_4 在 $G_{b,g}$ 中不连通. 于是交换 $G_{b,g}$ 中含 u_1 连通分支中点的颜色，u_1 被染上颜色 g，u_2，u_3，u_4 的颜色不变. 空出颜色 b 来染点 u，即 $\chi(G)\leqslant 4$，矛盾于 $\chi(G)=5$. 所以 G 不含构形 Q.

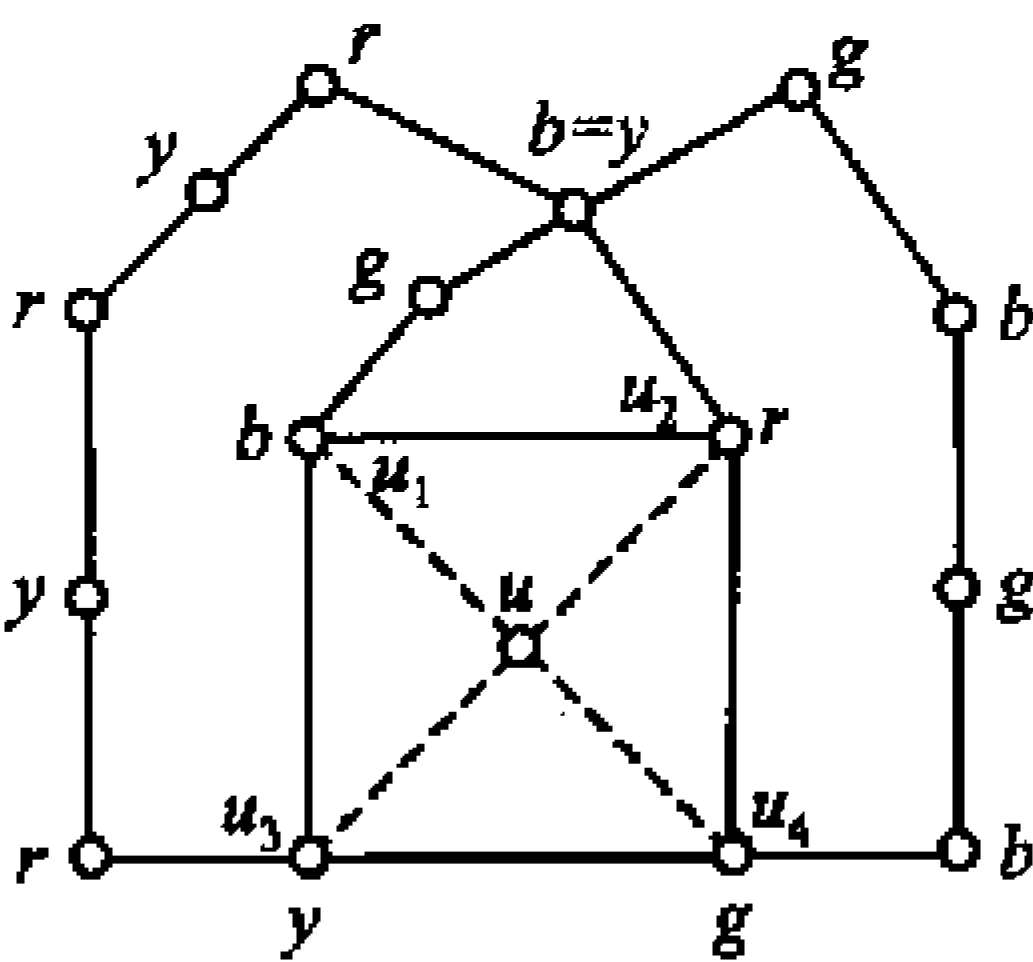


图 6.12

Kempe 采用同样的方法"证明"了 G 也不含构形 R. 于是三角剖分图 G 不含 $\mathscr{F}=\{O,P,Q,R\}$ 中任何一个构形，矛盾于 $\mathscr{F}$ 是不可免完备集，从而证明了最小图不存在，即四色猜想"得证".

1890 年，P. J. Heawood 举出了一个反例(如图 6.13 所示)，说明 Kempe 利用上述方法来证明 G 不含构形 R 并非总是对的. 例如，设 $N_G(u)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，$\pi=(V_b,V_r,V_y,V_g)$ 是 $G-u$ 的一种点 4 染色，见图 6.13 点上的字母，其中 b,r,y,g 表示四种不同颜色. u_2 和 u_4 在 $G_{b,g}$ 中是连通的，u_2 和 u_5 在 $G_{b,y}$ 中也是连通的. 因此无论是交换 $G_{b,g}$ 中的颜色，还是交换 $G_{b,y}$ 中的颜色，都不能空出一种颜色来给 u. u_1 和 u_4 在 $G_{r,g}$ 中不连通，因此可以考虑交换 $G_{r,g}$ 含 u_1 分支中的颜色(图中括号中的颜色). 但 $\pi(u_3)=r$，因而不能空出颜色来染点 u. 又因为 u_3 和 u_5 在 $G_{r,y}$ 中不连通. 所以考虑交换 $G_{r,y}$ 含 u_3 分支中点的颜色. 于是 ν_3 被

染上 y. 颜色 r 虽被空出来，但此时相邻两顶点 6 和 7 都被换成颜色 r. 由此说明 Kempe 的证明包含了一个漏洞.

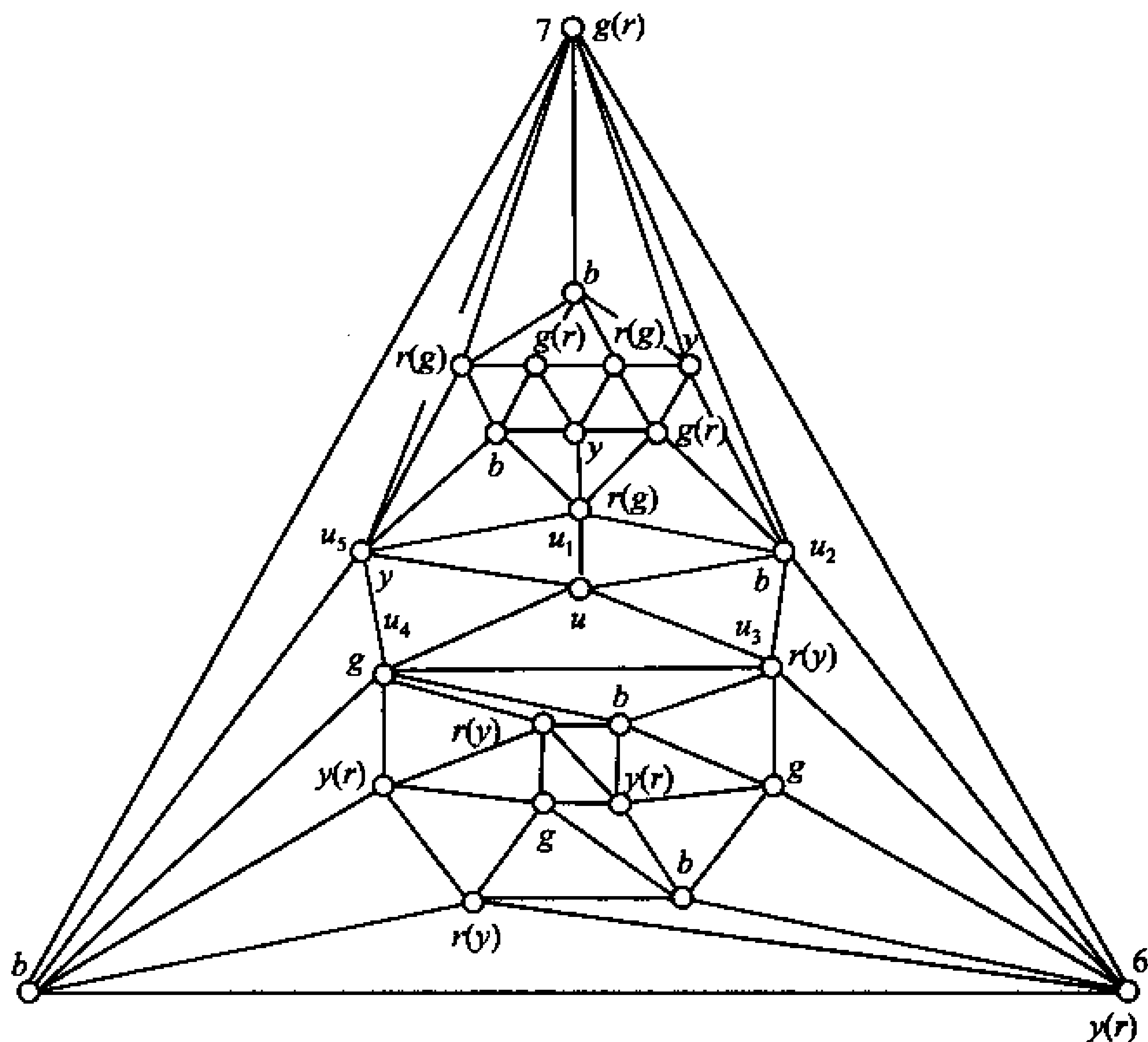


图 6.13　Heawood 图

起初人们对 Kempe 证明中的漏洞的严重性认识不足. 但多少年过去了，人们还没有找到一个满意的办法来弥补这个漏洞，才认识到四色猜想比原来象想的要困难得多. 从此以后，许多数学家都企图证明这个猜想. Kempe 的证明虽然失败了，但他在证明中提供的思想和方法仍然是后来许多数学家冲击四色猜想的基础.

设 F 是一个构形，若它不含在任何一个最小图中，则称 F 为**可约的(reducible)**. Kempe 实际上证明了构形 O, P, Q 是可约的，但他没有证明 R 也是可约的. 然而，他的这种思想提示人们：欲证四色猜想，只需寻找一个由可约构形组成的不可免完备集. 既然人们不能证明 R 是可约的，那么是否还有另外的不可免完备集呢? 1904 年，P. Wernicke 找出了一个新的不可免完备集，如图 6.14 所示. 1913 年，G. D. Birkhoff 找出不可免完备集，如图 6.15 所示. 但遗憾的是，他们都不可能证明这两个不可免完备集中最后两个构形是可约的. 于是人们转向寻找新的可约构形，1913 年，Birkhoff 首先发现了一个新的可约构形. 如图

6.16所示.

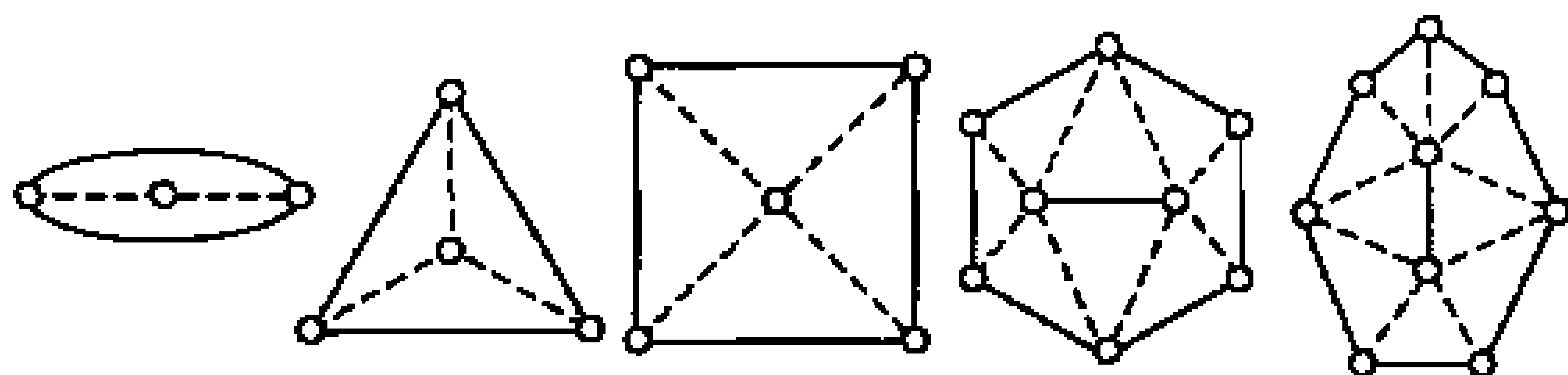


图 6.14

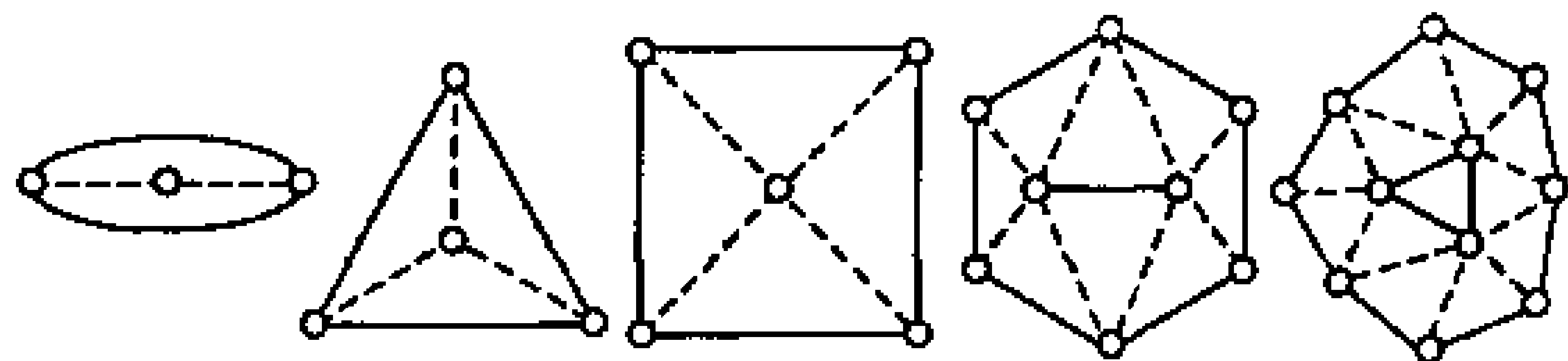


图 6.15

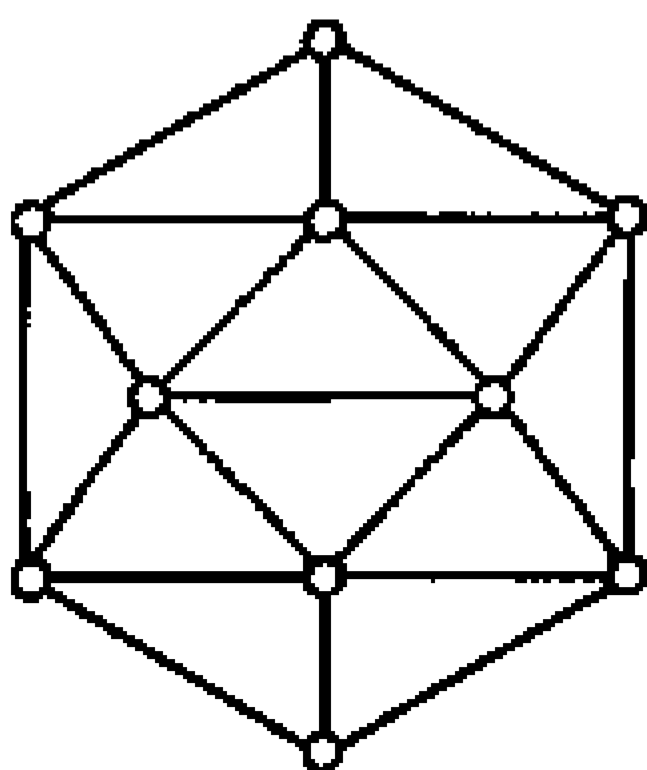


图 6.16

从那以后，人们陆续发现了数千个可约构形. 突破性地研究还是在本世纪 60 年代以后. H. Heesch 企图用电子计算机在已发现的可约构形中找出新的不可免完备集，并提出判断给定构形集是否为不可免完备集的算法. 1961 年，Y. Shimamoto 曾声称借助于计算机找出了一个全由可约构形组成的不可免完备集. 但是 Whitney 和 Tutte(1972)发现了 Shimamoto 误算了一个构形的可约性. 同时，他们提出了构形可约性分类理论. 直到 1976 年，Appel 和 Haken 与 Koch 合作改进了 Heesch 的算法，并研究了可约构形的范围，利用电子计算机花了 1260 个机时找到了一个由 1936 个(后来减少到 1400 个)可约构形组成的不可免完备集，从而宣布证明了四色猜想. 1997 年，Robertson 等人用同样的方法给出四色猜想的证明，它们找到一个由 633 个可约构形组成的不可免完备集.

要想一一检查 1400(或 633)个构形是可约的并非易事. 所以计算机证明不易被人们所接受，甚至还有人怀疑其正确性. 因此寻找四色猜想的非机器证明仍然是必要的.

值得一提的是，在冲击四色猜想的尝试中，P. G. Tait(1880)曾断言："每个 3 正则 3 连通平面图都是 Hamilton 图."于是他在这个假设下给出了四色猜想的"证明"(参见习题 6. 3. 6 和 6. 2. 1(d)). 60 多年后，W. T. Tutte (1946)构造了一个 3 正则 3 连通非 Hamillton 平面图(参见习题 3. 2. 7)，从而否定了 Tait 的证明.

习 题

6.4.1 证明：$\mathscr{F}=\{O,P,Q,R\}$是不可免完备集.

6.4.2 证明：最小图若存在，则必是 5 连通的三角剖分图.

应 用

6.5 排课表问题

在某所学校里，有 m 位教师 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和 n 个班级 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 在明确教师 x_i 每周需要给班级 y_j 上 p_{ij} 节课之后，要求制订一张周课时尽可能少的总课表. 这个问题称为**排课表问题(timetabling problem)**.

构作 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部分图 G，其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，x_i 与 y_j 之间连有 p_{ij} 条边. 由于在任何一节课里，一位教师最多只能教一个班级，并且每个班级也最多只能由一位教师讲课. 所以，同一个课时的课程安排表对应图 G 中的一个匹配. 反之，G 中每个匹配对应于同一课时里教师们讲课的一种可能安排. 因此，排课表问题就是把 $E(G)$ 划分成匹配，而且使得匹配的数目尽可能地小，这个最小数目就是 $\chi'(G)$. 由于 G 是 2 部分图，所以 $\chi'(G)=\Delta(G)$. 因此，若没有教师多于 p 节课以及没有班级上多于 p 节的课，则教学要求可用一张 p 节课时的课表安排出来. 并且存在(见习题 5.3.4 和推论 5.9.1)一个安排这种课表的好算法. 于是排课表问题就完善的解决了.

然而问题并不那么简单. 假定只有有限个教室可供利用. 在这个约束下，安排一张完善的课表需要多少课时呢?

假设总共有 l 节课需要安排在一张有 p 节课时的课表里. 由于这张课表，平均每一课时要开 l/p 节课. 所以，在某一课时至少需要 $\left\lceil \frac{l}{p} \right\rceil$ 个教室. 下面的定理指出：在一张有 p 节课时的课表里总能安排 l 节课使得在一节课时内最多占用 $\left\lceil \frac{l}{p} \right\rceil$ 个教室.

定理 6.6 **设 G 是 2 部分图且 $p\geqslant\Delta$，则 G 中存在 p 个不交匹配 $M_1,M_2,\cdots,M_p$ 使得**

$$E(G)=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_p$$

并对每个 $i(1\leqslant i\leqslant p)$ 均有

$$\left\lfloor \frac{\varepsilon}{p} \right\rfloor \leqslant |M_i| \leqslant \left\lceil \frac{\varepsilon}{p} \right\rceil.$$

证明 因 G 是2部分图，所以由推论5.10.1知 $E(G)$ 可以划分成 Δ 个匹配 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_\Delta$. 由此可知，对任何 $p \geqslant \Delta$，G 中存在 p 个不相交的匹配 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_\Delta, M'_{\Delta+1}, \cdots, M'_p$（其中 $M'_{\Delta+1} = \cdots = M'_p = \varnothing$）使得

$$E(G) = M'_1 \cup M'_2 \cup \cdots \cup M'_p.$$

对应这些基数相差大于1的任何两个匹配反复应用习题5.3.2，最后得到 G 中满足定理要求的匹配 $M_1, M_2, \cdots, M_p$ 来. □

例6.5.1 设有4个教师和5个班级，教学要求矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 和一个可能采用的4节课时的课表如下所示：

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

课时	1	2	3	4
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4	y_4	y_5		

把对应于 $\boldsymbol{P}$ 的2部分图 G 的边集 $E(G)$ 划分成一些匹配，可以用图把该课表表示出来，如图6.17(a)所示（细边对应课时1，虚边对应课时2，波边对应课时3，粗边对应课时4）.

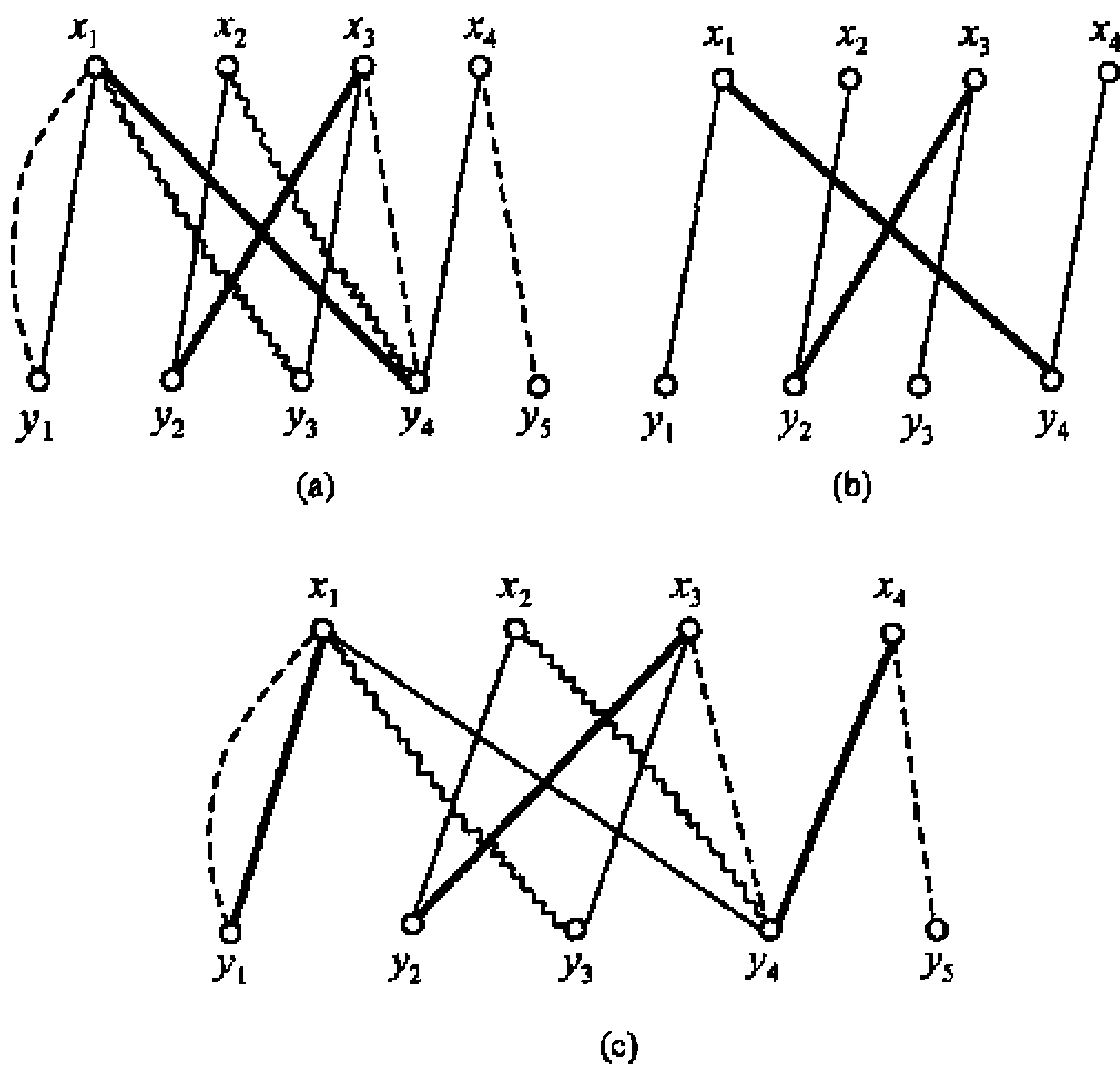


图6.17

从课表中，我们看到有4个班级在课时1上课，因而需要4个教室. 然而由于 $\varepsilon=11$，所以由定理6.6能够安排一张4课时的课表，使得在每一节课时有2

$\left(=\left\lfloor\frac{11}{4}\right\rfloor\right)$或 $3\left(=\left\lceil\frac{11}{4}\right\rceil\right)$个班级在上课.

事实上,设 M_1 表示细边的那个匹配,而 M_4 表示粗边的那个匹配,$|M_1|=4$,$|M_1|=2$. 由 $G[M_1\cup M_4]$,我们能找到一张 4 课时 3 个教室的课表(图 6.17(b)). 由于 $G[M_1\cup M_4]$,有两个分支,每个分支都是 M_1 增广路(见图 6.17(b)). 将 M_1 增广路 $P=y_1x_1y_4x_4$ 中粗、细边互换,于是粗边增加到三条,而细边减少到 3 条,得到的匹配如图 6.17(c)所示,对应的课程表如下所示. 在这张表中,任一课时内只需要 3 个教室.

课时	1	2	3	4
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4		y_5		y_4

假设只有两个教室可供利用,定理 6.6 告诉我们必须有一张 6 节课时的课表才能满足要求$\left(由于\left\lceil\frac{11}{6}\right\rceil=2\right)$. 这样的课表如下所示:

课时	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_3	y_1		y_1	
x_2	y_2	y_4				
x_3			y_4	y_3	y_2	
x_4				y_4		y_5

习 题

6.5.1 为你校教务处编排一个课程表,在周课时许可的范围内使所需要的教室尽可能地少.

6.5.2 在某所学校里,有 7 位教师和 12 个班级. 5 天一周的教学要求由下面的矩阵给出:

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix}3&2&3&3&3&3&3&3&3&3&3&3\\1&3&6&0&4&2&5&1&3&3&0&4\\5&0&5&5&0&0&5&0&5&0&5&5\\2&4&2&4&2&4&2&4&2&4&2&3\\3&5&2&2&0&3&1&4&4&3&2&5\\5&5&0&0&5&5&0&5&0&5&5&0\\0&3&4&3&4&3&4&3&4&3&3&0\end{pmatrix}$$

其中,p_{ij} 是教师 x_i 必须教班级 y_j 的课时数.

(a) 一天必须分成多少课时才能满足要求?

(b) 排一张每天 7 节课时的课表需要多少个教室? 并给出课表.

(c) 排一张每天 8 节课时的课表需要多少个教室？并给出课表.

(d) 排一张每天 9 节课时的课表需要多少个教室？并给出课表.

6.6 贮藏问题

某公司生产 n 种化学制品 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，其中某些制品是互不相容的. 若它们互相接触，则会引起爆炸. 作为一种预防措施，该公司希望把仓库分成若干隔间，以便把不相容的化学制品贮藏在不同的隔间里. 试问：这个仓库至少应该分成几个隔间？这个问题称为**贮藏问题**(**storage problem**).

我们构作简单无向图 $G=(V,E)$，其中

$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，

$x_ix_j\in E(G)\Leftrightarrow$化学制品 C_i 和 C_j 互不相容.

于是不难看出，仓库的最小隔间数等于 G 的色数 $\chi(G)$.

可以归结为色数的实际问题很多. 例如：

电视频道分配问题：某地区内有 n 家电视发射台 $T_1,T_2,\cdots,T_n$. 主管部门对每家电视发射台分配一个频道. 为排除干扰，使用同一频道的发射台之间相距必须大于指定的正数 d. 试问：该地区至少需要多少频道？我们构作简单无向图 $G=(V,E)$，其中：

$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，

$x_ix_j\in E(G)\Leftrightarrow T_i$ 与 T_j 之间距离$\leqslant d$.

于是需要的最小频道数等于 $\chi(G)$.

考试安排问题：某学校有 n 门选修课程 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 需要进行期末考试. 同一个学生不能在同一天里参加两门课程的考试. 试问：该校的期末考试至少要几天？构作简单无向图 $G=(V,E)$，其中

$V(G)=\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}$，

$l_il_j\in E(G)\Leftrightarrow L_i$ 和 L_j 被同一位学生选修.

于是考试需要的最小天数等于 $\chi(G)$.

遗憾的是，目前还没有一个有效算法来确定色数. 下面介绍枚举法.

由于图 G 的色数 $\chi(G)$是 $V(G)$所能划分成独立集的最小数目，所以若能求出 $V(G)$的所有独立集划分，然后比较这些划分中独立集的数目便可求出 $\chi(G)$.

设 $\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_k)$是 G 中点的 k 染色. 若 V_1 是 G 的极大独立集，V_2 是 $G-V_1$ 的极大独立集，V_3 是 $G-(V_1\cup V_2)$的极大独立集，依此类推，则称 π 是**规范 k 染色**(**canonical k-colouring**). 容易证明(习题 6.6.1)：G 中点 k 色可染$\Leftrightarrow G$ 有规范 k 染色. 利用 5.5 节介绍的求极大独立集的枚举法就可以确定 G 的所有

规范 k 染色. 用于这些染色中颜色数的最小值即 $\chi(G)$.

例 6.6.1 考察图 5.20 所示的图 G. 它有一个规范 4 染色

$$\pi_4=(\{a,f\},\{b,d\},\{c,g\},\{e\})$$

和两个规范 3 染色 $\pi_3=(\{a,c,g\},\{b,d,f\},\{e\})$

与 $\pi'_3=(\{a,e,g\},\{b,d,f\},\{c\})$.

于是 $\chi(G)=3$,其中 π_3 和 π'_3 都是 G 中点的 3 染色. □

由于这种枚举法需要反复利用公式(5.14)来计算所有极小覆盖,而此公式中仅乘法运算次数就超过了 2^ν. 所以对于高阶图来说,该算法是无效的.

下面介绍一个求 $\chi(G)$ 的近似有效算法——**顺序染色算法(sequential colouring algorithm)**.

设 $G=(V,E)$ 是简单无向图,$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$.

1. 令 $i=1$.
2. 令 $c=1$.
3. 若对任何 $y\in N(x_i)$,$\pi(y)\neq c$,则令 $\pi(x_i)=c$ 并且转入第 5 步.
4. 用 $c+1$ 替代 c,并转回到第 3 步.
5. 若 $i<\nu$,则利用 $i+1$ 替代 i 并转回到第 2 步,否则停止.

例 6.6.2 考察如图 6.18(a)所示的图 G(即图 5.20 所示的图). 该算法(按

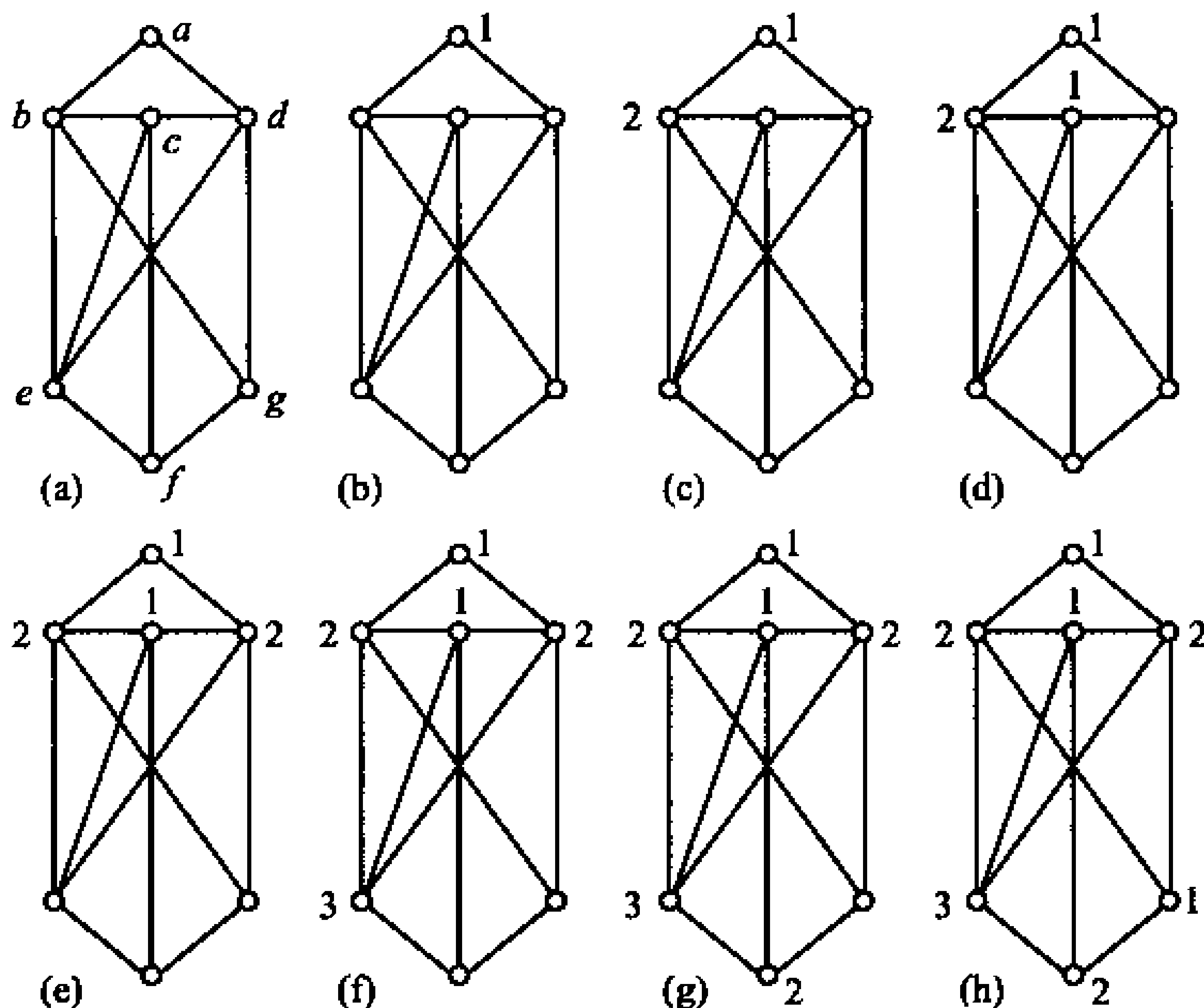


图 6.18 顺序染色算法的应用

字母顺序)的执行步骤如图 6.18(b)～(h)所示. 由此知 $\chi(G)\leqslant 3$. 由于该图 G 含三角形 bce,所以 $\chi(G)\geqslant 3$. 于是

$$\chi(G)=3,\quad \pi=(\{a,c,g\},\{b,d,f\},\{e\})$$

是 G 中点的 3 染色. 这与我们在例 6.6.1 中用枚举法求得的结果是一致的. □

该算法与顶点标号顺序有密切关系(这就是为什么叫顺序染色算法的原因). 例如,考虑 2 部划分为 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$和 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$的 2 部分图 $G=(V,E)$,其中 $V=X\cup Y$,$E=\{x_ix_j:\ i\neq j\}$. 图 6.19(a)所示的是当 $n=4$ 时的 2 部分图. 若按 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 顺序执行该算法,则只需用最小颜色数目 $2=\chi(G)$(见图6.19(b)). 若按 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n$ 的顺序来执行该算法,则需要 $n=\frac{1}{2}\nu$ 种颜色(见图 6.19(c)).

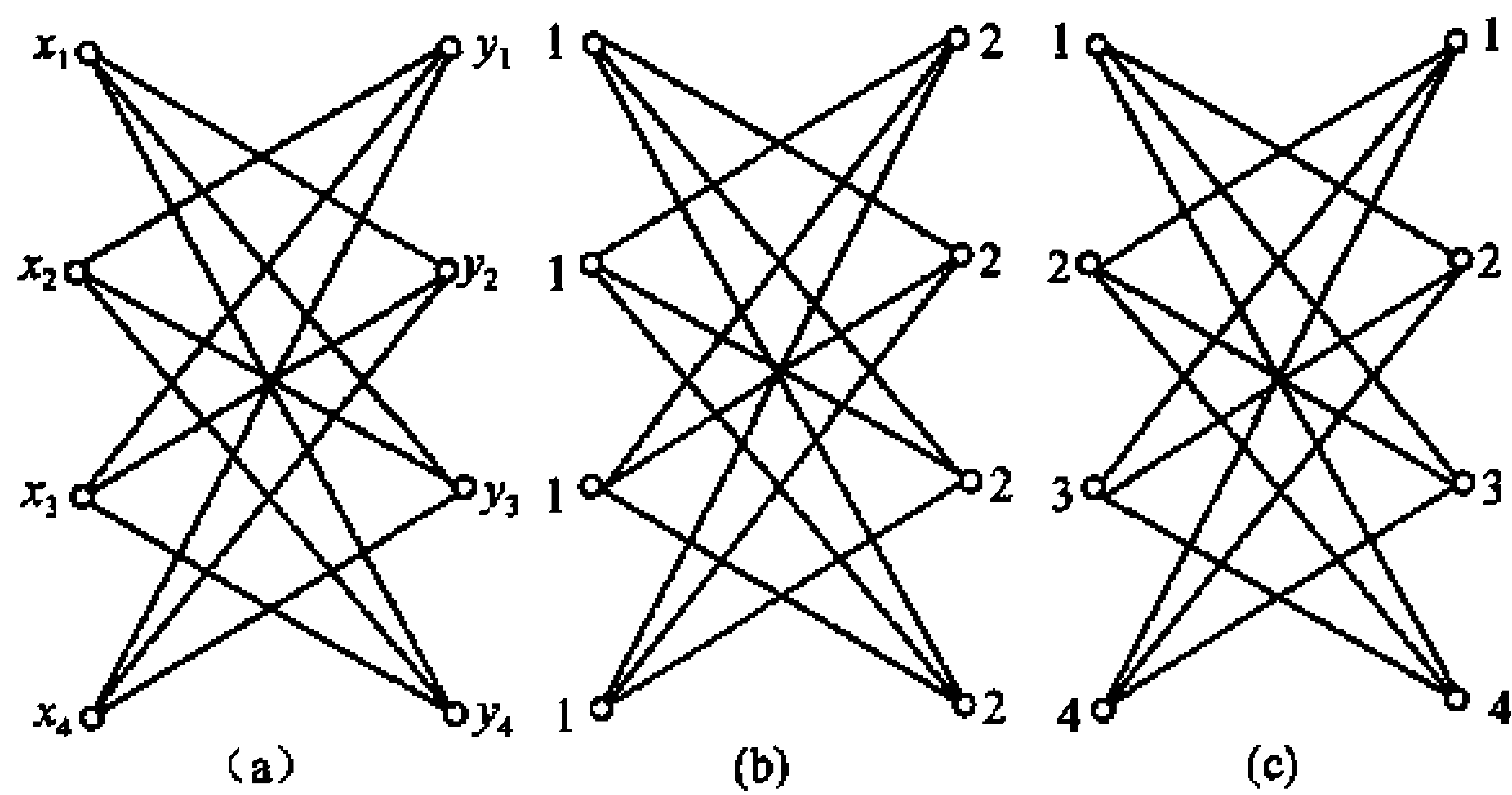


图 6.19

不难看到顺序染色算法是有效算法(运算次数为 $O(\nu^2)$)(习题6.6.3).

设 C_0 是该近似算法求出的颜色数目,$C=\chi(G)$. 由上述说明可知,该算法的性能比 C_0/C 是任意地大. 目前还没有找到一个有效近似的染色算法,其性能比为不超过一个常数.

习 题

6.6.1 证明:G 中点 k 色可染⇔G 有规范 k 染色.

6.6.2 利用顺序染色算法求习题 5.5.2 中的两个图的色数,并利用枚举法来验证它们.

6.6.3 证明:顺序染色算法的复杂度为 $O(\nu^2)$.

小结与参考文献

本章介绍了图的顶点染色、边染色以及平图的面染色的基本理论和应用. 染色理论是图论中较早研究领域之一,内容非常丰富,结论十分精彩,因而成为图论的重要研究内容之一. "四色猜想"是染色理论的主要冲击目标. 与许多科学上的难题一样,解决四色猜想的意义不仅仅在于其本身,而是由于企图攻克四色猜想的各种成功和失败的尝试推动了数学,更推动了图论的发展,特别是染色理论的研究和应用. 既然计算机证明还不能十分令人信服,寻找其非计算机证明仍是数学家们一项艰巨任务.

关于四色问题的历史、研究进展以及各种等价命题,有兴趣的读者可参阅 Ore(1967), Saaty & Kainen(1977)和 Fiorini & Wilson (1977)的专著,刘彦佩的连载综述文章(1983-1986)以及Appel & Haken (1989)和 Steen(1978)关于四色猜想计算机证明的一篇通俗文章.

一般曲面的染色理论也十分精彩. 最为著名的当数 Heawood 染色定理. 本书没有涉及它,有兴趣的读者可参阅 White (1978)的著作.

图的染色理论有丰富的实际应用(参见 Jensen & Toft(1995)的著作). 由于还未找到求图色数的有效算法,甚至还未找到有较好性能比的有效近似算法,所以染色理论的应用受到了很大的限制. 本章介绍的枚举法对高阶图来讲是无效的,而顺序染色算法有很差的性能比.

1　Appel K and Haken W. Every planar map is four colourable. *Bull Amer Math Soc*, 1976,**82**:711~712

2　Apple K and Haken W. Every planar map is four colorable, with the collaboration of J Koch. *Contemporary Mathematics*, 1989,**98**:1~741

3　Birkhoff G D. A determinant formula for the number of ways of colouring a map. *Ann Math*, 1912,**14**:42~26

4　Birkhoff G D. The reducibility of maps. *Amer Math*, 1913,**35**:115~128

5　Brooks R L. On colouring the nodes of a network. *Proc Cambridge Philos Soc*, 1941, **37**:194~197

6　Cayley A. On the colouring of maps. *Proc Roy Geog Soc*, 1879,**1**:259~261

7　Christofildes N. An algorithm for the chromatic number of a graph. *The computer Journal*, 1971,**14**:38~39

8　Dirac G A. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J London Math Soc*, 1952,**27**:85~92

9　Erdös P and Wilson R J. On the chromatic index of almost all graphs. *J Comb. Theory*

(B), 1977,**23**:255~257

10 Fiorini S and Wolson R J. *Edge-Colourings of Graphs*. Research note in Mathematics, 16, London: Pitman Publishing, 1977

11 Gupta R P. The chromatic index and the degree of a graph. *Notices Amer Math Soc*, 1966,**13**:66T~429

12 Heawood P J. Map colour theorem. *Quart J Pure Appl Math*, 1890,**24**:332~338

13 Jensen T R and Toft B. *Graph Coloring Problems*. New York: Wiley, 1995

14 Kempe A B. On the geographical problem of the four colours. *Amer J Math*, 1879,**2**: 193~200

15 刘彦佩. 平面图的理论与四色问题. 数学研究与评论, 1983,**3**(3):122~136; 1984,**4**(1): 121~136; 1985,**5**(1):125~144; 1985,**5**(3):123~136; 1986,**6**(2):175~188

16 Lovász L. Three short proofs in graph theory. *J Comb Theory* (B), 1975,**19**:111~113

17 Ore O. *The Four-Colour Problem*. New York: Academic Press, 1967

18 Robertson N, Sanders D, Seymour P and Thomas R. The four-colour theorem. *J Comb Theory* (B) 1997, **70**:2~44

19 Saaty T L and Kainen P C. *The Four-Color Problem*. McGraw-Hill, 1977

20 Steen L A. *Mathematics Today—Twelve Informal Essays*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1978 (中译本:斯蒂恩 L A 著, 马继芳译. 今日数学——随笔十二篇. 上海:上海科学技术出版社, 1982)

21 Tait P G. On the colouring of maps. *Proc Royal Soc, Edinburgh*, 1878~1880,**10**:501 ~503

22 Vizing V G. On an estimate of the chromatic class of a P-graph. *Diskret Analiz*, 1964, **3**:25~30

23 Vizing V G. Critical graphs with a given chromatic class. *Diskret Analiz*, 1965,**5**:9~17

24 Wernicke P. Über den kartographischen Vierfarbensatz. *Math Ann*, 1904,**58**:413~426

25 White A T. The proof of the Heawood conjecture. *Selected Topics in Graph Theory* (edited by Beineke L W and Wilson R J). London: Academic Press, 1978:51~81

26 Whitney H and Tutte W T. Kempe chains and the four colour problem. *Utilitas Math*. 1972,**2**:241~281

27 Zhang Limin. Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1. *Graphs and Comtinatorics*, 2000,**16**(4):467~495

28 Xu Junming. A short proof of Vizing's theorem. 中国科学技术大学学报, 1999,**29**(2): 199~201

第7章　图　与　群*

这一章是为数学系和相关专业的读者而编写的. 主要讨论图的群表示、群的图表示以及图与群之间密切而又相互作用的关系，旨在进一步揭示图论的数学本质，阅读这一章的读者被假定知晓群论的基本知识和论证方法.

群是数学中伟大的统一概念之一. 群的理论从开始出现的时候起，就为各种构形对称性的研究提供了一种有趣而又十分有力的抽象方法. 所以，对于在群与图之间有一种特别密切而又相互作用的关系就不足为奇了.

习知，任何一个具有某种关系或运算的有限集都联系着一个保持这种关系或运算的置换群. 图作为一个具有某种二元关系的有限集，当然也不例外。事实上，图不仅具有置换群表示，这种置换群通常称为图的自同构群，而且通过图的群表示已构造出以前从未有过的置换群. 例如，44352000 阶单群就是 D. G. Higman 和 C. C. Sims 利用图的群表示方法构造出来的.

另一方面，任何一个有限群都存在一个与其同构的置换群. 十分惊奇的发现是：任何一个有限群都可以用一个有向图表示出来. 这种图就是图论和群论文献中经常出现的 Cayley 图. 利用 Cayley 图还可以构造出一个无向图使它的自同构群与给定的有限群同构. 这个结论就是图论中著名的 Frucht 定理.

本章将围绕上述两个方面的问题介绍图与群之间的基本关系和与之相关的基本概念和结果.

作为应用，我们给出可迁图在高可靠性通讯和计算机互连网络设计中的一个应用.

7.1　图的群表示

在 1.2 节，我们定义了图 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$ 和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$ 的(点)**同构(isomorphism)**，即存在两个双射

$$\theta:V(D)\to V(H)\quad 和\quad \varphi:E(D)\to E(H)$$

使得 $\forall\ a\in E(D)$，

$$\psi_D(a)=(x,y)\Leftrightarrow\psi_H(\varphi(a))=(\theta(x),\theta(y))\in E(H).$$

为叙述方便起见，我们假定 D 为简单图. 于是(习题 1.2.2)两个简单图 D 和 H(点)同构 $\Leftrightarrow$ 存在双射 $\theta:V(D)\to V(H)$ 使得

$$(x,y)\in E(D)\Leftrightarrow(\theta(x),\theta(y))\in E(H).$$

θ 称为 D 和 H 之间的**同构映射(isomorphic mapping)**.

类似地，可以定义两个简单图的边同构. 两个非空简单图 D 和 H 称为**边同构的(edge-isomorphic)**，如果存在双射 φ: $E(D)\to E(H)$ 使对任何相邻两条边 a，$b\in E(D)$，a 的终点是 b 的起点 $\Leftrightarrow\varphi(a)$ 的终点是 $\varphi(b)$ 的起点. φ 称为 D 到 H 的**边同构映射(edge-isomorphic mapping)**.

引理 7.1　**设 D 和 H 是两个非空简单有向图，θ 是 D 到 H 的同构映射. 则映射**

$$\theta^*: E(D)\to E(H)$$

$$a=(x,y)\mapsto\theta^*(a)=(\theta(x),\theta(y))$$

是 D 到 H 的边同构映射.

证明　由于 θ: $V(D)\to V(H)$ 是双射，所以 θ^* : $E(D)\to E(H)$ 也是双射. 设 $a,b\in E(D)$ 并设 $a=(x,y)$，$b=(y,z)$. 则

$$\theta^*(a)=(\theta(x),\theta(y))\in E(H),$$

$$\theta^*(b)=(\theta(y),\theta(z))\in E(H).$$

所以 θ^* 是 D 到 H 的边同构映射，即 D 和 H 是边同构的. □

θ^* 称为由 θ **导出的边同构**. 作为引理的直接结果我们有以下结论.

定理 7.1　**同构的两个非空简单有向图($\delta>0$)必是边同构的.**

此定理的逆是不成立的. 即存在边同构而非点同构的两个有向图. 图 7.1 所示的就是这样的两有向图.



图 7.1

定理 7.2　**边同构的两个非空连通简单有向图必是点同构的.**

证明　设 D 和 H 都是非空连通简单有向图，φ 是 D 到 H 的边同构映射. 若存在 $a,b\in E(D)$ 使得 $a=(x,y)$，$b=(y,x)$，则由于 $\varphi(a)$ 的起点和终点分别是 $\varphi(b)$ 的终点和起点，即若 $\varphi(a)=(u,v)$，则 $\varphi(b)=(v,u)$，所以不妨设 D 中无对称边.

取 $x_0\in V(D)$. 由于 D 是非空连通的简单图，所以 x_0 不是孤立点. 令

$$E_D^+(x_0)=\{a_1,\cdots,a_{d^+}\},$$

a_i 的终点为 x_i，$i=1,\cdots,d^+$. 令

$$E_D^-(x_0)=\{a_{d^++1},\cdots,a_{d^++d^-}\},$$

a_j 的起点为 x_j，$j=d^++1,\cdots,d^++d^-$（见图 7.2）. 并令

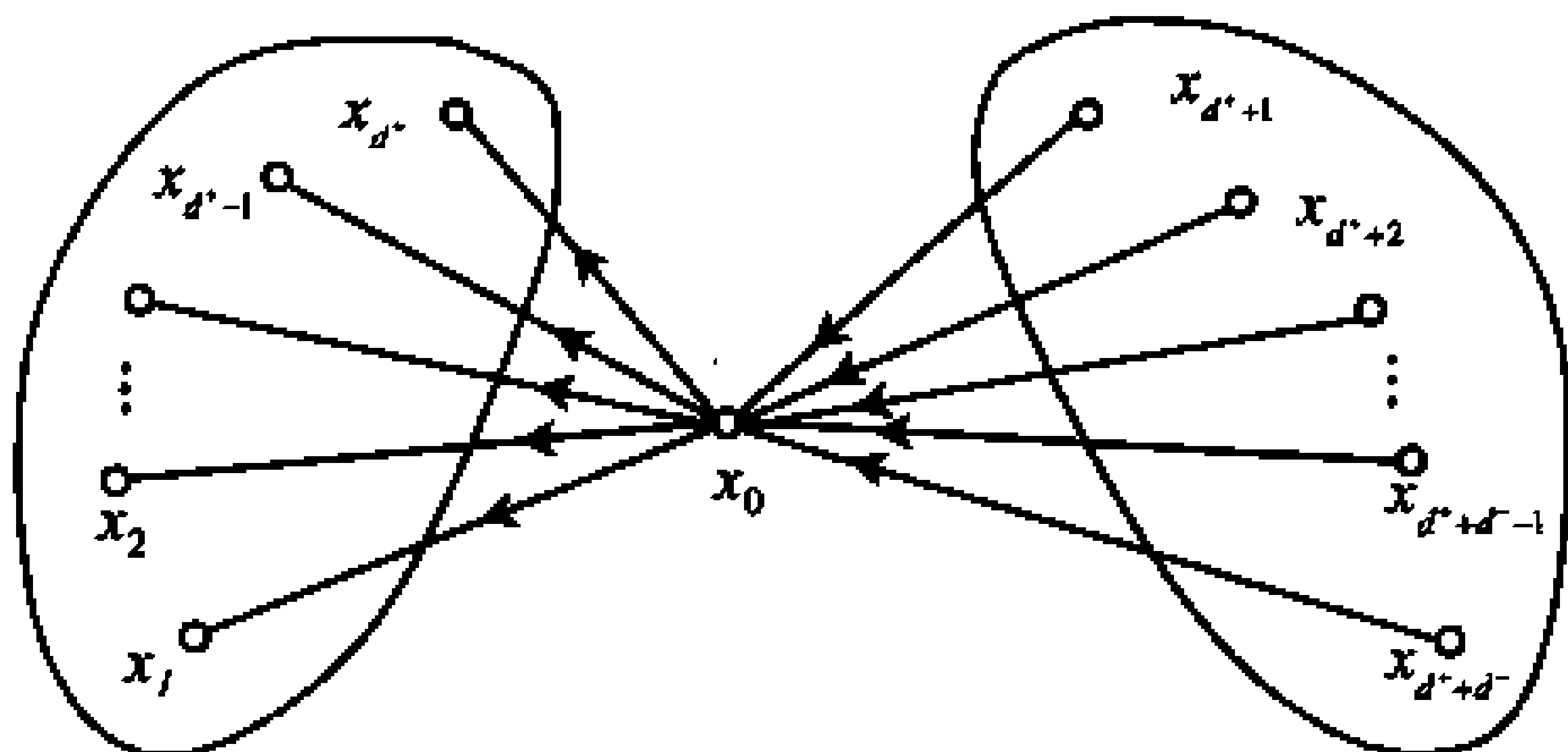


图 7.2

$$\varphi(a_i)=b_i\in E(H),\ i=1,2,\cdots,d^++d^-.$$

所以存在 $y_0\in V(H)$ 使 $b_1,\cdots,b_{d^+}$ 以 y_0 为起点，而 $b_{d^++1},\cdots,b_{d^++d^-}$ 是以 y_0 为终点. 令 $b_1,\cdots,b_{d^++d^-}$ 的另一端点为 $y_1,\cdots,y_{d^++d^-}$.

若 $a_{ij}=(x_i,x_j)\in E(D),i,j\neq 0$ 并且 $i\neq j$. 则 $\varphi(a_{ij})\in E(H)$，且 $\varphi(a_i)=b_i$，$\varphi(a_j)=b_j$，$\varphi(a_{ij})=(y_i,y_j)$. 令

$$D_1=D[\{x_0,x_1,\cdots,x_{d^++d^-}\}],$$
$$H_1=H[\{y_0,y_1,\cdots,y_{d^++d^-}\}].$$

定义
$$\theta:V(D_1)\to V(H_1)$$
$$x_i\mapsto\theta(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,d^++d^-.$$

则 θ 是 D_1 到 H_1 的同构映射. 若 $D_1=D$ 则 θ 即为所求.

下设 $D_1\neq D$. 因为 D 是连通的，所以存在 $x\in V(D)\setminus V(D_1)$ 与 $V(D_1)$ 中某些点相邻。任取其中一点 x_i，显然 $x_i\neq x_0$. 不妨设 $(x,x_i)\in E(D)$，则 $\varphi((x,x_i))\notin E(H_1)$. 由于 x_i 是边 (x_0,x_i) 和边 (x,x_i) 的终点，所以 y_i 应是边 $\varphi((x_0,x_i))=(y_0,y_i)$ 和边 $\varphi((x,x_i))$ 的终点. 因而存在 $y\in V((H)\setminus V(H_1)$ 使 $\varphi((x,x_i))=(y,y_i)\in E(H)$. 令

$$D_2=D[\{x_0,\cdots,x_{d^++d^-},x\}],$$
$$H_2=H[\{y_0,\cdots,y_{d^++d^-},y\}].$$

我们将上述同构映射 $\theta:V(D_1)\to V(H_1)$ 补充定义 $\theta(x)=y$，就得到 D_2 到 H_2 的一个同构.

若 $D_2=D$，则结论成立. 若 $D_2\neq D$，则反复进行上述递归过程，直到获得图 $D_{\nu-(d^++d^-)}=D$ 和 $H_{\nu-(d^++d^-)}=H$. 同构映射 $\theta:V(D_1)\to V(H_1)$ 能被扩充到 $V(D)\to V(H)$ 的同构映射. 于是定理得证. □

注 我们称两个简单无向图 G 和 H 是边同构的，如果存在双射 φ: $E(G)\to E(H)$ 使得对任何 $a,b\in E(G)$ 在 G 中相邻 $\Leftrightarrow\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 在 H 中也相邻. 按照这个定义，定理 7.2 对无向图是不成立的. 例如图 7.3 所示的两个无向图是边同

构的，但不是点同构的.

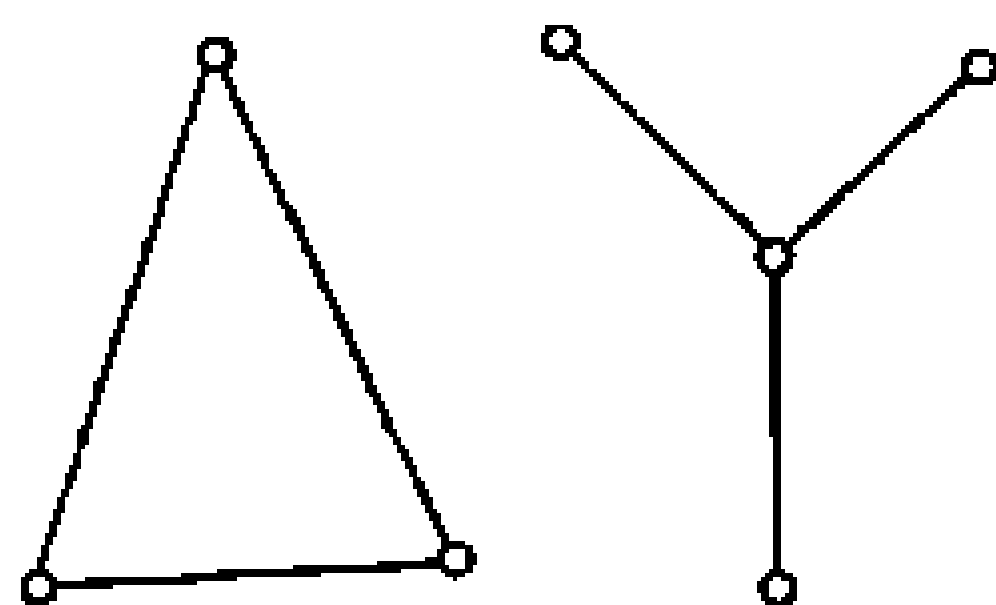


图 7.3

D 到自身的同构称为**自同构(automorphism)**. 不难证明(习题 7.1.3)，简单图 D 的一个自同构 θ 是 $V(D)$ 上的置换使得

$$(x,y)\in E(D)\Leftrightarrow(\theta(x),\theta(y))\in E(D).$$

在置换的合成运算(即对于 $V(D)$ 上的任何两个置换 α,β 以及 $x\in V(D)$，均有 $(\alpha\beta)(x)=\alpha(\beta(x))$)下，这些置换集构成群，称为 D 的**自同构群(automorphism group)**，或称为 D 的**点群(vertex-group)**，或简称为 D 的**群(group)**，记为 Aut(D).

例如，$\mathrm{Aut}(K_n^*)\cong S_n$($n$! 阶对称群)，$\mathrm{Aut}(\vec{C}_n)\cong C_n$($n$ 阶循环群)，其中 $\vec{C}_n$ 为 n 阶有向圈.

图的自同构群称为**图的群表示(groupical representation)**. 图的这种表示能使我们方便地借助于群论的分析方法进一步分析某些特殊图类(比如可迁图，见 7.2 节)的性质.

类似地可以定义 D 的**边自同构**和**边自同构群(edeg-automorphism group)**.

由引理 7.1 知，D 的自同构 θ 可以诱导出 D 的一个边自同构 θ^*. 因此 D 的点自同构群 Aut(D) 可以诱导出 D 的一个边自同构群，记为 $\mathrm{Aut}^*(D)$.

定理 7.3　**设 D 是非空简单有向图，则** $\mathrm{Aut}(D)\cong\mathrm{Aut}^*(D)\Leftrightarrow D$ **至多含一个孤立点.**

证明　($\Rightarrow$)设 x,y 是 D 的两个孤立点. $\alpha\in\mathrm{Aut}(D)$ 是使 $\alpha(x)=y$，其余点不动的元素，e 是 Aut(D) 的单位元，则由 α 和 e 诱导的 $\mathrm{Aut}^*(D)$ 中元素都是单位元 e^*. 因此，$\mathrm{Aut}^*(D)\ncong\mathrm{Aut}(D)$. 矛盾.

($\Leftarrow$)设

$$\varphi:\ \mathrm{Aut}(D)\rightarrow\mathrm{Aut}^*(D)$$
$$\alpha\mapsto\varphi(\alpha)=\alpha^*.$$

下证 φ 是群 Aut(D) 和群 $\mathrm{Aut}^*(D)$ 的一个同构映射. 由定义知，φ 是满射. 只需证明 φ 是单射且保合成运算.

设 $\alpha,\beta\in\mathrm{Aut}(D)$，$\alpha\neq\beta$. 则存在 $x\in V(D)$ 使 $\alpha(x)\neq\beta(x)$. 由于 D 至多含一个孤立点，所以 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 其中之一不为孤立点. 不妨设 $\alpha(x)=u$ 不是孤立点. 于是存在 $u_1\in V(D)$ 使 u_1 与 u 相邻. 不妨设 $(u,u_1)\in E(D)$. 所以存在 $y\in$

$V(D)$，使 $\alpha(y)=u_1$ 且

$$(u,u_1)=(\alpha(x),\alpha(y))\in E(D)\Leftrightarrow(x,y)\in E(D).$$

令 $\beta(x)=w,\beta(y)=w_1$，则 $(w,w_1)\in E(D)$. 由于 $u=\alpha(x)\neq\beta(x)=w$，所以 $(u,u_1)\neq(w,w_1)$. 于是令 $a=(x,y)$，则

$$\begin{aligned}\alpha^*(a)&=(\alpha(x),\alpha(y))=(u,u_1)\\&\neq(w,w_1)=(\beta(x),\beta(y))=\beta^*(a).\end{aligned}$$

即 $\varphi(\alpha)\neq\varphi(\beta)$. 这证明了 φ 是单射. 余下的只需证明 φ 是保合成运算的.

任取 $a\in E(G)$，$\alpha,\beta\in \mathrm{Aut}(D)$. 令 $a=(x,y)$，并令

$$\beta(x)=x',\beta(y)=y';\quad \alpha(x')=x'',\alpha(y')=y''.$$

则

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\beta)(a)&=\varphi(\alpha\beta)(x,y)=(\alpha\beta(x),\alpha\beta(y))\\&=(\alpha(x'),\alpha(y'))=(x'',y'').\\(\varphi(\alpha))(\varphi(\beta))(a)&=(\varphi(\alpha))(\varphi(\beta))(x,y)\\&=(\varphi(\alpha))(\beta(x),\beta(y))\\&=(\varphi(\alpha))(x',y')=(\alpha(x'),\alpha(y'))\\&=(x'',y'').\end{aligned}$$

于是，$\varphi(\alpha\beta)(a)=(\varphi(\alpha))(\varphi(\beta))(a)$，即 φ 保合成运算. □

习 题

7.1.1 设 D 和 H 都是简单有向图，θ 是 D 到 H 的点同构. 证明：对任何 $S\subset V(D)$ 有 $N_H^+(\theta(S))=\theta(N_D^+(S))$，$N_H^-(\theta(S))=\theta(N_D^-(S))$，其中：$\theta(S)=\{u\in V(H):\theta(x)=u,x\in S\}$.

7.1.2 证明：设 $\boldsymbol{A}(D)$ 和 $\boldsymbol{A}(H)$ 分别是简单图 D 和 H 的邻接矩阵，则 $D\cong H\Leftrightarrow\boldsymbol{A}(D)$ 和 $\boldsymbol{A}(H)$ 置换相似.

7.1.3 设 D 是简单图. 证明：D 的自同构映射集在合成运算下构成群.

7.1.4 证明：

(a) $\mathrm{Aut}(K_n^*)\cong S_n$；

(b) $\mathrm{Aut}(\vec{C}_n)\cong C_n$.

7.1.5 设 D 是简单图，证明：

(a) $\mathrm{Aut}(D)\cong\mathrm{Aut}(D^c)$；

(b) $\mathrm{Aut}(D)\cong\mathrm{Aut}(\vec{D})$；

(c) $|\mathrm{Aut}(D)|=\nu!\Leftrightarrow D\cong K_\nu^*$.

7.1.6 证明：同构于 D 且不相等于 D 的标号图数目为 $\nu!/|\mathrm{Aut}(D)|$.

7.1.7 证明：若 D 是简单图且 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(D)$ 的特征根各异，则 $\mathrm{Aut}(D)$ 是 Abel 群（即交换群）. (C. Y. Chao, 1971)

7.2 可迁图

在这一节,我们将利用图的群表示,讨论一类在理论上和应用上都非常重要的特殊简单图类——可迁图.

设 D 是简单图,$x_1,x_2\in V(D)$. 若存在 $\theta\in \mathrm{Aut}(D)$使$\theta(x_1)=x_2$,则称 x_1 和 x_2 是**点相似的**(**vertex-similar**). 设 $a_1=(x_1,y_1),a_2=(x_2,y_2)\in E(D)$. 若存在 $\varphi\in \mathrm{Aut}(D)$使 $\varphi(x_1)=x_2,\varphi(y_1)=y_2$,则称 a_1 和 a_2 是**边相似的**(**edge-similar**). 显然这两种相似关系分别是 $V(D)$和 $E(D)$上的一种等价关系. 若 D 的每对顶点都是相似的,则称 D 为**点可迁的**(**vertex-transitive**);若 D 的每对边都是相似的,则称 D 为**边可迁的**(**edge-transitive**).

易证点可迁图必是正则的(习题 7.2.1). 图 7.4 所示的图 D 是点可迁的,但不是边可迁的;而图 H 是边可迁的,但不是点可迁的(习题 7.2.3).

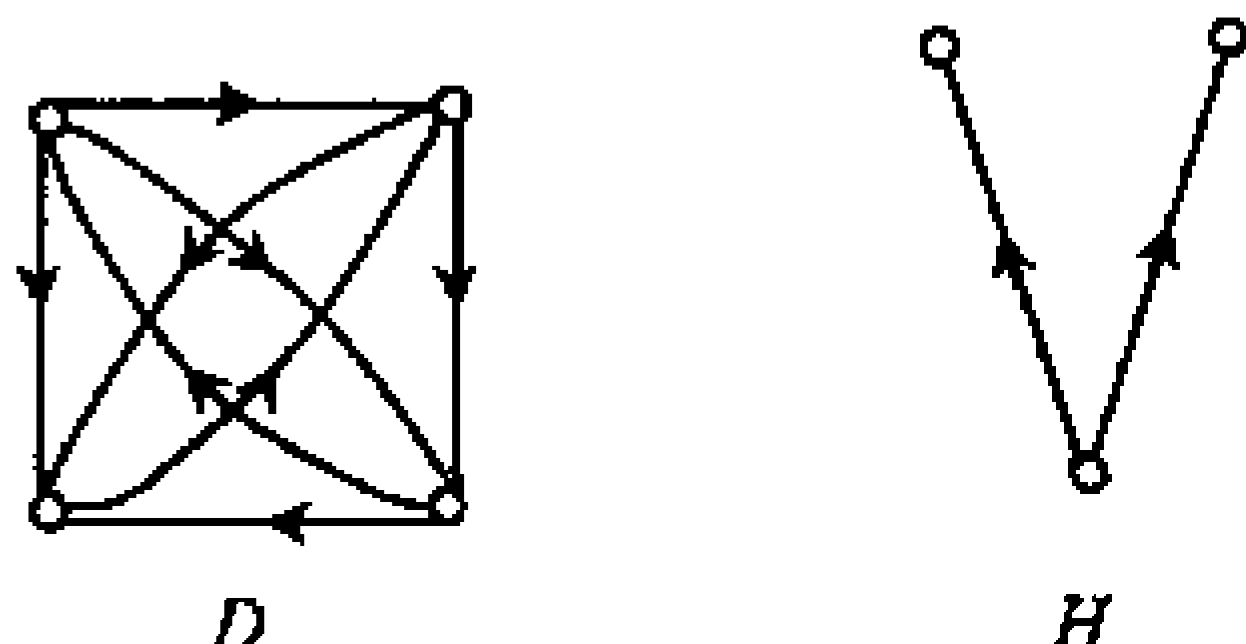


图 7.4

定理 7.4　**设 D 是边可迁图且 $\delta(D)>0$,则 D 或者是点可迁的或者是 2 部分图.**

证明　设 $D=(V(D),E(D))$是边可迁图且 $\delta(D)>0$,并设$E(D)=\{a_1,a_2,\cdots,a_\varepsilon\}$. 取 $a_1=(x,y)\in E(D)$. 所以 a_1 与 D 中每条边都相似. 于是存在 $\theta_1,\cdots,\theta_\varepsilon\in \mathrm{Aut}(D)$使

$$(\theta_i(x),\theta_i(y))=a_i\in E(D),\quad i=1,2,\cdots,\varepsilon.$$

令

$$V_1=\{\theta_i(x)\in V(D):\ i=1,2,\cdots,\varepsilon\},$$
$$V_2=\{\theta_i(y)\in V(D):\ i=1,2,\cdots,\varepsilon\}.$$

由于 D 没有孤立点,所以 $V(D)=V_1\cup V_2$.

情形 1　若 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$,则 D 是点可迁的.

事实上,任取 $u,w\in V(D)$,只需证 u 与 w 相似.

因为 D 是简单图,而且 $\delta(D)>0$,所以 $E_D^+(u)\neq\varnothing,E_D^+(w)\neq\varnothing$. 若 $u,w\in V_1$(或 V_2). 由于 D 是边可迁的,所以,对任何 $a_i\in E_D^+(u)$存在 θ_i 使$\theta_i(x)=u$,而且对任何 $a_j\in E_D^+(w)$存在 θ_j 使$\theta_j(x)=w$. 于是 $\theta_j\theta_i^{-1}\in \mathrm{Aut}(D)$且 $\theta_j\theta_i^{-1}(u)=\theta_j$

$(x)=w$,即 u 与 w 相似. 若 $u\in V_1$,且 $w\in V_2$. 则由于 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$,所以存在 $z\in V_1\cap V_2$. 由上述讨论知 u 和 z 相似,z 和 w 相似,所以 u 和 w 相似.

情形 2　若 $V_1\cap V_2=\varnothing$,则 D 是 2 部分图.

事实上,令 $u,w\in V(D)$. 若它们相邻,则存在 $a_k\in E(D)$使 u 和 w 是 a_k 的两端点. 若 $a_k=(u,w)$,则由于 D 是边可迁,所以存在 θ_k 使 $\theta_k(x)=u$ 且 $\theta_k(y)=w$. 由定义 $u\in V_1,w\in V_2$. 若 $a_k=(w,u)$,则存在 θ_k 使 $\theta_k(x)=w\in V_1$,且 $\theta_k(y)=u\in V_2$. 所以 D 是 2 部分图. □

推论 7.4.1(Elayne-Dauber)　**没有孤立点的边可迁无向图或者是点可迁的或者是 2 部分图.**

推论 7.4.2　$d\left(\geqslant\frac{\nu}{2}\right)$**正则边可迁偶阶无向图必是点可迁的.**

这两个推论的证明留给读者(习题 7.2.1(b)).

下面讨论可迁图的连通性. 分片和原子概念在可迁图连通性研究中起重要作用.

设 D 是强连通有向图,F 是 $V(D)$的非空真子集. 若$N_D^+(F)$(或 $N_D^-(F)$是 κ 分离集,则称 F 是 D 的**正(或负)分片(positive (resp. negative) fragment)**,记为 F^-(或 F^-). 正分片和负分片统称为**分片**. 点数最小的分片称为**原子(atom)**. 原子为正分片的称为**正原子(positive atom)**;原子为负分片的称为**负原子(negative atom)**. 易知每个不含支撑完全图的强连通图都存在原子,而且每个原子导出子图都是强连通的.

一般说来,正负原子并不总是存在的. 例如:设 $n\geqslant3$. 令 $V(K_n^*)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$y\notin V(K_n^*)$. 令

$$D=K_n^*\ \cup\{(u,x_i):i=1,2,\cdots,n-2\}$$
$$\cup\{(x_i,y):i=1,2,\cdots,n\}.$$

则 D 有正原子$\{y\}$,但无负原子. 反之,$\vec{D}$ 有负原子而无正原子.

引理 7.5(Hamidoune,1977)　**设 D 为强连通图,F_1 和 F_2 分别是 D 的正(或负)原子和正(或负)分片. 若 $F_1\not\subseteq F_2$,则 $F_1\cap F_2=\varnothing$.**

证明　不妨设 $F_1=F_1^+,F_2=F_2^+$. 令 $C_i=N_D^+(F_i^+)$,　则 $R_i^-=V(D)\setminus(F_i^+\cup C_i)$为 D 的负分片,$i=1,2$,而且

$$|F_1^+|\leqslant|F_2^+|,|C_1|=|C_2|=\kappa(D),$$
$$|R_1^-|\geqslant|R_2^-|\geqslant|F_1^+|.$$

若 $C_1=C_2$,则由于 $D[F_1^+]$为 $D-C_1$ 强连通分支,而$D[F_2^+]$是 $D-C_1$ 中若干连通分支(不一定是强连通分支)之并,且 $F_1^+\not\subseteq F_2^+$,所以 $F_1^+\cap F_2^+=\varnothing$. 设 $C_1\neq C_2$,并设 $F_1^+\cap F_2^+\neq\varnothing$. 我们将导出矛盾.

由于(见图 7.5)$N_D^+(F_1^+\cap F_2^+)$是 D 的分离集,并且$|F_1^+\cap F_2^+|<|F_1^+|$,所以$|N_D^+(F_1^+\cap F_2^+|>\kappa(D)$.

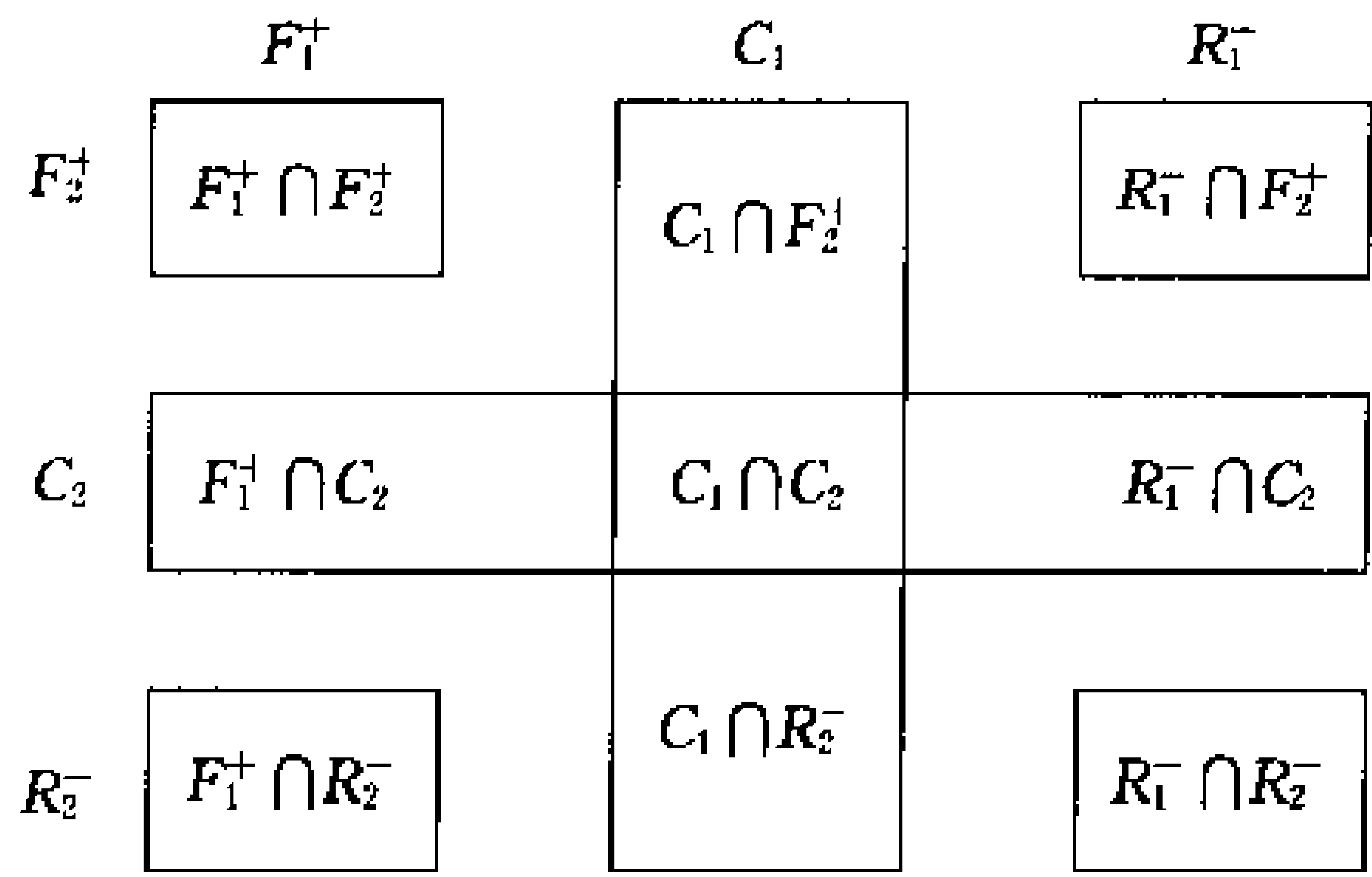


图 7.5

若 $R_1^-\cap R_2^-\neq\varnothing$,则 $N_D^-(R_1^-\cap R_2^-)$是 D 的分离集,因此

$$\kappa(D)\leqslant|N_D^-(R_1^-\cap R_2^-)|$$
$$\leqslant|C_1|+|C_2|-|N_D^+(F_1^+\cap F_2^+)|<\kappa(D).$$

矛盾. 所以 $R_1^-\cap R_2^-=\varnothing$. 于是,我们有

$$|F_1^+\cap C_2|>\kappa(D)-|(C_1\cap F_2^+)\cup(C_1\cap C_2)|$$
$$=|C_1\cap R_2^-|.$$
$$|R_2^-|=|(F_1^+\cap R_2^-)\cup(C_1\cap R_2^-)|$$
$$<|F_1^+\cap R_2^-|+|F_1^+\cap C_2|<|F_1^+|.$$

这矛盾于 F_1^+ 是 D 的原子. □

推论 7.5 **若强连通图含有正(或负)原子,则任何两个正(或)原子是不相交的.** □

定理 7.5 **若 D 是强连通边可迁图,则 $\kappa(D)=\delta(D)$.**

证明 设 $k(D)<\delta(D)$,并设 F 是 D 的原子. 不妨设 $F=F^+$. 于是$|F^+|\geqslant 2$ 且 $D[F^+]$是强连通的. 所以存在 $x,y\in F^+$ 和 $z\in N_D^+(F^+)$使$(y,x)\in E(D)$且$(x,z)\in E(D)$. 因为 D 是边可迁的,所以存在 $\sigma\in \mathrm{Aut}(D)$使 $\sigma(y)=x$ 且$\sigma(x)=z$. 令

$$\sigma(F^+)=\{u\in V(D):\sigma(w)=u,w\in F^+\},$$

则 $\sigma(F^+)$也是 D 的正原子(习题 7.2.3). 由于 $z\in\sigma(F^+)$且 $z\notin F^+$ 所以$\sigma(F^+)\neq F^+$. 另一方面,$x\in\sigma(F^+)\cap F^+$. 所以由推论 7.5 知 $\sigma(F^+)=F^+$. 矛盾. 因而有 $\kappa(D)\geqslant\delta(D)$. 再由定理4.4,有 $\kappa(D)=\delta(D)$. □

定理 7.6(Hamidoune,1981) **设 D 是强连通的点可迁图,则 $\lambda(D)=\delta(D)$.**

证明 因为 D 是点可迁的,所以 D 是δ 正则的(习题 7.2.1). 于是(例 1.4.

1)对 $V(D)$ 的任何非空真子集 S 均有

$$d_D^+(S)=d_D^-(S),$$

其中，$d_D^+(S)=|(S,\bar{S})|$，$d_D^-(S)=|(\bar{S},S)|$. 由定理 4.4，我们只需证明$\lambda(D)\geqslant\delta$. 令 $\lambda(D)=\lambda$. 于是(习题 4.3.2)存在$V(D)$的非空真子集 X 使得$d_D^+(X)=\lambda=d_D^-(X)$. 选取这样的 $X\subset V(D)$使 X 尽可能小. 于是$|X|\leqslant\frac{\nu}{2}$且 $D[X]$是强连通的.

若$|X|=1$，则 $\lambda=d_D^-(X)=d_D^-(X)=\delta$. 结论成立.

下设$|X|\geqslant 2$. 我们先证明 $D[X]$是点可迁的. 设 $x,x'\in X$. 由于 D 是点可迁的，所以存在$\sigma\in\mathrm{Aut}(D)$使$\sigma(x)=x'$. 令 $X'=\sigma(X)$，则$|X|=|X'|$且 $d_D^+(X')=\lambda=d_D^+(X')$，$X\cap X'\neq\varnothing$(因为$x'\in X\cap X'$). 因为

$$\begin{aligned}|X\cup X'|&=|X|+|X'|-|X\cap X'|\\&\leqslant\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}-1=\nu-1,\end{aligned}$$

所以 $X\cup X'\subset V(D)$. 因 $d_D^-(X\cup X')\geqslant\lambda$，$d_D^+(X\cap X')\geqslant\lambda$，且

$$d_D^+(X\cup X')+d_D^+(X\cap X')\leqslant d_D^+(X)+d_D^-(X')=2\lambda$$

(参见习题 1.3.6)，所以 $d_D^+(X\cap X')=\lambda$. 由于 $X\cap X'\subset X$ 和 X 的最小性知 $X\cap X'=X$. 由$|X|=|X'|$知 $X'=X$. 令

$$\Gamma=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(D):\sigma(X)=X\}.$$

则 Γ 是 $\mathrm{Aut}(D)$的子群，而且作用在 X 上是可迁的，即 $D[X]$是点可迁的.

由于 $D[X]$是点可迁的，因而 $D[X]$是正则的. 令 $D[X]$的正则度为 r. 则 $0<r\leqslant\delta-1$ 且 $r\leqslant|X|-1$. 由于 $d_D^+(X)=(\delta-r)|X|=\lambda$，所以

$$\begin{aligned}\lambda&=(\delta-r)|X|\geqslant(\delta-r)(r+1)\\&=\delta+r(\delta-r-1).\end{aligned}$$

结论得证. □

定理 7.7(Hamidoune,1981) **设 D 是点可迁的强连通图，F 是 D 的正(或负)原子，则 $D[F]$是点可迁的，而且存在 $V(D)$的划分$\{V_1,V_2,\cdots,V_s\}$，$s\geqslant 2$ 使得 $D[V_i]\cong D[F]$.**

证明 不妨设 $F=F^+$. 若$|F^+|=1$，结论显然成立.

下设$|F^+|\geqslant 2$. 任取 $x,y\in F^+$，并且 $x\neq y$. 由于 D 是点可迁的，所以存在 $\sigma\in\mathrm{Aut}(D)$使 $\sigma(x)=y$. 于是 $\sigma(F^+)$也是 D 的正原子，并且 $y\in\sigma(F^+)\cap F^+$. 由推论 7.5 知 $\sigma(F^+)=F^+$. 令

$$\Gamma=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(D):\sigma(F^+)=F\}.$$

则 Γ 是 $\mathrm{Aut}(D)$的子群且作用在 F^+ 上是可迁的，即 $D[F^+]$是点可迁的.

下证第二个结论. 任取 $x\in V(D)$. 由于 D 是点可迁的，所以对固定的 $y\in$

F^+,存在$\sigma\in \mathrm{Aut}(D)$使$\sigma(y)=x$. 于是$\sigma(F^+)$是含$x$的正原子且$D[\sigma(F^+)]\cong D[F^+]$. 当$x\notin F^+$时,由推论7.5知$\sigma(F^+)\cap F^+=\varnothing$. 因此$D$中至少存在两个正原子. 于是对每个$x\in V(D)$,$D$中存在含$x$的正原子$F_x^+$使得$D[F_x^+]\cong D[F^+]$,而且对任何$y\in V(D)$,$y\neq x$,或者$F_x^+=F_y^+$或者$F_x^+\cap F_y^+=\varnothing$. 因此这些正原子$F_1^+,F_2^+,\cdots,F_s^+$,$s\geqslant 2$,构成了$V(D)$的一个划分. 定理得证. □

推论 7.7 设D是素阶点可迁强连通图,则$\kappa(D)=\delta(D)$.

习 题

7.2.1 证明:

(a)点可迁图必是正则的;

(b)推论7.4.1,推论7.4.2,推论7.5和推论7.7.

7.2.2 证明:图7.4所示的图D是点可迁但不是边可迁的,而H是边可迁但不是点可迁的.

7.2.3 设D是强连通的点可迁图,F是D的正(或负)原子. 证明:对任何$\sigma\in\mathrm{Aut}(D)$,则$\sigma(F)$仍是D的正(或负)原子.

7.2.4 设D是强连通的点可迁图,$\delta(D)=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}$,$\kappa(D)$是$D$的强连通度,$F$是$D$的原子. 证明:

(a) $\kappa(D)\geqslant |F|$;

(b) $\kappa(D)\geqslant \frac{1}{2}(\delta(D)+1)$;

(c) $\kappa(D)\geqslant \frac{3}{2}(\delta(D)+1)$,若$D$中无对称边.

7.3 群的图表示

在7.1节中,我们已经看到,任何一个图D都联系着一个群$\mathrm{Aut}(D)$. 一个自然的问题是(König,1936):对于一个给定的有限群Γ,是否存在一个简单无向图G使$\mathrm{Aut}(G)\cong\Gamma$. 本节将肯定地回答这个问题.

首先给出群的图表示. 设$\Gamma=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$是非平凡有限群,$S$是$\Gamma$中不含单位元$e$的非空集. **Cayley 色图**,简称 **Cayley 图**(Cayley,1895),记为$C_\Gamma(S)$,是指其边被染色的简单有向图$D=(V,E)$,其中:$V(D)=\Gamma=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$,

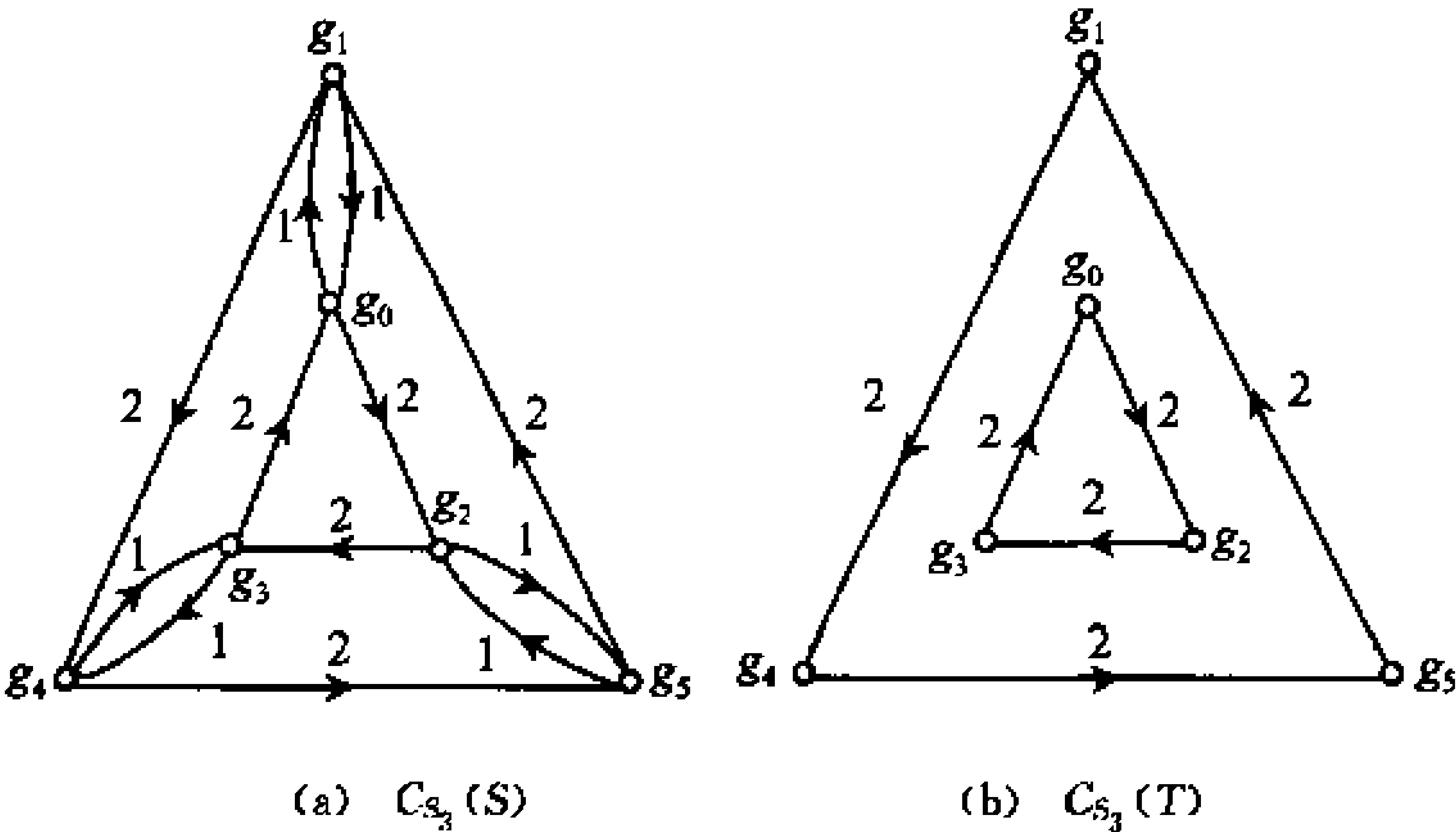
$$(g_i,g_j)\in E(D)\text{且染以颜色 }k\Leftrightarrow\text{存在 }g_k\in S\text{ 使 }g_i^{-1}g_j=g_k.$$

例 7.3.1 令Γ为$X=\{1,2,3\}$上所有置换构成的对称群$S_3=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$,其中:

$$g_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad g_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad g_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

$$g_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad g_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad g_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

令 $S=\{g_1,g_2\}$，$T=\{g_2\}$，对应的两个 Cayley 图 $C_{S_3}(S)$ 和 $C_{S_3}(T)$ 分别如图 7.6 所示，其中边上标号为该边被染上的颜色. □



(a) $C_{S_3}(S)$　　(b) $C_{S_3}(T)$

图 7.6

从图 7.6 可以看到，图 $C_{S_3}(S)$ 是强连通的，而 $C_{S_3}(T)$ 不是强连通的. 这是由于 S 是 S_3 的生成集，而 T 则不是. 一般地，我们有：

定理 7.8 Cayley 图 $C_\Gamma(s)$ 是强连通的 $\Leftrightarrow S$ 是 Γ 的生成集.

证明 (⇒)任取 $g\in\Gamma$. 由于 $C_\Gamma(S)$ 是强连通的，所以对任何 $h\in S$，$C_\Gamma(S)$ 中有一条 (h,g) 路 $P=(g_0,g_1,\cdots,g_n)$，其中 $g_0=h$，$g_n=g$，边 (g_{i-1},g_i) 上的颜色为 $i(i=1,2,\cdots,n)$. 于是存在 $h_i\in S$ 使 $g=g_0h_1h_2\cdots h_n$. 因为 g 是任意的，所以 S 是 Γ 的生成集.

(⇐)任取 $g,h\in C_\Gamma(S)$. 由于 S 是 Γ 的生成集，所以存在 $\alpha\in S$ 使 $g=\alpha h_1h_2\cdots h_n$ 且 $h=\alpha g_1g_2\cdots g_m$，于是

$$h=gh_n^{-1}\cdots h_2^{-1}h_1^{-1}g_1g_2\cdots g_m,$$

$$g=hg_m^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1}h_1h_2\cdots h_n.$$

这表明 $C_\Gamma(S)$ 既有一条 (g,h) 路，又有一条 (h,g) 路，即 $C_\Gamma(S)$ 是强连通的. □

Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 称为群 Γ **的图表示**(**graphical representation**)，其中 S 是 Γ 的生成集. 群的图表示将群中各元素之间(特别是与生成集元素)的抽象关系直观明了地表示出来了. 例如，图 7.6 所示的 Cayley 图 $C_{S_3}(S)$ 是对称群 S_3 的图表示. 考虑 S_3 中任意两个元素，比如 g_2 和 g_5. $C_{S_3}(S)$ 中存在一条从 g_2 到 g_5 的有向路 (g_2,g_3,g_5)，其中有向边 (g_2,g_3) 染有颜色 2，而有向边 (g_3,g_5) 染有颜色 1. 于是，$g_2=g_2^{-1}g_3$，$g_1=g_3^{-1}g_5$，即 $g_3=g_2g_2$，$g_5=g_3g_1$. 因而有 $g_5=g_3g_1=g_2g_2g_1$.

设 $D=(V,E)$ 是其边被染色的简单有向图. $\varphi\in \mathrm{Aut}(D)$ 称为 D 的**保色自同构(color-preserving automorphism)**,如果 $(x,y)\in E(D)\Leftrightarrow(\varphi(x),\varphi(y))\in E(D)$,而且边 (x,y) 和边 $(\varphi(x),\varphi(y))$ 有相同的颜色. 例如,例 7.3.1 中的由 $g_j\mapsto g_1g_j, j=0,1,\cdots,5$,确定的置换就是 $C_{S_3}(S)$ 中一个保色同构.

容易证明(习题 7.3.5):其边被染色的简单有向图 D 的保色自同构集在置换的合成运算下构成 $\mathrm{Aut}(D)$ 的子群. 这个子群称为 D 的**保色自同构群**,记为 $\mathrm{Aut}^c(D)$.

设 $\Gamma=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$ 是有限群,对每个 $i, 0\leqslant i\leqslant n-1$ 定义

$$\varphi_i:\Gamma\to\Gamma$$
$$g_j\mapsto\varphi_i(g_j)=g_ig_j,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

不难证明,φ_i 是 Γ 上的置换. 令

$$\varphi(\Gamma)=\{\varphi_i: i=0,1,\cdots,n-1\}.$$

则 $\varphi(\Gamma)$ 是一个置换群.

定理 7.9(Frucht,1938) **设 S 是非平凡有限群 $\Gamma=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$ 的生成集,则**

$$\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))=\varphi(\Gamma)\cong\Gamma.$$

证明 任取 $\varphi_l\in\varphi(\Gamma)$,$\varphi_l$ 是 $\Gamma=V(C_\Gamma(S))$ 上的置换. 由于 $(g_i,g_j)\in E(C_\Gamma(S))$ 且染以色

$$\begin{aligned}k&\Leftrightarrow g_i^{-1}g_j=g_k\in S\\&\Leftrightarrow(g_lg_i)^{-1}(g_lg_j)=g_k\in S\\&\Leftrightarrow\varphi_l^{-1}(g_i)\varphi_l(g_j)=g_k\in S\\&\Leftrightarrow(\varphi_l(g_i),\varphi_l(g_j))\in E(C_\Gamma(S))\text{ 且染以色 }k.\end{aligned}$$

所以 $\varphi_l\in\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$.

反之,设 $\alpha\in\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$,并设 $\alpha(g_0)=g_l$,其中 g_0 是 Γ 的单位元,要证 $\alpha=\varphi_l$.

任取 $g_j\in V(C_\Gamma(S))=\Gamma$. 由于 S 是 Γ 的生成集,所以由定理 7.8 知 $C_\Gamma(S)$ 是强连通的. 因而 $C_\Gamma(S)$ 中存在 (g_0,g_j) 路 $P=(g_{j_0},g_{j_1},\cdots,g_{j_p})$,其中 $g_{j_0}=g_0$, $g_{j_p}=g_j$. 设边 $(g_{j_{i-1}},g_{j_i})$ 被染以色 $k_i, i=1,2,\cdots,p$,则 $g_j=g_0g_{k_1}g_{k_2}\cdots g_{k_p}$. 因为 α 是保色的,所以

$$\alpha(g_j)=\alpha(g_0)g_{k_1}g_{k_2}\cdots g_{k_2}\cdots g_{k_p}=\alpha(g_0)g_j=g_lg_j=\varphi_l(g_j),$$

即 $\alpha=\varphi_l\in\varphi(\Gamma)$.

由此我们证明了 $\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))=\varphi(\Gamma)$. 下面要证 $\Gamma\cong\varphi(\Gamma)$. 令

$$\psi:\Gamma\to\varphi(\Gamma)$$
$$g_l\mapsto\psi(g_l)=\varphi_l,\quad l=0,1,\cdots,n-1.$$

由于Γ和$\varphi(\Gamma)$都是群，所以ψ是双射．为了要证明ψ是Γ到$\varphi(\Gamma)$的同构，只需证明ψ是保群运算．

令$g_i,g_j\in\Gamma$，并令$g_ig_j=g_k$．由于对任何$g_z\in\Gamma$，有

$$\begin{aligned}\varphi_k(g_z)&=g_kg_z=(g_ig_j)g_z=g_i(g_jg_z)=\varphi_i(g_jg_z)\\&=\varphi_i(\varphi_j(g_z))=\varphi_i\varphi_j(g_z).\end{aligned}$$

所以$\varphi_k=\varphi_i\varphi_j$，于是

$$\psi(g_ig_j)=\psi(g_k)=\varphi_k=\varphi_i\varphi_j=\psi(g_i)\psi(g_j).$$

即ψ是保群运算的．因而$\Gamma\cong\varphi(\Gamma)$定理证毕． □

推论 7.9 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$**是点可迁的．**

证明 从定理 7.9 的证明的第一部分可知，对Γ的任何不含单位元的非空子集S，$\varphi(\Gamma)\subseteq\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$．

任取$g_i,g_j\in\Gamma=V(C_\Gamma(S))$，并令$g_jg_i^{-1}=g_k$．则

$$\varphi_k(g_i)=g_kg_i=(g_jg_i^{-1})g_i=g_j,$$

即存在$\varphi_k\in\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$使$\varphi_k(g_i)=g_j$，所以$C_\Gamma(S)$是点可迁的． □

定理 7.9 告诉我们，对于任何一个有限群Γ，存在一个简单有向图D使得Γ同构于$\mathrm{Aut}(D)$的一个子群．下面，我们将肯定地回答本节开头提出的问题．对于任何有限群Γ，存在简单无向图G，使得$\mathrm{Aut}(G)\cong\Gamma$．这就是下列著名的 Frucht 定理．

定理 7.10(Frucht 定理，Frucht，1938) **对于任何给定的有限群Γ存在简单无向图G使$\mathrm{Aut}(G)\cong\Gamma$．**

证明 设$\Gamma=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$．当$n=1$时，令$G=K_1$，则显然有$\mathrm{Aut}(G)\cong\Gamma$．下设$n\geqslant2$，并设$S$是$\Gamma$的生成集且不含单位元$g_0$．先构造 Cayley 图$C_\Gamma(S)$．由定理 7.9 知$\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))\cong\Gamma$．

下面，我们通过$C_\Gamma(S)$来构造简单无向图$G_\Gamma(S)$(一称为 **Frucht 图**)如下：把$C_\Gamma(S)$中色为k的有向边(g_i,g_j)删去换成一条长度为 3 的无向路(g_i,u_{ij},u_{ij}',g_j)，并且在点u_{ij}和u'_{ij}处分别接上一条长度为$2k-2$的无向路P_{ij}和长度为$2k-1$的无向路P'_{ij}．这样得到一个$n(2s^2+s+1)$阶，$2ns(s+1)$条边的无向图，其中$s=|S|$(习题 7.3.3)．图 7.7 所示的是对应于 Cayley 图$C_{S_3}(S)$(见图 7.6(a))的 Frucht 图$G_{S_3}(S)$．

我们要证 $$\mathrm{Aut}(G_\Gamma(S))\cong\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S)).$$

先注意到对每个$\alpha\in\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$，唯一确定了$\mathrm{Aut}(G_\Gamma(S))$中的元素．另一方面，我们只需证明对每个$\beta\in\mathrm{Aut}(G_\Gamma(S))$都由某个$\alpha\in\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$所确定．

由于$C_\Gamma(S)$是强连通的，所以$C_\Gamma(S)$中的每个顶点既不是$G_\Gamma(S)$的分离集又

不是 $G_\Gamma(S)$ 的 1 度点. 因而对每个 $g\in V(C_\Gamma(S))$, $\beta(g)\in V(C_\Gamma(S))$, 即 $V(C_\Gamma(S))$ 在 $\mathrm{Aut}(G_\Gamma(S))$ 下是不变的.

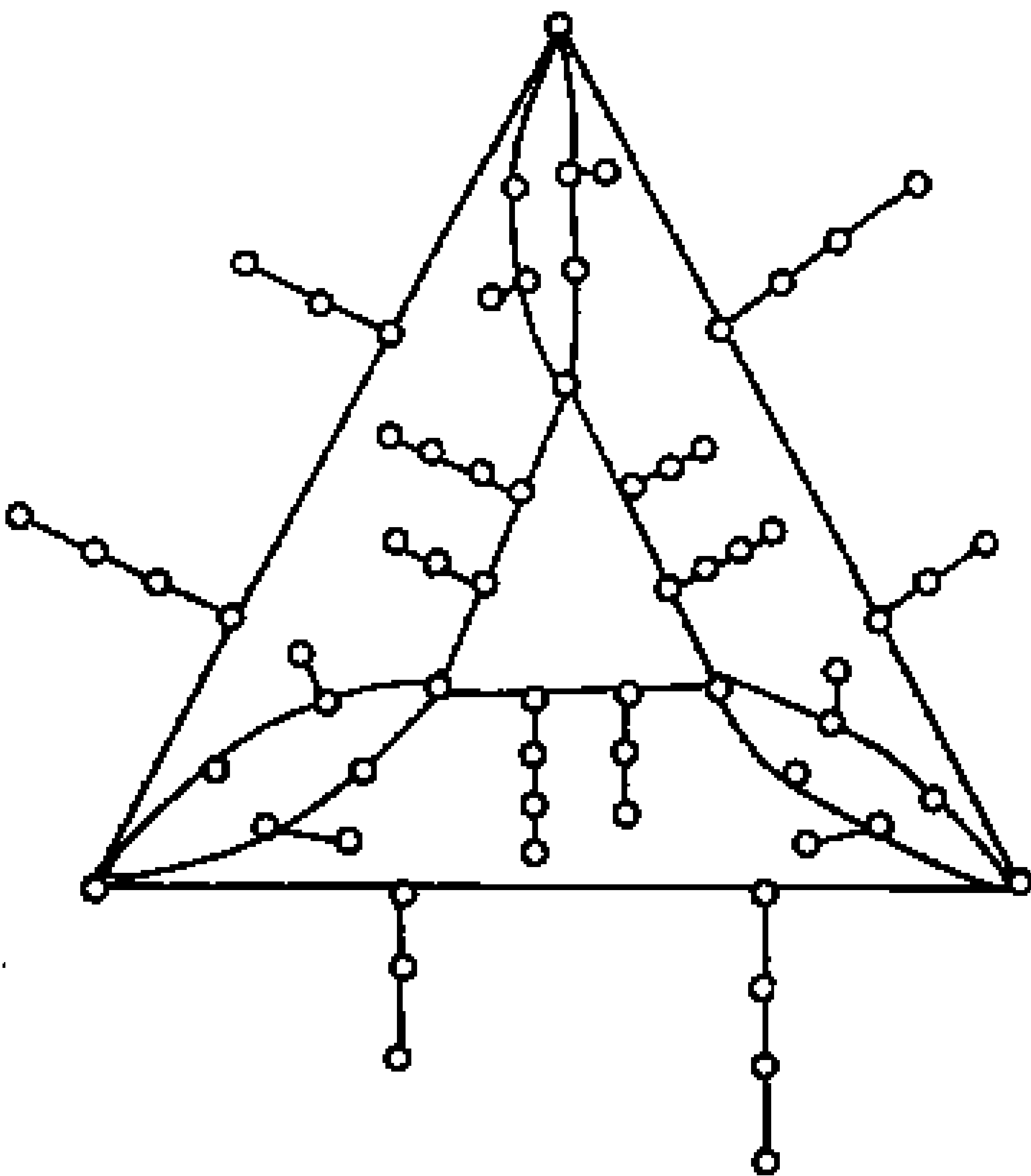


图 7.7　Frucht 图 $G_{S_3}(S)$

因为替换 $C_\Gamma(S)$ 中边 (g_i,g_j) 的子图 G_{ij} 是 $G_\Gamma(S)-V(C_\Gamma(S))$ 的连通分支, 所以 $\beta\in\mathrm{Aut}(G_\Gamma(S))$ 只能将一个连通分支映射到另一个连通分支; 而且将长度为 $2k-2$ 的路映到另一条长度为 $2k-2$ 的路; 将长度为 $2k-1$ 的路映到另一条长度为 $2k-1$ 的路; 将每个分支上 1 度点映到另一个分支中对应路上的 1 度点. 因此, 令

$$\bar\beta=\beta|V(C_\Gamma(S)),$$

则

$$(g_i,g_j)\in E(C_\Gamma(S))\text{且染色 }k$$
$$\Leftrightarrow(\bar\beta(g_i),\bar\beta(g_j))\in E(C_\Gamma(S))\text{且染色 }k.$$

因此 $\bar\beta\in\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))$. 于是证明了

$$\mathrm{Aut}(G_\Gamma(S))\cong\mathrm{Aut}^c(C_\Gamma(S))\cong\Gamma.$$ □

习　题

7.3.1　设 Γ 是 X 上的有限群, $|X|>1$. 证明: 若 $S=X\setminus\{g_0\}$, 则 $C_\Gamma(S)\cong K^*_{|X|}$, 其中 g_0 为 X 中的单位元.

7.3.2　设 Γ 为 $S_3=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$ (参见例 7.3.1), 构作 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 和相应的 Furcht 图 $G_\Gamma(S)$, 其中:

(a) $S=\{g_1,g_3\}$;

(b) $S=\{g_3,g_4\}$.

7.3.3　(a) 证明: 由 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 构造出的 Furcht 图 $G_\Gamma(S)$ 的阶为 $n(2s^2+s+1)$, 边数为

$2ns(s+1)$,其中 $s=|S|$ 且 S 是 Γ 中不含单位元的生成集.

(b)对图 7.7 中 Furcht 图,验证(a)中的结论.

7.3.4 证明:其边被染色的简单有向图 D 上的所有保色自同构集在置换合成运算下构成 Aut(D)的子群.

应　用

7.4 可靠通讯网络的设计

通讯和计算机互连网络常常用无向图 G 或有向图 D 来模拟. 顶点表示通讯站或处理机,边表示通讯或者互连线路. 连通度是该网络可靠性的一个重要度量. 因为 κ 个点或者 λ 条边的失灵势必危及该系统的通讯畅通. 一般说来,连通度越高,网络越可靠. 当然不能无限制地增加通讯路线,这样会增加费用. 部件标准化,也是通讯和计算机互连网络设计时所要考虑的重要因素. 从图论的角度看,这个问题归结为对给定的正整数 n 和 k,构造一个 n 阶的 k 正则 k 连通(或 k 边连通)且高度对称的图.

下面,我们来构造一类满足要求的简单图——**循环图**(**circulant**).

首先,我们构造**无向循环图** $G(n;\pm S)=(V,E)$,其中:

$$V(G)=\{0,1,2,\cdots,n-1\},\quad S\subseteq\left\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\},$$

$$E(G)=\{ij:\text{存在 } s\in S \text{ 使} |j-i|\equiv s(\mathrm{mod}\ n)\}.$$

若 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_l\}$ 且 $1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_l\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$,则记 $G(n;\pm S)$ 为 $G(n;\pm s_1,\pm s_2,\cdots,\pm s_l)$. 图 7.8(a)和(b)所示的是 $G(8;\pm1,\pm4)$和 $G(13;\pm1,\pm5)$. 显然,当 $s_l\neq\frac{n}{2}$时,$G(n;\pm S)$是 $2l$ 正则的;当 $s_l=\frac{n}{2}$时,$G(n;\pm S)$是$(2l-1)$正则的.

其次构造有向循环图 $D(n;S)=(V,E)$,其中:

$$V(D)=\{0,1,2,\cdots,n-1\},\quad S\subseteq\{1,2,\cdots,n-1\},$$

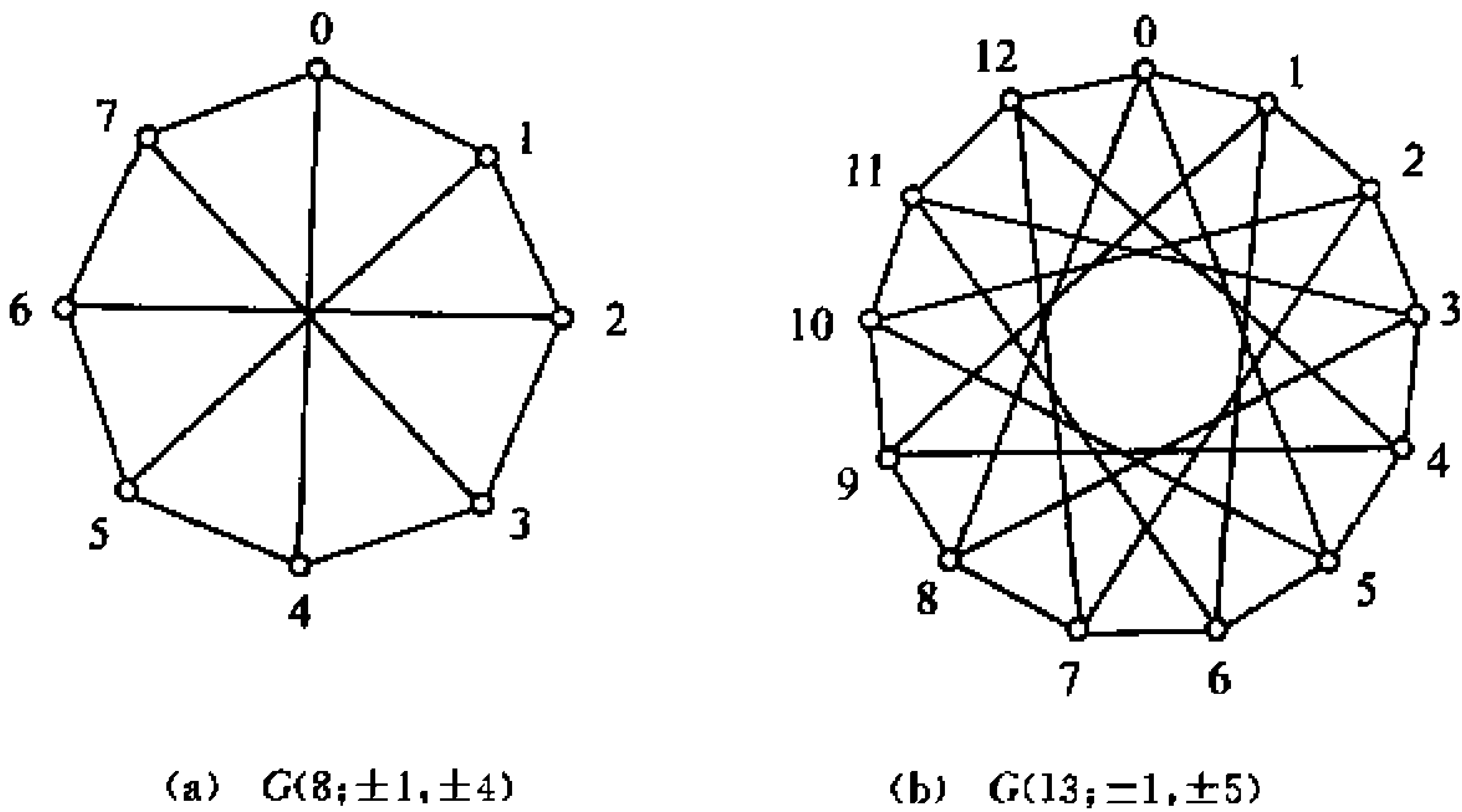
$$E(D)=\{(i,j):\text{存在 } s\in S \text{ 使 } j-i\equiv s(\mathrm{mod}\ n)\}.$$

若 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_l\}$且 $1\leqslant s_1<\cdots<s_l\leqslant n-1$,则记 $D(n;S)$为 $D(n;s_1,s_2,\cdots,s_l)$. 图 7.9(a)和(b)所示的是 $D(8;1,2)$和 $D(8;1,4,5)$. 显然,$D(n;S)$是 l 正则的.

本节只讨论有向循环图,而无向循环图看成是特殊的有向循环图.

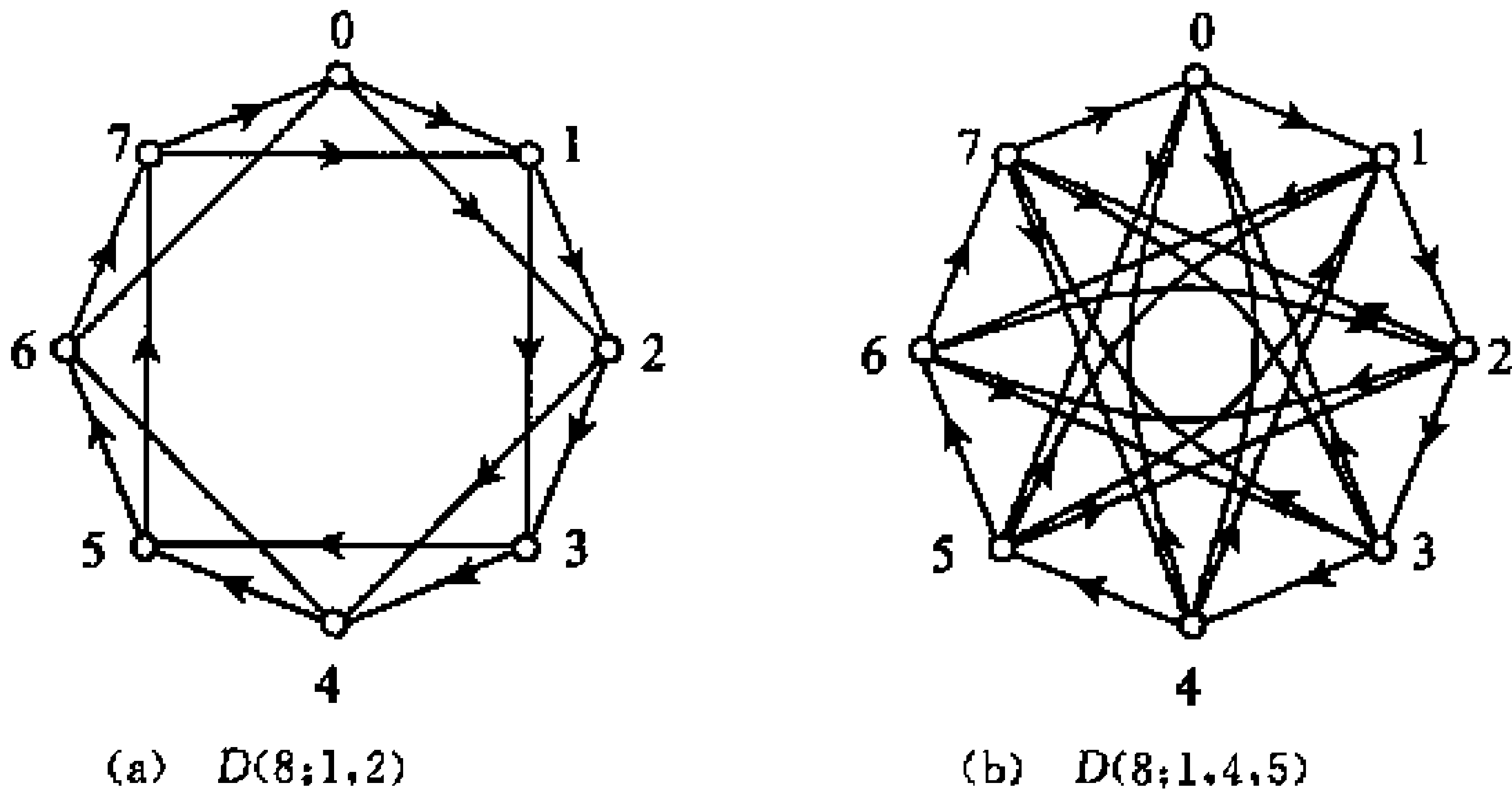
令 Z_n 是整数模n 加法群,则容易证明(习题 7.4.1)$D(n;S)$是 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$,因而是点可迁的. 于是由定理 7.8 和推论 7.9 以及定理 7.6 和推论 7.7,立

即获得下列两个定理(习题7.4.2).



(a) $G(8;\pm1,\pm4)$ (b) $G(13;\pm1,\pm5)$

图 7.8 无向循环图



(a) $D(8;1,2)$ (b) $D(8;1,4,5)$

图 7.9 有向循环图

定理 7.11 $D(n;s_1,s_2,\cdots,s_l)$**是强连通的**$\Leftrightarrow \mathrm{g.c.d}(n,s_1,s_2,\cdots,s_l)=1$.

定理 7.12 若$D=D(n;S)$是强连通的,则$\lambda(D)=|S|$;若$D=D(n;S)$是素阶强连通的,则$\kappa(D)=|S|$.

定理 7.13 设$S=\{1,2,\cdots,l\}$,$D=D(n;S)$,则$k(D)=l$.

证明 若$l=n-1$,则$D=K_n^*$. 于是有$\kappa(D)=n-1=l$. 下设$l<n-1$,并设X是D的分离集且$|X|<l$,并令i和j属于$D-X$的不同强连通分支. 令

$$R=\{i,i+1,i+2,\cdots,j-1,j\},$$
$$T=\{j,j+1,j+2,\cdots,i-1,i\},$$

其中加法是模n的. 由于$|X|<l$,所以$|X\cap R|<l$. 不难看出在$R\backslash X$中有由不同点构成的序列,它开始于i而终止于j,并且注意到两个相继项之间的差至多是l. 但这个序列是$D-X$中从i到j的有向路. 同样,由于$|X\cap T|<l$,$D-X$中也有一条从j到i的有向路. 这与X是(i,j)或(j,i)分离集相矛盾. 所以κ

$(D) \geq l$. 再由定理 4.4 有 $\kappa(D) \leq l$. 因此 $\kappa(D) = l$. □

由以上的分析可知，$D(n;S)$具有高度对称性和正则性. 如果我们能适当选取 $S \subseteq \{1,2,\cdots,n-1\}$ 使 $\kappa(D(n;S))$（或 $\lambda(D(n;S))$）$=l=|S|$，则 $D(n;S)$作为通讯网络的模型是比较理想的.

习 题

7.4.1 证明：$D(n;S)$是 Cayley 图 $C_{Z_n}(S)$.

7.4.2 证明定理 7.11 和定理 7.12.

7.4.3 证明：$G(n;\pm S)$是 Hamilton 图$\Leftrightarrow G(n;\pm S)$是连通的.

小结与参考文献

本章所讨论的主要问题是图和群之间的联系. 给出了图的群表示，同时也给出了群的图表示. 主要结论是：对于给定的有限群 Γ，存在无向图 G 使得 Γ 同构于 Aut(G)；存在有向图 D 使得 Γ 同构于 Aut(D)的一个子群. 讨论图与群的关系，利用群论中分析方法来研究图是代数图论中重要内容之一. 公认的优秀参考书有 Biggs(1993)和 Godsil 与 Royle (2001)的《代数图论》.

图对于群的一个重要应用是利用图来构造置换群. 特别是 Higman & Sims (1968)首先利用这种方法发现一个 44352000 阶零星单群，这就是著名的 Higman-Sims 群. 从那以后，人们利用图又构造了几个单群. 可惜的是，我们不能在这里介绍他们的精巧构造方法，是因为这种构造和论证需要组合论和群论中更进一步的知识. 有兴趣的读者可参阅 Biggs & White(1979)的专著《置换群与组合结构》.

不同构图的计数问题是图论研究中重要问题之一. 著名的 Pólya 定理是不同构图计数的有力工具，也是群对于图论的重要应用. 有兴趣的读者可参见 Chartrand & Lesniak(1986)著作的第 12 章. 关于图的计数可参见 Harary & Palmer(1973)的专著《图的计数》.

图在通讯和计算机互连网络的设计和分析中应用，我们已在第 4 章小结中作了说明. 关于循环图进一步性质的讨论可参阅李乔等(1993)的著作.

1 Biggs N L. *Alagebraic Graph Theory* (Second Edition). Cambridge:Cambridge University Press,1993

2 Biggs N L and White A T. *Permutation Groups and Combinatorial Structures*. Cambridge: Cambridge University Press,1976(中译本：比格斯 N L，怀特 A T 著，赵春来译. 置换群与组合结构. 北京：北京大学出版社，1987)

3 Chartrand G and Lesniak L. *Graphs & Digraphs*. Belmont, California: Wadsworth Inc. 1986

4 Cayley A. The theory of graphs, graphical representation. *Mathematical Papers*. Cambridge: 1895, **10**: 26～28

5 Frucht R. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe. *Compositio Math*, 1938, **6**: 239～250

6 Godsil C and Royle G. *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, 2001

7 Hamidoune Y O. Quelques problèms de connexité dans les graphes orientés. *J Comb Theory*(B), 1981, **30**: 1-10

8 Harary F and Palmer E M. *Graphical Enumeration*. New York: Academic Press, 1973

9 Higman D G and Sims C C. A simple group of order 44352000. *Math Zeitschr*, 1968, **105**: 110～113

10 李乔，徐俊明，张忠良. 最优双环网络的无限族. 中国科学，A辑，1993，**23**(9)：979-992

11 König D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936

图论常用记号

$\mathscr{B}(D)$：D 的割空间

$\mathscr{C}(D)$：D 的圈空间

$\mathscr{E}(D)$：D 的边空间

$\mathscr{V}(D)$：D 的顶点空间

$\mathbf{A}(D)$：D 的邻接矩阵

$\mathbf{A}(G)$：G 的邻接矩阵

$\mathbf{A}^T$：矩阵 A 的转置

$\mathrm{Aut}(D)$：D 的自同构群

$\mathrm{Aut}^*(D)$：D 的边自同构群

$\mathrm{Aut}^c(D)$：D 的保色自同构群

B_F：$\mathscr{B}(D)$中对应于林 F 的基矩阵

$b(a)$：边 a 的费用

$b(C,f)$：f 增广圈 C 的费用

$b(f)$：流 f 的费用

$B_G(f)$：平图 G 面 f 的边界

C_n：长度为 n 的圈

C_F：$\mathscr{C}(D)$中对应于林 F 的基矩阵

$c(a)$：边 a 的容量

$\mathrm{cap}B$：截边集 B 的容量

$C_\Gamma(S)$：Cayley 图

D：图，有向图

(D,w)：加权有向图

$D(A)$：A 的伴随有向图

$D(G)$：D 的伴随 2 部分图

$\overleftarrow{D}$：有向图 D 的逆图

D^c：D 的补图

$\hat{D}$：有向图 D 的凝聚图

$D(n;S)$：循环有向图

D_f：$0\neq f\in\mathscr{E}(D)$的支撑图

$d(D)$：D 的直径

$d_G(x)$：x 的顶点度

$d_D(x)$：x 的顶点度

$d_D^+(x)$：x 的顶点出度

$d_D^-(x)$：x 的顶点入度

$d_D(x,y)$：从 x 到 y 的距离

$d_G(f)$：平图 G 面 f 的度

$d_D^+(S)=|E_D^+(S)|$

$d_D^-(S)=|E_D^-(S)|$

$\det \mathbf{A}$：矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式

$\dim \mathscr{B}$：空间 $\mathscr{B}$ 的维数

$E(D)$：D 的边集

$E(G)$：G 的边集

$E_D(S,T)$：D 中起点在 S，终点在 T 的边集

$E_D[S,T]=E_D(S,T)\cup E_D(T,S)$

$E_D^+(S)=E_D(S,\bar{S})$

$E_D^-(S)=E_D(\bar{S},S)$

$E_D(S)=E_D^+(S)\cup E_D^-(S)$

$f(a)$：边 a 的流量

f_c：圈 C 的圈向量

$F(G)$：平图 G 的面集

$F^+(D)$：D 的正原子(或分片)

$F^-(D)$：D 的负原子(或分片)

$\bar{F}(D)$：D 中林 F 的余林

G：无向图

$G(n;\pm S)$：循环无向图

(G,w)：加权无向图

$\tilde{G}$：平面图 G 的平面表示

G^*：平图 G 的几何对偶图

$G_\Gamma(S)$：Frucht 图

g_B：键 B 的割向量

$g(D)$：D 的围长

$\overline{H}(D)$：D 的子图 H 的余图
K_n：n 阶完全图
K_n^*：n 阶完全有向图
$K_{n,m}$：完全 2 部分图
$L(D)$：D 的线图
$M(D)$：D 的关联矩阵
$M(G)$：G 的关联矩阵
$N_D^+(S)$：S 的外邻集
$N_D^-(S)$：S 的内邻集
$N_D(S)$：$N_D^+(S)\cup N_D^-(S)$
$N_G(S)$：S 的邻集
$N=N(D_{xy},w)$：网络
$N=N(D_{xy},c)$：容量网络
$N=N(D_{xy},b,c)$：费用容量网络
P_{n+1}：长度为 n 的路
$P(x,y)$：路 P 中(x,y)段
rank A：矩阵 A 的秩
Q_k：k 立方体图
$\overline{S}$：V 中子集 S 的补集
$V(D)$：D 的顶点集(或点集)
$V(G)$：G 的顶点集(或点集)
val f：流 f 的流量
$V_G(B,H)$：B 与 H 的接触点集
$(x,y)\in E(D)$：从 x 到 y 的有向边
(x,y)路：从 x 到 y 的有向路
$xy\in E(G)$：端点为 x 和 y 的边
xy 路：连接 x 和 y 的路
Γ：有限群

α：独立数
α'：匹配数
β：点覆盖数
β'：边覆盖数
γ：本原指数
δ^+：最小顶点出度
δ^-：最小顶点入度
δ：最小顶点度
Δ^+：最大顶点出度
Δ^-：最大顶点入度
Δ：最大顶点度
ε：边数
$\eta_D(x,y)$：D 中边不交(x,y)路的最大条数
κ：(强)连通度
$\kappa_D(x,y)$：D 中最小(x,y)分离集中的点数
λ：(强)边连通度
$\lambda_D(x,y)$：D 中最小(x,y)截边集中的边数
$\mu_D(x,y)$：$|E_D(x,y)|$
ν：顶点数，阶数，点数
$o(G)$：G 的奇连通分支数
$\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_k)$：点 k 染色
$\sigma=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$：边 k 染色
$\zeta_D(x,y)$：D 中内部点不交(x,y)路的最大条数
$\tau(D)$：D 中支撑树数目
$\varphi(G)$：平图 G 的面数
$\varphi=(F_1,F_2,\cdots,F_k)$：面 k 染色
χ：点色数
χ'：边色数
χ^*：面色数
ψ：关联函数
ω：连通分支数
$\vec{\omega}$：强连通分支数

$D[S]$：S 的导出子图
$D_1\cup D_2$：图 D_1 和图 D_2 的并
$D_1\cap D_2$：图 D_1 和图 D_2 的交
D_1+D_2：D_1 和 D_2 点不交的并
$D_1\oplus D_2$：D_1 和 D_2 边不交的并
$D_1\times D_2$：D_1 和 D_2 笛卡尔乘积
$D\cdot a$：边 a 收缩图
$D-x$：D 中除掉顶点 x
$D-a$：D 中除掉边 a

$D+(x,y)$：D 中添加边 (x,y)

$G_1 \vee G_2$：图 G_1 和图 G_2 的联

$H \subset D$：H 是 D 的真子图

$H \subseteq D$：H 是 D 的子图

$|S|$：集 S 中元素数目

$\lceil x \rceil$：不小于 x 的最小整数

$\lfloor x \rfloor$：不大于 x 的最大整数

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$(r \leqslant n)$

名词索引

一画

2 部划分 7

2 部分图 7

三画

三角剖分图 102

三角剖分平图 102

子图 16

  支撑子图 16

  导出子图 16

四画

分支 22

  H 分支 106

  连通分支 22

  强连通分支 23

分片 246

  正分片 246

  负分片 246

分裂运算 133

匹配 171

  完备匹配 171

  最大匹配 171

不可免完备集 229

方化矩形的构造 163

计算复杂度 82

五画

本原 49

  本原方阵 49

  本原指数 49

  本原有向图 50

长度 20

  迹长 21

  圈长 21

  路长 21

  链长 21

边 1

  平行边 4

  对称边 4

  相似边 245

  重边 4

边界 100

平凡图 5

平凡标号 196

平行边 4

四色猜想 217,226,228

四色问题 217

正多面体 114

可行顶点标号 195

可行流 129

可嵌入曲面 98

可约构形 231

可约矩阵 56

可迁

  点可迁 245

  边可迁 245

对称边 4

对称有向图 4

对偶

  几何对偶 110

  自对偶平图 113

  组合对偶 112

外向树 60

六画
向量
  圈向量 66
  割向量 67
阶 5
闭包 42
权 66
权函数 66
因子 184
因子分解 184
网络 125
  电网络 91
  容量网络 125
网络流 126
有向图 1
关联 3
关联函数 1
回 27
  Euler 回 32
  有向回 27
同构 6,241
  自同构 243
  边自同构 243
  保色自同构 251
  导出边同构 241
问题
  NPC 问题 83
  人员安排问题 189
  工作排序问题 199
  中国投递员问题 157
  四色问题 217
  收款台的设置问题 208
  贮藏问题 235
  货郎担问题 203
  排课表问题 232
  最小连接问题 79
  最优安排问题 195
  最短路问题 84
设计
  计算机磁鼓的设计 36
  可靠通讯网络的设计 254
  印刷电路板的设计 116
  运输方案的设计 145
  最优运输方案的设计 151

七画
余树 64
余林 64
块 23
连通 21
  强连通 23
连通度 138
  边连通度 138
  (点)连通度 138
邻集 14
  内邻集 14
  外邻集 14
围长 32

八画
直径 24
林 60
  支撑林 63
  余林 64
环 3
拉丁方 195
拉丁矩形 195
定向图 4
空间
  边空间 66
  顶点空间 65
  圈空间 67
  割空间 68
构形
  可约构形 230
细分图 105

顶点 1
- M饱和点 171
- 内部点 20
- 平衡点 13
- M非饱和点 171
- 终点 2
- 邻点 14
- 奇(偶,d)度点 12
- 孤立点 12
- 起点 2
- 相似点 245
- 端点 2
- 割点 32

定理
- Brooks 定理 215
- Frucht 定理 251
- Hall 定理 172
- König 定理 180
- Kuratowski 定理 106
- Menger 定理 129
- Tutte 定理 175
- Vizing 定理 221
- 五色定理 217
- 矩阵-树定理 61
- 最大流最小截定理 126

图
- f 支撑图 66
- Cayley 图 249
- Frucht 图 252
- de Bruijn 图 34
- Euler 图 32
- Grinberg 图 109
- Grötzsch 图 216
- Hamilton 图 37
- Heawood 图 230
- k 色图 214
- k 连通图 138
- k 边连通图 139
- Petersen 图 7
- Tutte 图 109
- 2 部分图 7
- 无向图 2
- 对称有向图 4
- 对偶图 110
- 平凡图 5
- 平面图 99
- 平图 99
- 平衡图 13
- 正则图 12,13
- 母图 16
- 可迁图 245
- 加权图 66
- 有向图 2
- 有限图 5
- 自补图 12
- 自对偶平图 113
- 同构图 6
- 逆图 32
- 完全图 7
- 连通图 22
- 补图 11
- 空图 5
- 余图 64
- 非平面图 99
- 单向连通图 24
- 极小非平面图 104
- 极大平面图 101
- 线图 17
- 定向图 4
- 临界 k 色图 214
- 标号图 7
- 星图 8
- 竞赛图 7
- 基础图 4
- 第一类图 224
- 第二类图 224

循环图 254
强连通图 23
简单图 4
图的阶 5
图的并 16
图的交 17
图的联 19
图的平面表示 98
图的曲面嵌入 98
图的图形表示 2
图的矩阵表示 43
图的群表示 249
函数
关联函数 1
权函数 66
容量函数 125

九画
度
顶点入度 12
顶点出度 12
连通度 138
顶点度 12
面度 100
计算复杂度 82
相邻
相邻的点 3
相邻的边 3
迹 27
Euler 迹 32
有向迹 21
临界
α-临界 189
β-临界 189
临界 k 色图 214
树 81
支撑树 63
外向树 60
有根树 60
余树 64
树图 65
树形图 61
染色
边 k 色可染 220
边 k 染色 220
边染色 220
点 k 色可染 214
点 k 染色 213
点染色 213
面 k 色可染 226
面 k 染色 226
面染色 226
规范 k 染色 235
厚度 139

十画
原子 246
正原子 246
负原子 246
矩阵
幺模矩阵 74
双随机矩阵 182
加权矩阵 66
本原矩阵 49
可约矩阵 56
关联矩阵 43
全幺模矩阵 79
邻接矩阵 43
矩离矩阵 87
置换矩阵 45
积和式 184
容量 125
流 126
流量 126
修正流 145,152
最小费用最大流 152

十一画

圈 27

 有向圈 27

 基本圈 70

 Hamilton 圈 37

笛卡尔乘积 19

十二画

链 20

集

 分离集 132

 边集 1

 顶点集 1

 邻集 14

 独立集 184

 割边集 64

 截边集 126

最

 最大匹配 171

 最大权完备匹配 195

 最大顶点度 12

 最大独立集 184

 最大流 126

 最小权完备匹配 198

 最小顶点度 12

 最小树 80

 最小截 126

 最优邮路 157

距离 24

十二画以上

路 21

 f 饱和路 145

 f 增广路 145

 Hamilton 路 21

 M 交错路 189

 M 增广路 189

 有向路 21

 邮路 157

割点 22

割边 22

算法

 Christofides 近似算法 206

 DMP 算法 118

 Edmonds-Johnson 算法 158

 Ford-Fulkerson 算法 196

 Klein 算法 156

 Kruskal 算法 83

 Kuhn-Munkres 算法 198

 Moore-Dijkstra 算法 84

 Prim 算法 80

 匈牙利算法 192

 有效算法 110

 好算法 110

 近似有效算法 206

 顺序染色算法 236

键 64

 基本键 71

 Hamilton 键 113

数

 Ramsey 数 20

 匹配数 179

 边色数 221

 边数 5

 边覆盖数 186

 本原指数 49

 交叉数 105

 全色数 225

 色数 213

 顶点数 5

 独立数 185

 面色数 226

 点覆盖数 179

群

 自同构群 243

 边自同构群 243

 保色自同构群 251

群的图表示 250

责任编辑：刘卫东

研究生教学用书



定价：25.00元